ISTITUZIONI

DI

ANALISI ALGEBRICA

ISTITUZIONI

DI

ANALISI ALGEBRICA

DI

ALFREDO CAPELLI
Prof. ordinario nella R. Università di Napoli
Socio ordinario della R. Accademia delle Scienze di Napoli
Socio onorario della R. Accademia di Scienze, Lettere e Belle Arti di Palermo
Socio corrispondente della R.ª Accademia dei Lincei, ecc.

TERZA EDIZIONE CON AGGIUNTE

DELLE

LEZIONI DI ALGEBRA COMPLEMENTARE

AD USO DEGLI ASPIRANTI ALLA LICENZA UNIVERSITARIA
IN SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

NAPOLI
LIBRERIA SCIENTIFICA ED INDUSTRIALE
di B. PELLERANO
Via Gennaro Serra, 20
1902

Proprietà letteraria

Tip. Angelo Trani, Via Medina 25.

PREFAZIONE ALLA PRIMA EDIZIONE

(Novembre 1894)

Nel libro che ho l'onore di presentare al pubblico degli studiosi, si trova riprodotta, con molte aggiunte e non senza qualche lieve modificazione, quella parte delle mie lezioni universitarie che è stata pubblicata già da molti anni in edizioni litografate.

Ogni paragrafo è per lo più accompagnato da Note ed Esercizi. I teoremi enunciati nelle Note vi sono anche quasi sempre dimostrati. Benchè molti di essi non siano meno importanti di quelli dimostrati nel testo, ho stimato tuttavia trattarli separatamente nelle Note, potendo essi anche omettersi in una prima lettura del libro senza che perciò venga pregiudicata l'intelligenza di ciò che segue.

Fra le varie aggiunte fatte va notato il capitolo sui principii della teoria degli irrazionali algebrici. Questa teoria non viene ordinariamente trattata nei corsi di algebra complementare. Mi è parso però che in un libro sulla teoria delle equazioni non potesse mancare il teorema dell'impossibilità di risolvere per radicali le equazioni di grado superiore al quarto, e nemmeno l'altro, che è pure di pertinenza dell'algebra, dell'impossibilità di trisecare un angolo qualunque col solo uso della riga e del compasso adoperati nel senso di Euclide. Del resto gli altri paragrafi di quel capitolo sono un fondamento indispensabile per quanti vogliano avviarsi ai rami più elevati dell'algebra superiore.

PREFAZIONE ALLA SECONDA EDIZIONE

(Maggio 1898)

In questa nuova edizione, ad eccezione dei capitoli VI, VIII, XI (*) rimasti pressochè identici agli omonimi della prima edizione, e del capitolo X modificato soltanto leggermente, tutta l'opera presenta, rispetto alla prima edizione, notevoli miglioramenti, rimaneggiamenti ed aggiunte.

Il capitolo IX (**) è quasi interamente nuovo. In questo capitolo ho stimato opportuno far seguire ai teoremi fondamentali sulla trasformazione lineare delle forme quadratiche i principii della teoria degli invarianti e covarianti tanto utili nella trattazione analitica delle proprietà projettive delle figure.

Confido anche che non sia per sembrare inopportuna l'introduzione alla teoria delle funzioni ellittiche, fatta in modo sommario nelle Note (pagg. 302-306 e 328-330); giacchè sembra oggimai tempo che anche queste trascendenti trovino un po' di posto, accanto alle trascendenti elementari, nei libri d'istituzione destinati a porre i primi fondamenti dell'analisi.

Finalmente credo utile far sapere che tutta l'opera è stata accuratamente riveduta anche per quanto riguarda l'esattezza delle formole e la correttezza della stampa.

(*) Che sono rispettivamente i capitoli XIII, XV e X della terza edizione.
(**) Che è divenuto il XVI della terza edizione.

PREFAZIONE ALLA TERZA EDIZIONE

(Maggio 1902)

La presente edizione delle mie *lezioni di algebra complementare* si distingue in particolar modo dalle precedenti per l'aggiunta di alcuni capitoli nei quali ho esposto abbastanza diffusamente gli elementi della teoria dei numeri naturali e di quella dei numeri negativi e frazionarii, in una parola quei primi fondamenti dell'aritmetica e dell'algebra che, per il passato, si presupponevano già ben famigliari al lettore.

È quasi inutile di far rilevare che aggiunte cosiffatte non potevano avere soltanto lo scopo di rendere il libro accessibile anche ad un lettore che mancasse dei primi rudimenti; e come invece io sia convinto che esse potranno riuscire di qualche vantaggio anche a quella particolare classe di studiosi ai quali il mio libro era ed è più specialmente indirizzato.

E così è difatti, e per doppia ragione. Primieramente perchè anche a chi già si trovi in pieno e sicuro possesso dei primi elementi, appare spesso utile e talora anzi necessario (per la difformità e varietà stessa dei metodi, non sempre ugualmente rigorosi, che hanno servito ad apprenderli) di richiamare questo o quello dei punti fondamentali sui quali si accinge ad elevare il nuovo edifizio, allo scopo di valutarne, con sintesi uniforme rapida e rigorosa, la portata precisa ed il nesso logico che li congiunge alle verità già conseguite o da conseguirsi. L'altra ragione poi ha la sua radice nel desiderio, ben naturale, di ogni spirito scientifico di ricollegare quel complesso di verità che attualmente lo interessa, alle stesse forme primordiali del raziocinio, deducendole da esse, non solamente per la via più semplice e più diretta, ma altresì nel modo più confacente all'attuale suo punto di vista; diguisachè i primi elementi si presentino addirittura sotto quella medesima luce che su di essi hanno gettato, assai più tardi e soltanto come per riverbero, quelle stesse verità di ordine più elevato che sono appunto l'oggetto del nuovo trattato.

Aggiungerò che *l'indirizzo combinatorio* da me adottato per l'esposizione dei primi fondamenti, nel mentre risponde pienamente a quest'ultima ragione puramente scientifica, è, a mio av-

viso, il più consigliabile, anche dal punto di vista didattico, per la preparazione elementare a qualsiasi ramo delle matematiche razionali. Si veggano, a proposito di tutto ciò, le mie tre pubblicazioni (riunite nel volume XXXIX, 1901, del Giornale di Matematiche di Battaglini): *Sull'ordine di precedenza fra le operazioni fondamentali dell'aritmetica—Sulla genesi combinatoria dell'aritmetica—Il concetto di valore e l'introduzione nell'aritmetica dei numeri negativi e frazionarii.*

Devo anche notare come, dopo l'aggiunzione delle teorie elementari cui si è ora accennato, mi è parso indispensabile sostituire al titolo, di indole puramente scolastica, di *lezioni di algebra complementare* quello più scientifico di *istituzioni di analisi algebrica;* giacchè quest'ultimo rappresenta assai meglio la natura del mio libro quale esso è attualmente, cioè la fusione in un tutto omogeneo degli *elementi* dell'algebra e dei loro *complementi.*

Per quanto riguarda gli altri miglioramenti apportati al mio libro in questa nuova edizione, basteranno due parole. Essi consistono principalmente in un certo maggiore sviluppo dato, in apposito capitolo, agli elementi di analisi combinatoria e specialmente ai primi elementi della moderna teoria dei gruppi; nell'aggiunta di un nuovo capitolo consacrato alle generalità sulla continuità e derivabilità delle funzioni; e finalmente nell'aggiunta di alcuni nuovi §§ (i §§ 9, 10, 11 e 12 del capitolo XI) nei quali vengono esposti gli elementi della teoria delle funzioni ellittiche, che per il passato erano stati soltanto sommariamente accennati nelle Note.

AVVERTENZA

Quei §§ che nell'indice delle materie sono contrassegnati con un asterisco, sono destinati specialmente ai giovani che, ottenuta la licenza, intendono poi proseguire gli studi di matematiche pure. In ogni modo tutti coloro che crederanno ravvisare in essi un complemento utile, se non indispensabile, alla loro coltura matematica, potranno ometterli in una prima lettura del libro e ritornarvi sopra più tardi dopo aver espletato il corso in tutte le sue parti più fondamentali.

Alcuni altri §§ (p. es. il 4° del Cap. XIII) vengono svolti ordinariamente nel corso di calcolo infinitesimale, ed altri (Cap. XVI, 1-8) vengono spesso esposti in modo pressochè equivalente, benchè con veste geometrica, nei corsi paralleli di geometria analitica e di geometria projettiva. Quanto poi ai Capitoli I, II e IV, essi non sono che un riassunto di quella parte dell'insegnamento secondario che è necessaria a chi imprende lo studio dell'algebra complementare.

INDICE

CAPITOLO III.

Elementi di analisi combinatoria.

CAPITOLO IV.

Operazioni con numeri razionali.

CAPITOLO V.

Teoria dei determinanti e sua applicazione alla risoluzione dei problemi algebrici di 1° grado.

CAPITOLO VI.

Elementi del calcolo delle funzioni razionali intere

CAPITOLO VII.

Operazioni con numeri reali.

CAPITOLO VIII.

Generalità sulla continuità e derivabilità delle funzioni di variabili reali.

CAPITOLO IX.

Proprietà generali delle equazioni a coefficienti reali.

CAPITOLO X.

Risoluzione numerica delle equazioni.

CAPITOLO XI.

Operazioni con numeri complessi.

CAPITOLO XII.

Delle radici dell'equazione di grado *n*.

CAPITOLO XIII.

Teoria generale della divisibilità e dell'eliminazione.

CAPITOLO XIV.

Trasformazione delle equazioni. Risoluzione generale delle equazioni dei primi quattro gradi.

CAPITOLO XV.

Principii della teoria degli irrazionali algebrici.

CAPITOLO XVI.

Trasformazione lineare delle forme algebriche. Invarianti e covarianti.

ERRATA-CORRIGE

pg. 56 : linea 10ma : in luogo di *a base dieci,* leggi *a base* n.
» 115 : linea 35ma : in luogo di (art.), leggi (art. 243).
» 289 : nell' enunciato del secondo teorema dell' art. 288 sono sottintese le parole : *all' infuori del gruppo alternato.*
» 339 : nell'ultima formola : in luogo del primo membro :

$$\sqrt{(x_3-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_3-z_1)^2} \quad \text{leggi} \quad \sqrt{(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2+(z_3-z_1)^2}$$

» 342 : linea 38ma : in luogo di *tutti i punti,* leggi *tutti punti.*
» 357 : in luogo di § 8°, leggi § 9°, e così poi a pg. 359, in luogo di § 9°, leggi § 10°; e così di seguito pei rimanenti §§ del capitolo VIII.
» 362 : line 6^{a} : in luogo di $x_1, x_1, \ldots, x_n$, leggi $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
» 410 : nell' eguaglianza (I') : in luogo di $\Delta^2 f(x)$, leggi $\dfrac{\Delta^2 f(x)}{\underline{|2}}$.
» 442 : linea 22ma : in luogo di *daopu,* leggi *dando.*
» 469 : nella formola (6) : in luogo di $\left(u+\dfrac{g'}{3}\right)$ leggi $\left(u+\dfrac{g'}{2}\right)$.
» 480 : in luogo della seconda formola, leggi :

$$\mathrm{sn}(u+v) = \frac{\mathrm{sn}u\ \mathrm{cn}v\ \mathrm{dn}v + \mathrm{sn}v\ \mathrm{cn}u\ \mathrm{dn}u}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2u\ \mathrm{sn}^2v}.$$

» 483 : linea 5^{a} : in luogo di *per* h = 0, leggi *per* k = 0.

INTRODUZIONE

1. La presente opera ha per oggetto principale di stabilire i fondamenti dell'analisi così detta algebrica, potendosi opportunamente definire per *analisi algebrica* quel ramo dell'analisi matematica che ha per oggetto lo studio delle *funzioni algebriche.*

Per comprendere quindi quale sia il campo preciso dell'analisi algebrica e come esso si differenzii da quello dell'analisi *trascendentale* è necessario richiamare il concetto generale di *funzione* e farsi una chiara idea della distinzione, odiernamente adottata, di tutte le funzioni analitiche in funzioni algebriche e funzioni trascendenti.

2. Come si vede, non è possibile dare fin d'ora il concetto di funzione algebrica se non a coloro che già abbiano una certa conoscenza dei primi elementi dell'aritmetica e dell'algebra; e soltanto a costoro sono destinate le poche parole che qui premettiamo a guisa di prolusione. Gli altri, che pur volessero attingere da esse il concetto di funzione algebrica, potranno ritornarvi più tardi, dopo aver letto i punti principali dei capitoli I, II e IV di queste istituzioni; e specialmente quanto è detto alla fine del capitolo IV circa la nozione generale di *funzione* e quella particolare di *funzione intera.*

3. *Una variabile* y *si dice funzione algebrica delle* p *variabili indipendenti* $x_1, x_2, \ldots, x_p$ *allora e soltanto quando il legame fra le* p + 1 *variabili* $y, x_1, x_2, \ldots, x_p$ *si può esprimere con una equazione*:

$$F(y, x_1, x_2, \ldots, x_p) = 0,$$

essendo il primo membro una funzione intera delle p + 1 *variabili* $y, x_1, x_2, \ldots, x_p$.

In altri termini: il legame fra le $y, x_1, x_2, \ldots, x_p$ dev'essere della forma:

$$\sum A \cdot y^{\alpha} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_p^{\alpha_p} = 0,$$

essendo le A certi coefficienti costanti e gli esponenti $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_p$ dei numeri interi e positivi. Così, ad esempio, se fra le tre varia-

bili x, y, z si ponga il legame:

$$2x^2y^2z - 4x^2yz^2 - 5x^2y^2z^3 + 8x^3y^2 - 7 = 0,$$

una di esse, per esempio la z, sarà funzione algebrica delle due rimanenti x ed y.

4. In particolare, se y sia una funzione algebrica dell'unica variabile x, il legame fra y ed x sarà della forma:

$$\sum_{\alpha,\beta} A \cdot x^\alpha y^\beta = 0.$$

Dalla natura di questa relazione emerge chiaramente che, se in luogo di considerare come variabile indipendente la x e come variabile dipendente la y, si consideri invece come variabile indipendente la y, la x verrà del pari ad avere il carattere di una funzione algebrica di y. A seconda che si scelga la x ovvero la y come variabile indipendente, si scriverà dunque:

$$y = f(x), \quad \text{oppure} \quad x = \varphi(y),$$

ma le due funzioni f e φ, in generale fra loro ben distinte, saranno entrambe algebriche.

Cioè: *la funzione inversa di una funzione algebrica è del pari una funzione algebrica.*

5. Tutte le funzioni che non sono comprese nella categoria, testè definita, delle funzioni algebriche, si dicono funzioni *trascendenti.*

Sarà ora conveniente di passare in rivista tutte quelle funzioni che si presentano fino dagli elementi delle matematiche, per vedere quali di esse siano funzioni algebriche secondo la definizione da noi data, e quali siano invece da classificarsi fra le funzioni trascendenti.

6. Le funzioni più semplici, almeno dal punto di vista della costruzione della loro espressione analitica, sono le stesse funzioni intere. Esse sono evidentemente algebriche, poichè, se y è una funzione intera delle variabili $x_1, x_2, \ldots, x_p$, si ha:

$$y = \sum A x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_p^{\alpha_p},$$

d'onde:

$$y - \sum A x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_p^{\alpha_p} = 0,$$

cioè il legame fra y e le $x_1, x_2, \ldots, x_p$ è espresso appunto dall'uguagliare a zero una funzione intera delle $p+1$ variabili y, $x_1, x_2, \ldots, x_p$.

7. Dopo le funzioni intere si presentano le funzioni così dette *razionali.* Esse si possono sempre ridurre alla forma di quoto di due funzioni intere; cosicchè se y è una funzione razionale delle

$x_1, x_2, \ldots, x_p$, si potrà scrivere:

$$y = \frac{\sum A \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_p^{\alpha_p}}{\sum B \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_p^{\alpha_p}}.$$

Da questa espressione emerge che *le funzioni razionali appartengono alla categoria delle funzioni algebriche.*

Dalla precedente eguaglianza si deduce infatti:

$$y \cdot \left\{ \sum B \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_p^{\alpha_p} \right\} - \sum A \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_p^{\alpha_p} = 0$$

che è appunto un'equazione il cui primo membro è evidentemente una funzione intera delle $p+1$ variabili $y, x_1, x_2, \ldots, x_p$.

8. Sono del pari algebriche le funzioni la cui espressione si compone operando sulle variabili indipendenti $x_1, x_2, \ldots, x_p$ e sopra un certo numero finito di costanti, oltrechè colle quattro operazioni fondamentali, anche coll'estrazione di radice ad indice intero.

Ciò non può essere dimostrato completamente che più tardi (quando avremo stabilita la teoria delle funzioni simmetriche delle radici di una equazione).

È però facile di persuadersene con qualche esempio.

Sia p. es. la funzione:

$$y = 1 + \sqrt{\frac{3x^5 + \sqrt[3]{x^4 - 5}}{x^3 + 5}}$$

Di qui si deduce:

$$(y-1)^2 = \frac{3x^5 + \sqrt[3]{x^4 - 5}}{x^3 + 5}$$

e facendo sparire il denominatore:

$$(y-1)^2(x^3+5) = 3x^5 + \sqrt[3]{x^4 - 5},$$

onde anche, portando il termine $3x^5$ nel primo membro ed elevando quindi al cubo i due membri:

$$[(y-1)^2(x^3+5) - 3x^5]^3 = x^4 - 5$$

e finalmente:

$$[(y-1)^2(x^3+5) - 3x^5]^3 - x^4 + 5 = 0.$$

Cioè, sviluppando il cubo nel primo membro, l'equazione che lega y ed x prenderà appunto la forma sopra indicata:

$$f(x, y) = 0$$

in cui f esprime una funzione intera di x ed y.

9. Veniamo ora alle funzioni *trigonometriche* quali $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$. Esse sono tutte trascendenti, del che possiamo convincerci ba-

sandoci sulla proprietà, comune a tutte queste funzioni, di essere *periodiche*.

Esse, infatti, riprendono sempre lo stesso valore quando all'argomento x si dia un aumento di un multiplo intero positivo o negativo di 2π, intendendo con 2π quel numero costante che esprime il rapporto fra la lunghezza di una circonferenza ed il suo raggio. Ciò posto, supponiamo p. es., se è possibile, che la funzione $y = \sin x$ fosse una funzione algebrica; si avrebbe allora fra x ed y una relazione della forma intera;

$$\sum \mathrm{A} \cdot y^{\alpha} \cdot x^{\beta} = 0.$$

Questa relazione dovendo essere verificata, se per x si prenda un valore qualunque $x_0 + 2\theta\pi$ (θ intero positivo o negativo) e per y il valore corrispondente:

$$y = \sin(x_0 + 2\theta\pi) = \sin x_0,$$

si avrà, qualunque sia il numero intero θ:

$$\sum \mathrm{A} \cdot (\sin x_0)^{\alpha} \cdot (x_0 + 2\pi\theta)^{\beta} = 0,$$

cioè, sviluppando ed ordinando secondo le potenze di θ, un'equazione della forma:

$$a_0\theta^n + a_1\theta^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\theta + a_n = 0$$

in cui le a_0, a_1, ... sono coefficienti costanti che dipendono dalle A e da x_0.

Quest' equazione in θ sarebbe dunque soddisfatta dalle infinite soluzioni $\theta = 1, 2, 3, 4, \ldots$

Ora ciò è contrario ad un teorema fondamentale che verrà dimostrato in questa stessa opera; cioè che: *un'equazione algebrica di grado* n *ad una incognita non può mai ammettere più di* n *soluzioni differenti.*

10. Per ragione analoga non può considerarsi come algebrica la funzione esponenziale:

$$y = a^x$$

dove a è una costante. Noi potremo infatti dimostrare che questa funzione è del pari periodica, di natura affine alla natura delle funzioni trigonometriche, basandoci sulle formole di Eulero:

$$\sin x = \frac{e^{x.\sqrt{-1}} - e^{-x.\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}, \quad \cos x = \frac{e^{x.\sqrt{-1}} + e^{-x.\sqrt{-1}}}{2}$$

che dimostreremo a suo luogo, nelle quali e è una certa costante numerica:

$$e = 2{,}7182818284\ldots.$$

Da queste formole già apparisce che, se la funzione e^x fosse algebrica, tali dovrebbero pure essere le funzioni $\sin x$ e $\cos x$ contrariamente a quanto si è sopra osservato.

11. Finalmente sarà del pari trascendente la funzione:

$$y = \log_a x,$$

poichè, se essa fosse algebrica, dovrebbe essere del pari algebrica, come si è notato più sopra, la sua funzione inversa:

$$x = a^y$$

che è di nuovo una funzione esponenziale.

Le funzioni trigonometriche, esponenziali e logaritmiche sono dunque da classificarsi fra le funzioni trascendenti.

12. Ritornando alle funzioni algebriche, è chiaro che il problema principale di cui dovremo occuparci, è il seguente: *dato un sistema di equazioni algebriche:*

$$f(x, y, z...) = 0, \varphi(x, y, z...) = 0, \psi(x, y, z...) = 0, ... \qquad (\alpha)$$

fra altrettante incognite x, y, z, ..., *determinare il sistema o i sistemi di valori delle incognite* x, y, z, ... *per i quali tutte le dette equazioni restano soddisfatte.*

La risoluzione di questo problema si suol ridurre a quella dei due problemi parziali che qui indichiamo.

a) Ricondurre il sistema (α) delle n equazioni con n incognite ad equazioni algebriche contenenti ciascuna una sola incognita. In ciò consiste la così detta *eliminazione* la cui teoria abbraccia un campo assai esteso nel quale molto ancora resta a farsi.

b) Data un'equazione algebrica ad una sola incognita:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

in cui le a sono coefficienti che devono considerarsi *come conosciuti*, determinare i valori di x che vi soddisfano.

Considerando i coefficienti conosciuti $a_0, a_1, \ldots$ come delle variabili indipendenti, l'equazione scritta viene a definire la x come una certa *funzione algebrica* $x = \varphi(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ dei coefficienti, e lo studio della natura di questa funzione e delle sue possibili espressioni analitiche dà luogo alla teoria della così detta *risoluzione generale* delle equazioni.

Si chiama invece *risoluzione numerica* delle equazioni quel complesso di metodi per mezzo dei quali, una volta assegnati certi speciali valori numerici pei coefficienti numerici $a_0, a_1, \ldots,$ si giunge a determinare il valore, o i valori numerici che vi corrispondono per l'incognita.

13. Si supponga dato, per esempio, il sistema di due equazioni con due incognite x, y:

$$\left.\begin{aligned} ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + g = 0 \\ Ax + By + C = 0 \end{aligned}\right\} . \qquad (\alpha)$$

Si vogliano le coppie di valori x ed y che soddisfano ad entrambe. Si comincerà dall'*eliminare* una delle due incognite, p. es. la x, ricavandone il valore dalla seconda equazione, e sostituendolo nella prima.

Si ottiene così l' equazione:

$$p_0 y^2 + p_1 y + p_2 = 0 \qquad (\beta)$$

dove:

$$p_0 = aB^2 + bA^2 - cAB$$
$$p_1 = 2aBC - cCA - dBA + eA^2$$
$$p_2 = aC^2 - dCA + gA^2.$$

L' equazione (β), essendo di secondo grado, ci dà per y i due valori:

$$y_1 = \frac{-p_1 + \sqrt{p_1^2 - 4p_0 p_2}}{2p_0}\ ,\quad y_2 = \frac{-p_1 - \sqrt{p_1^2 - 4p_0 p_2}}{2p_0}$$

ciascuno dei quali accoppiato con un opportuno valore di x potrà soddisfare alle (α). Dalla seconda delle (α) si deduce immediatamente per i valori x_1, x_2 da accoppiarsi rispettivamente con y_1, y_2:

$$x_1 = -\frac{By_1 + C}{A}\ ,\quad x_2 = -\frac{By_2 + C}{A}.$$

14. Il sistema delle (α) ammette dunque in generale due sistemi di soluzioni, i quali però cessano di esistere *realmente* quando $p_1^2 - 4p_0 p_2$ sia negativo. Vedremo però a suo tempo come anche in questo caso si possa dare un significato alle formole di risoluzione mediante la considerazione dei numeri così detti *complessi*. Noi vedremo che, generalmente parlando, la risolubilità di un sistema qualunque di n equazioni algebriche con n incognite è appunto subordinata all' introduzione nell' algebra di questa nuova classe di enti aritmetici. Fanno eccezione i sistemi di equazioni di 1.° *grado*, la cui risoluzione noi tratteremo separatamente mediante l' importante teoria dei *determinanti*. Per la risoluzione generale dei sistemi di 1.° grado non è, infatti, necessario estendere il campo dei numeri naturali al di là dei numeri commensurabili, positivi o negativi, che già si considerano nei primi elementi dell'aritmetica e dell' algebra.

I sistemi di equazioni di 1.° grado hanno del resto molta importanza anche nella risoluzione dei problemi di grado superiore, i quali si avvantaggiano grandemente, come vedremo, della teoria della *trasformazione* ed in ispecie della trasformazione *lineare* o di 1.° grado. Su quest' ultima è fondata la teoria tutta moderna degl'*invarianti e covarianti projettivi*, che costituisce, sotto il titolo più generico di *teoria delle forme algebriche*, uno dei rami più importanti dell'algebra superiore.

15. Dopo aver trattato quella parte dell' algebra che può svolgersi completamente senza uscire dal campo dei numeri razionali e prima di passare alla teoria dei numeri complessi, strumento in-

dispensabile alla teoria della risoluzione formale delle equazioni algebriche e degli irrazionali algebrici, dovremo estenderci alquanto sulla teoria dei numeri reali e delle operazioni, così *finite* come *infinite*, che su di essi possono effettuarsi. Le poche operazioni infinite di cui avremo ad occuparci, si collegano strettamente col concetto di *limite* e con diversi teoremi ad esso attinenti, lo stabilire i quali in modo strettamente rigoroso è indispensabile per procedere con sicurezza nello svolgimento di alcuni punti capitali e specialmente nella dimostrazione del teorema fondamentale che *ogni equazione algebrica ammette sempre almeno una soluzione.* Nè lasceremo il campo dei numeri reali senza prima aver parlato dei concetti di continuità e derivabilità e toccato alcuni pochi punti fondamentali della teoria delle funzioni di una o più variabili reali, anche con alquanto maggior larghezza di quanta ne verrebbe strettamente reclamata dagli scopi più immediati dell'analisi algebrica.

16. Aggiungiamo finalmente che la necessità di premettere alcuni elementi di matematica combinatoria come sussidio indispensabile alla teoria delle funzioni razionali e delle equazioni algebriche, ci ha indotto a ricostruire, fin dai primissimi principii, la stessa teoria dei numeri naturali e dei numeri negativi e frazionarii allo scopo di mostrare in qual modo si possa dare allo svolgimento dei primi elementi dell'aritmetica e dell'algebra un indirizzo sistematico che metta in piena luce lo stretto legame che essi hanno coi teoremi combinatorii che si presenteranno in seguito e che sono tanta parte degli odierni progressi dell'analisi algebrica e trascendente.

CAPITOLO I.

GENESI COMBINATORIA DELL' ARITMETICA E INTRODUZIONE AL CALCOLO LETTERALE

§ 1.° — Concetto di unità — Concetto di aggregato.

1. Qualunque oggetto od ente, in quanto venga da noi pensato, è atto a risvegliare in noi l'idea di *unità*. Così le parole: *un lupo—un cavallo—un fiore*, ecc. pronunziate isolatamente le une dalle altre ci rappresentano altrettante *unità*.

2. Quando le parole rappresentanti diversi oggetti si pronunziano l'una immediatamente dopo l'altra, il che si esprime grammaticalmente interponendo fra esse la congiunzione copulativa *e* (che può anche essere sostituita, verbalmente, da una brevissima pausa o, graficamente, da una virgola), esse risvegliano invece in noi l'idea di *aggregato* (aggregato di oggetti, di enti, di unità,...). Così le frasi: *un lupo ed un cavallo*, oppure: *un fiore, un cavallo ed un albero*, e via dicendo, ci rappresentano degli aggregati ben determinati; e sarà indifferente dire: *un lupo ed un cavallo*, ovvero: *un cavallo ed un lupo*, ecc. Così la frase: *un fiore, un cavallo ed un albero* rappresenta precisamente quello stesso aggregato che è rappresentato dalla frase: *un albero, un cavallo ed un fiore*; e via dicendo.

3. Nella matematica combinatoria gli oggetti si rappresentano per maggiore comodità con delle semplici lettere, giacchè la diversità delle lettere è sufficiente a mettere in evidenza la diversità degli oggetti che esse rappresentano. Si ha con ciò anche il vantaggio della maggiore generalità nei ragionamenti; giacchè p. es. l'aggregato degli oggetti A, B, C potrà poi essere, secondo i casi, quello espresso dalla frase: *un lupo, un cavallo ed un fiore*, ovvero quello espresso dalla frase *un libro, un fiore ed una pietra*, a seconda dei significati che piacerà attribuire ad ogni singola lettera.

Per maggior chiarezza noi rappresenteremo in generale gli enti singoli, ossia le unità, colle sole lettere maiuscole A, B, C,... riservando le minuscole alla rappresentazione di certi enti speciali studiati dall' aritmetica (i così detti *numeri*, di cui cominceremo ad occuparci fra poco).

4. Se i nomi degli enti che costituiscono un certo aggregato (o, come anche diremo brevemente, degli *elementi dell'aggregato*) si possono enunciare, o anche soltanto pensare enunciati, successivamente, cioè l'uno dopo l'altro, senza che quest' operazione debba prolungarsi indefinitamente, si dice che l'aggregato é *finito*.

Quando gli elementi degli aggregati si rappresentano mediante lettere, un aggregato finito si rappresenta ordinariamente colla scrittura:

$$A, B, C, \ldots, E$$

od altra simile, sostituendo con dei *punti* gli oggetti che per brevità non vengono enunciati e mettendo in evidenza, colla lettera finale E od altra a piacere, che vi è un oggetto enunciabile come *ultimo*, tale, cioè, che dopo averne enunciato il nome, non resterà più ad enunciare alcun altro oggetto.

5. Quando l'aggregato è tale che l'enunciazione dei suoi singoli elementi non potrebbe aver termine, l' aggregato si dice *infinito*.

Dire che l' enunciazione dei singoli elementi è interminabile, equivale a dire che non esiste nell' aggregato un elemento che possa essere enunciato come ultimo di tutti. Per tale ragione l'aggregato infinito si rappresenta, a differenza dell'aggregato finito, colla scrittura:

$$A, B, C, \ldots$$

od altra simile, omettendo la lettera terminale. I punti non seguiti da una lettera terminale s'intendono potersi proseguire indefinitamente e vengono perciò a rappresentare un aggregato infinito o, come anche si dice, *un' infinità di oggetti.*

D' ora innanzi, quando non venga dichiarato esplicitamente il contrario, colla parola *aggregato* intenderemo sempre parlare di aggregati finiti.

6. Sarà spesso utile di rappresentare con delle lettere non solamente i singoli oggetti, ma anche gli stessi aggregati. Ad evitare qualsiasi confusione, questi ultimi verranno da noi costantemente rappresentati con lettere soprassegnate con una lineetta. Così, ad esempio, nel mentre che la lettera A potrà rappresentare soltanto un oggetto singolo, la lettera $\overline{A}$ potrà anche rappresentare un'aggregato di oggetti, come A, B, C, D.

Per esprimere che le due scritture hanno assolutamente lo stesso significato, si potrà scrivere:

$$\overline{A} = A, B, C, D.$$

Nota.

In luogo della parola *aggregato* è anche usata nelle matematiche la parola *insieme*. Essa viene però di preferenza adoperata per designare gli aggregati di infiniti elementi.

Nell'uso comune è anche spesso adoperata la parola *gruppo*; ma essa è qui possibilmente da evitarsi, perchè questa denominazione viene oggi

quasi esclusivamente riservata a designare degli aggregati che godono di certe proprietà speciali (Cfr. Cap. III°).

§ 2.° — Coordinazione di aggregati — Concetto di ordine.

7. Dato un aggregato di oggetti ed un altro aggregato di oggetti, si dirà che essi sono stati *coordinati* l'uno all'altro, quando sia stata fissata fra gli elementi dell'uno e quelli dell'altro una corrispondenza tale che ad ogni oggetto A dell'uno corrisponda un oggetto B dell'altro ed uno soltanto e reciprocamente; cosicchè all'oggetto B del secondo aggregato corrisponderà nel primo l'oggetto A e soltanto esso.

Così, ad esempio, se gli oggetti di un aggregato siano rappresentati dalle lettere A, B, C, D e quelli dell'altro dalle lettere E, G, H, K, questi aggregati potranno coordinarsi fra loro in parecchi modi. Per esempio potremo far corrispondere fra loro (accoppiare in corrispondenza) l'oggetto A coll'oggetto G, l'oggetto B coll'oggetto E, l'oggetto C coll'oggetto H e l'oggetto D coll'oggetto K. I sopraddetti aggregati sono dunque *coordinabili* fra loro. Invece sarebbe impossibile di coordinare l'aggregato A,B, C,D coll'aggregato E,G,H.

L'operazione mediante la quale un aggregato viene coordinato ad un altro si chiamerà *coordinazione*. Il risultato della coordinazione si chiama *coordinamento* o *corrispondenza*, e spesso anche *ordine*.

8. *Se un certo aggregato* $\overline{U}$ *ed un certo aggregato* $\overline{V}$ *sono coordinabili con uno stesso aggregato* $\overline{W}$, *essi sono anche coordinabili fra loro.*

Basterà infatti dichiarare corrispondenti fra loro un elemento di $\overline{U}$ ed un elemento di $\overline{V}$ che abbiano come corrispondente, nelle coordinazioni presupposte, uno stesso elemento di $\overline{W}$.

9. Il modo più semplice di rappresentare una coordinazione si è di scrivere in una linea orizzontale le lettere che rappresentano gli elementi dell'un aggregato ed in un'altra orizzontale quelle rappresentanti gli oggetti dell'altro aggregato, di guisa che gli elementi corrispondenti vengano a disporsi in una stessa verticale. Così, ad esempio, la coordinazione, considerata all'art. 7, fra l'aggregato A, B, C, D e l'aggregato E, G, H, K, si rappresenterà collo schema

A, B, C, D
G, E, H, K.

Se invece si scrivesse:

A, B, C, D
H, E, K, G,

si rappresenterebbe ancora una coordinazione di quegli stessi aggregati, ma una coordinazione diversa dalla precedente. Ciò si potrà esprimere dicendo che il risultato di questa nuova coordi-

nazione, cioè *l'ordine* degli elementi E, G, H, K, è diverso da quello ottenuto mediante la precedente.

10. *Se gli aggregati* $\overline{U}$ e $\overline{V}$ *sono coordinabili, e a ciascuno di essi si aggiunga un nuovo oggetto, i nuovi aggregati così ottenuti sono del pari coordinabili.*

Infatti, se ad $\overline{U}$ si aggiunga l'oggetto A ed a $\overline{V}$ l'oggetto B, per coordinare l'aggregato $\overline{U}$, A all'aggregato $\overline{V}$, B, basterà mantenere fra gli elementi di $\overline{U}$ e quelli di $\overline{V}$ quella stessa corrispondenza che era servita a stabilire la coordinabilità di $\overline{U}$ con $\overline{V}$, e far corrispondere poi al nuovo elemento A il nuovo elemento B.

11. *Se gli aggregati* $\overline{U}$ e $\overline{V}$ *sono coordinabili, gli aggregati che si ottengono togliendo da ciascuno di essi un elemento a piacere, sono del pari coordinabili.*

Siano infatti

$$A, B, C, \dots, H, D, K, \dots, E$$

gli elementi di $\overline{U}$, e si indichino con

$$A', B', C', \dots, H', D', K', \dots, E'$$

gli elementi di $\overline{V}$ che ad essi corrispondono risp. nella coordinazione di $\overline{V}$ ad $\overline{U}$. Se dall'aggregato $\overline{U}$ togliamo per es., l'elemento A e dall'aggregato $\overline{V}$ l'elemento D', vogliamo dimostrare che gli aggregati residui:

$$B, C, \dots, H, D, K, \dots, E \qquad (\alpha)$$

$$A', B', C', \dots, H', K', \dots, E' \qquad (\beta)$$

sono anch'essi fra loro coordinabili.

Invero, per coordinare l'aggregato (α) all'aggregato (β), basta far corrispondere agli elementi

$$B, C, \dots, H, D, K, \dots, E$$

di (α) rispettivamente gli elementi:

$$B', C', \dots, H', A', K', \dots, E'$$

di (β).

12. *Siano* $\overline{U}$ e $\overline{V}$ *aggregati fra loro coordinabili. La coordinazione fra* $\overline{U}$ *e* $\overline{V}$ *si potrà anche effettuare facendo corrispondere ad un elemento qualunque di* $\overline{U}$ *un elemento qualunque di* $\overline{V}$, *poi ad uno qualunque dei restanti elementi di* $\overline{U}$ *uno qualunque dei restanti di* $\overline{V}$ *e così di seguito. In altri termini: appenachè con questo processo di accoppiamento si troveranno esauriti tutti gli elementi dell'un aggregato, si troveranno simultaneamente esauriti anche quelli dell'altro.*

Sia infatti A un elemento qualunque di $\overline{U}$ ed A' quello che gli

si voglia far corrispondere in $\overline{V}$. Tolti da $\overline{U}$ e $\overline{V}$ rispettivamente gli elementi A ed A′, resteranno degli aggregati $\overline{U'}$ e $\overline{V'}$ i quali, secondo il teorema che precede, saranno ancora fra loro coordinabili. Similmente quando da $\overline{U'}$ si tolga un elemento qualunque B e da $\overline{V'}$ l'elemento $\overline{B'}$ che piacerà fargli corrispondere, resteranno gli aggregati $\overline{U''}$ e $\overline{V''}$ che, sempre per lo stesso teorema, saranno ancora fra loro coordinabili. Così procedendo, è chiaro che quando dell'uno o dell'altro aggregato, p. es. dell'aggregato $\overline{U}$, sarà rimasto disponibile un solo elemento, gli elementi che saranno rimasti disponibili in V formar dovranno un aggregato coordinabile a quell'unico elemento; cioè anche di $\overline{V}$ sarà rimasto disponibile un unico elemento, c. d. d.

13. Un aggregato $\overline{V}$ si dirà *parte* di un altro aggregato $\overline{W}$ (o anche che è *contenuto* in W) quando ogni elemento di $\overline{V}$ è anche elemento di $\overline{W}$, ma esiste almeno un elemento di $\overline{W}$ che non è elemento di $\overline{V}$.

Ciò premesso, passiamo a dimostrare il teorema seguente che è d'importanza capitale (come vedremo) nella genesi rigorosa della successione dei numeri.

14. *Se un aggregato $\overline{U}$ è coordinabile ad una parte dell' aggregato $\overline{W}$, gli aggregati $\overline{U}$ e $\overline{W}$ non sono coordinabili fra loro.*

Siano infatti A, B, C, . . . , E gli elementi di $\overline{U}$ e siano risp. A′ B′, C′, . . . , E′ quegli elementi di $\overline{W}$ che per supposto corrispondono uno per uno agli elementi A, B, C, . . . , E di $\overline{U}$ e costituiscono una parte $\overline{V}$ di $\overline{W}$. Ammesso, se è possibile, che $\overline{U}$ e $\overline{W}$ fossero coordinabili, la coordinazione fra $\overline{U}$ e $\overline{W}$ si potrebbe anche effettuare (art. 12) facendo corrispondere agli elementi A, B, C, . . . , E di $\overline{U}$ risp. gli elementi A′, B′, C′, . . . , E′ di $\overline{W}$ il che è manifestamente assurdo, poichè questi ultimi non sono che una parte di $\overline{W}$.

15. Corollario 1.° — *Un aggregato non può essere coordinabile ad una sua parte.*

16. Corollario 2.° — *Si può costruire una successione illimitata di aggregati tali che uno qualunque di essi non sia coordinabile ad alcuno degli altri.*

Basta infatti, a tale oggetto, di considerare uno dopo l'altro gli aggregati:

A   A , B   A , B , C   A , B , C , D , ...

Note ed Esercizi.

1. Si trovino tutte le possibili coordinazioni fra l'aggregato A, B, C e l'aggregato E, G, H.

2. Il passaggio da un coordinamento ad un altro coordinamento si chiama

sostituzione. Così, p. es., se invece dell'ordine rappresentato, come all'art. 9, dallo schema:

A, B, C, D
G, E, H, K,

si assuma l'ordine rappresentato da:

A, B, C, D
H, E, K, G,

si dirà che fra gli elementi dell'aggregato E, G, H, K è avvenuta una sostituzione; e precisamente che l'oggetto G è stato sostituito dall'oggetto H (nella qualità di coordinato di A), l'oggetto H dall'oggetto K, ecc.

La teoria delle sostituzioni è di grande importanza nell'algebra. Noi ne esporremo i principii nel III° capitolo.

3. Dimostrare che se l'aggregato $\overline{Q}$ è parte comune degli aggregati $\overline{M}$ e $\overline{W}$ fra loro coordinabili, ciò che resta di $\overline{M}$ quando se ne toglie $\overline{Q}$ è coordinabile all'aggregato che resta togliendo gli elementi di $\overline{Q}$ da $\overline{W}$.

4. Un insieme, finito od infinito, di oggetti si dice formare una successione, quando fra gli oggetti sia stato stabilito un ordine di precedenza, in modo cioè che: 1°) di due oggetti qualunque dell'insieme sia ben determinato quale viene *prima* dell'altro; 2°) che se un oggetto A è dichiarato precedente a B e B precedente a C, l'oggetto A sia anche dichiarato precedente a C.

5. Riconoscere che *se un aggregato costituito in successione è finito, esiste fra gli oggetti che lo compongono un oggetto* PRIMO (*il quale, cioè, precede tutti gli altri*) *ed un oggetto* ULTIMO (*che è preceduto, cioè, da tutti gli altri*).

6. È però bene di notare esplicitamente, a scanso di equivoco, che l'esistenza, in una successione di oggetti, di un oggetto *primo* e di un oggetto *ultimo*, non è condizione sufficiente perchè la successione stessa sia finita.

Si dimostri ciò mediante un esempio, assumendo p. es. come oggetti un'opportuna successione di punti di una linea retta.

§ 3.° — Definizione di numero naturale — Eguaglianze fra simboli numerici.

17. Dato un aggregato qualsivoglia di oggetti, è senz'altro manifesto che esiste sempre qualche altro aggregato al quale esso è coordinabile. Nel linguaggio dell'aritmetica, questa qualità, propria di ogni aggregato, di essere coordinabile a qualche altro, si chiama *numerosità*.

Si distinguono però diverse specie di numerosità. Tutti gli aggregati che sono coordinabili ad un medesimo aggregato (e quindi anche, secondo quanto si è visto all'articolo 8 del § prec., coordinabili fra loro) si dicono avere *la stessa numerosità*. O piuttosto si dice che essi danno origine ad *un certo numero* ben determinato, nel mentre che gli aggregati dotati di numerosità diversa danno origine ad *altri numeri*.

Come si vede, i numeri non sono che enti astratti, immaginati dalla nostra mente allo scopo di rappresentare certe relazioni che possono intercedere fra aggregati di oggetti. E, cioè, precisamente:

1°) ogni aggregato dà origine ad un numero;
2°) aggregati coordinabili danno origine allo stesso numero;

3°) aggregati non coordinabili danno origine a numeri differenti.

18. Per poter ragionare facilmente sui vari numeri di cui sia stata constatata l'esistenza, si fa uso di certi segni speciali, verbali o grafici, che si chiamano *simboli numerici* (per distinguerli dai simboli che si possono adottare per rappresentare altri enti quali si vogliano) il cui ufficio si è di rappresentare opportunamente i numeri dei quali vogliamo occuparci.

Uno stesso numero può essere rappresentato da simboli di forme molto diverse, secondochè basti di determinarlo completamente (*individuarlo*) oppure si voglia anche al tempo stesso metterne in evidenza la genesi, cioè il modo col quale è stato ottenuto. Così, ad esempio, il numero originato dall'aggregato rappresentato dalla frase: *un lupo, un cavallo ed un fiore,* (destinato a rappresentare non solo questo speciale aggregato, ma al tempo stesso tutti gli aggregati ad esso coordinabili inclusi nel tipo letterale generico A, B, C) è esprimibile, come vedremo, con uno qualunque dei simboli:

$$3\ ,\ 1+2\ ,\ 2+1\ ,\ 1+1+1\ ,\ 3\times 1, \ldots,$$

il primo dei quali è sufficiente ad individuarlo, nel mentre che gli altri, oltrechè individuarlo, ne mettono altresì in evidenza alcune *proprietà aritmetiche.*

19. Questa infinita varietà di modi di poter rappresentare uno stesso numero, nonchè essere oziosa, costituisce la vera essenza dell'aritmetica; giacchè il calcolo aritmetico non è che il complesso di successive sostituzioni di simboli numerici rappresentanti lo stesso numero sotto forme differenti. Queste sostituzioni si rappresentano nella tecnica del calcolo mediante le così dette *uguaglianze.*

Un simbolo numerico, p. es. α, ed un altro simbolo numerico, p. es. β, si dicono *uguali* quando essi rappresentano lo stesso numero, e la loro uguaglianza si esprime colla scrittura:

$$\alpha = \beta.$$

Così, ad esempio, il simbolo numerico 2^2-1 ed il simbolo numerico $2+1$ esprimono, come vedremo, lo stesso numero. Quindi si potrà scrivere:

$$2+1 = 2^2 - 1.$$

Dalla definizione ora data di eguaglianza segue manifestamente che *simboli numerici eguali ad uno stesso simbolo numerico sono anche uguali fra loro.*

20. Poichè i numeri, come vedremo, sono infiniti (formano un aggregato infinito) occorrono, per rappresentarli tutti, infiniti simboli numerici. A questo inconveniente si ripara però componendo tutti gli infiniti simboli numerici mediante alcuni pochi simboli semplici riuniti in certe opportune configurazioni. Questi simboli semplici (o segni unici che voglia dirsi) possono anche rappre-

sentare essi stessi certi numeri speciali, ed in tal caso si chiamano *cifre*. Così, ad esempio, le cifre cosidette *arabiche* sono appunto i simboli numerici adottati nella pratica odierna per rappresentare quei numeri che corrispondono agli aggregati più semplici.

Mediante questi pochi segni grafici (o le parole ad essi corrispondenti) si organizza, come vedremo, la nomenclatura (scritta e parlata) di tutti i numeri. La nomenclatura dei numeri si chiama ordinariamente *numerazione*.

21. Gli aggregati più semplici sono evidentemente quelli rappresentati dalla frase *un oggetto ed un altro oggetto*, p. es. *un lupo ed un cavallo*, ecc. Si riconosce immediatamente che questi aggregati sono tutti coordinabili fra loro, poichè per coordinare l'aggregato A,B all'aggregato C,D, basta far corrispondere all'oggetto A l'oggetto C e all'oggetto B l'oggetto D. Perciò essi danno origine ad un unico numero, espresso, nella nostra lingua, dalla parola *due* e graficamente dalla cifra 2.

Pertanto, d'ora innanzi, in luogo di dire, come eravamo costretti fare sin quì, *un oggetto ed un altro oggetto*, potremo dire più brevemente *due oggetti*.

22. Vengono poi gli aggregati del tipo A, B, C, come p. es. quello rappresentato dalla frase: *una pietra, un fiore ed un cavallo*. Essi sono evidentemente tutti coordinabili fra loro; e non sono mai coordinabili ad alcuno di quelli considerati nell'art. prec. Supponiamo infatti, se è possibile, che l'aggregato A, B, C fosse coordinabile all'aggregato D, E. All'oggetto A dovrebbe corrispondere nella coordinazione l'oggetto D, ovvero l'oggetto E. Ma se ad A corrisponde D, all'oggetto B dovrà corrispondere necessariamente l'altro oggetto E, cosicchè non resterebbe più nel secondo aggregato alcun oggetto disponibile da assumersi come corrispondente di C. Similmente si ragionerà nella ipotesi che ad A volesse farsi corrispondere E. Gli aggregati del tipo A, B, C danno dunque origine ad un numero che è certamente distinto dal numero 2. Questo nuovo numero si rappresenta colla cifra 3 che nella nostra lingua si pronunzia *tre*.

23. Oltre alle cifre 2 e 3 ed alle altre di cui parleremo nel prossimo § e che nascono da aggregati meno semplici, ve ne sono altre due che l'uso universale ha introdotto nell'aritmetica. Sono queste le cifre 0 ed 1 che si pronunziano *zero* ed *uno*. La cifra 0 rappresenta quegli aggregati che non contengono alcun oggetto; la cifra 1 quegli aggregati che si compongono di un unico oggetto, cioè le semplici unità.) Benchè la parola *aggregato* non abbia in questi due casi che un significato fittizio e puramente convenzionale, sta però il fatto che fra *nessun oggetto* ed *un oggetto* non può evidentemente esistere coordinazione e tanto meno può esisterne fra *nessun oggetto* ed un aggregato propriamente detto, come pure sta il fatto che non può esisterne fra *un'unità* ed un aggregato propriamente detto. Nulla quindi impedisce di considerare ciascuna di queste due specie di pseudo-aggregati come originante un numero che si dovrà ritenere differente da quello originato dall'altra e da tutti quelli originati dagli aggregati propriamente detti.

Il considerare lo *zero* e l'*uno* come numeri, al pari del *due*, del *tre*, ecc., presenta poi fin d'ora (oltre ai tanti che appariranno in seguito) il vantaggio di poter enunciare senza alcuna restrizione il principio che *se da un aggregato qualunque si toglie uno dei suoi elementi, ciò che resta è ancora un aggregato.*

24. Abbiamo cercato di far rilevare accuratamente la differenza fra *numero* e *simbolo numerico*. Dobbiamo però aggiungere che, nella pratica dei calcoli, colla parola *numero* si suole intendere indifferentemente così l'una cosa come l'altra. Ciò non è, come è facile di comprendere, di alcun danno. Chè anzi si ha il vantaggio di sostituire in certo modo ad un *ente astratto* (e quindi di origine in gran parte *soggettiva*) qual'è il numero, qualche cosa di *obbiettivo*, cioè il simbolo stesso che lo rappresenta.

Da quest'ultimo punto di vista sembra quindi opportuno di dare la definizione di numero come segue.

Numero è un segno speciale di ricognizione (o distintivo o simbolo che voglia dirsi) verbale o scritto, od anche semplicemente mentale, che si attribuisce a tutti quegli aggregati che sono fra loro coordinabili allo scopo di riconoscerli come tali e distinguerli dagli altri aggregati che non sono ad essi coordinabili.

25. Prima di chiudere questo §, dobbiamo far notare che oltre ai simboli numerici propriamente detti, ciascuno dei quali non rappresenta che un unico numero ben determinato, si usano anche nei calcoli dei simboli, così detti *algebrici*, il cui significato numerico rimane indeterminato, cioè può stabilirsi più o meno arbitrariamente dal lettore.

I simboli algebrici si compongono ordinariamente colle lettere dell'alfabeto latino o greco. Noi ci serviremo di preferenza delle lettere minuscole, avendo già convenuto di poterci servire delle maiuscole per simboleggiare *oggetti qualisivogliano.*

Così, ad esempio, qualunque sia il significato numerico che il lettore vorrà attribuire alle lettere a e b, lo stesso numero rappresentato da a potrà anche essere rappresentato, come si vedrà, dagli infiniti simboli algebrici:

$$a \times 1 \ , \ 2a + (2b - a) - 2b \ , \ \sqrt{a^2} \ , \ \frac{ab}{b} \ , \ \frac{abb}{bb} \ , \ \frac{abbb}{bbb} \ , \ldots .$$

26. Nell'*algebra*, ossia nel calcolo fondato sull'uso metodico dei simboli algebrici, le uguaglianze fra simboli numerici sono quasi sempre complicate con simboli algebrici ed allora prendono anche spesso il nome di *equazioni.*

Le equazioni non sono che delle uguaglianze ipotetiche. Esse differiscono dalle semplici uguaglianze propriamente dette per questo che esse non sono necessariamente vere qualunque sia il significato numerico che voglia attribuirsi alle lettere in esse contenute. Così, ad esempio, le formole:

$$2 + 1 = 2^2 - 1 \ , \ (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

sono, come vedremo, delle vere e proprie uguaglianze, nel mentre che la formola:

$$a + 1 = a^a - 1$$

non è che un'equazione, poichè, se essa è vera per $a=2$, non lo è per $a=3$.

Note ed Esercizi.

Il teorema dell'art. 12 del § 2° rende legittima, per riconoscere se due aggregati abbiano, oppur no, la stessa numerosità, la seguente regola pratica: *si tolga dall' aggregato* $\overline{\overline{U}}$ *uno qualunque dei suoi oggetti è così pure se ne tolga uno qualunque dall' aggregato* $\overline{\overline{V}}$; *si ripeta questa stessa operazione sugli aggregati residuali e poi così di seguito: essi avranno, oppur no, la stessa numerosità, secondochè al momento in cui uno dei due si riduce al niente, si riduca, o non si riduca, al niente anche l'altro.*

Senza il teorema citato, dopo fallito un primo tentativo pratico di coordinazione fatto nel modo indicato, converrebbe ritentare la coordinazione in tutti i modi possibili prima di poter asserire che i due aggregati hanno numerosità differente.

2. Come si vede, la necessità stessa di riconoscere se due aggregati $\overline{\overline{U}}$ e $\overline{\overline{V}}$ abbiano, oppur no, la stessa numerosità, deve in noi risvegliare naturalmente l' idea di tutte le possibili *coppie* che si possono formare combinando un elemento qualunque di $\overline{\overline{U}}$ con un elemento qualunque di $\overline{\overline{V}}$. E questo, per quanto in embrione, il *substratum* combinatorio dell' operazione di moltiplicazione, alla quale noi daremo, per conseguenza, la precedenza su tutte le altre.

3. La *numerosità* è una qualità degli aggregati che si può ben paragonare alle ordinarie qualità fisiche che può presentare un oggetto materiale, p. es. alla *colorazione* (*suono*, ecc...). Come non basta un solo aggregato (oggetto *numeroso*) per dare origine ad un determinato numero, ma ce ne vogliono almeno due fra loro coordinabili, così non basta la vista di un solo oggetto colorato per far nascere l' idea di un determinato colore. Quell' idea verrà bensì astratta dalla nostra mente come *nota comune* di due oggetti aventi quel dato colore, con un'operazione che in fondo altro non è che una coordinazione fra l'aggregato di vibrazioni registrate dal nostro apparecchio visivo impressionato dal primo oggetto e l'aggregato analogo registrato sotto l'impressione del secondo oggetto.

Come si vede, il concetto di numero ha le sue radici nei primi germi del lavoro di astrazione, cioè del raziocinio.

4. Se A, B, C, ..., D, E sono punti dello spazio, la figura formata dalle rette AB, BC, ..., DE, EA che congiungono ogni punto col successivo e l'ultimo col primo è un *poligono chiuso*. I punti A, B,... si chiamano *vertici* e le rette AB, BC,... i *lati* del poligono.

Riconoscere, mediante un' opportuna coordinazione, che il numero dei lati di un poligono chiuso è uguale al numero dei vertici.

5. Dato un aggregato di punti dello spazio, si sono tirate delle rette in modo che ogni punto è stato congiunto con due dei rimanenti. Dimostrare che il numero delle rette tirate è uguale al numero dei punti dati.

Basterà dimostrare che le rette tirate formano un certo numero di poligoni chiusi coi vertici nei punti dati.

6. Ogni individuo umano è condotto naturalmente, per la stessa configurazione del proprio corpo, al concetto del numero *cinque* (mediante la coordinazione fra l'aggregato delle dita della mano destra e l'aggregato delle dita della sinistra; e così pure al concetto del numero *due* a causa della stessa simmetria del corpo (per es. mediante la coordinazione degli arti superiori agli arti inferiori). Non è quindi a farsi meraviglia che questi due numeri abbiano avuto un'importanza tutta speciale nei sistemi di numerazione di quasi tutti i popoli studiati dagli storici.

Si vuole che la cifra V usata dagli Etruschi e dai Romani a simboleggiare il numero cinque, dovesse appunto in origine rappresentare in qualche modo la palma della mano aperta in guisa da metterne egualmente in evidenza tutte le cinque dita.

7. La parola *algebra* deriva dall'arabo *Aldschebr* e precisamente dal titolo (*Aldschebr walmukâbala*) che l'autore arabo *Muhammed ibn Musâ Alchwarizmi* (d'onde la parola *algoritmo*), vissuto nel primo quarto del nono secolo dell'era volgare, pose al primo trattato di algebra. (Circa il significato della parola araba *Aldschebr*, cfr. *Cantor*: *Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik*, 2ª Ediz. Vol. I, Capitolo 33).

§ 4.º — Composizione di aggregati. Prodotto di due numeri.

27. A differenza del simbolo A, B che rappresenta, come si è già detto, i due oggetti A e B in quanto costituiscono un aggregato, il simbolo A·B, o il suo equivalente più semplice AB, rappresenterà ***un unico oggetto*** che dovrà in certo modo considerarsi come generato da A e B, ma non sarà, generalmente parlando, nè l'oggetto A, nè l'oggetto B, nè il loro semplice aggregato.

Quando coi due simboli A e B si forma il simbolo AB, si dice che si fa una *composizione* di simboli. Il simbolo A si dirà il *primo componente*, il simbolo B il *secondo componente*, ed il simbolo AB il *composto* dei due simboli. Alla composizione dei simboli corrisponde naturalmente una composizione degli oggetti da essi rappresentati, secondo una *legge di composizione* da stabilirsi opportunamente a seconda delle questioni che si trattano. Così, p. es., i simboli AB e BA, che rappresenteranno in generale oggetti differenti, potranno in certe questioni rappresentare il medesimo oggetto.

28. Ciò posto, sia $\overline{Q}$ l'aggregato che ha per elementi certi oggetti:

$$A, B, C, \ldots, D, E \qquad (1)$$

il cui numero sia m; sia poi Ω l'aggregato di altri oggetti:

$$P, Q, R, \ldots, S, T \qquad (2)$$

il cui numero sia μ. Indicheremo per brevità con $\overline{Q}\overline{\Omega}$ (e chiameremo *composto* dei due aggregati $\overline{Q}$ ed $\overline{\Omega}$) l'aggregato che ha per elementi tutti i nuovi oggetti rappresentati dai simboli che si possono formare componendo uno qualunque dei simboli (1) con uno qualunque dei simboli (2).

29. Per trovare effettivamente (con procedimento possibilmente *simmetrico* rispetto a $\overline{Q}$ ed $\overline{\Omega}$) tutti gli elementi dell' aggregato $\overline{Q}\overline{\Omega}$, si potrà incominciare dallo scrivere quelle coppie che contengono A ovvero P, cioè:

$$\begin{cases} \qquad AP \\ AQ, AR, \ldots, AS, AT \\ BP, CP, \ldots, DP, EP. \end{cases}$$

Resteranno ancora a scriversi dopo ciò le coppie che nascono dal comporre l' aggregato:

$$B, C, \ldots, D, E$$

coll' aggregato :

$$Q, R, \ldots, S, T,$$

ecc. Questo procedimento mette al tempo stesso in evidenza che l' aggregato $\overline{Q}\overline{\Omega}$ è *finito*.

30. *Il numero degli elementi dell'aggregato* $\overline{Q}\overline{\Omega}$ *testè definito dipende soltanto dai due numeri* m *e* μ.

Si prenda infatti in luogo dell'aggregato (1) un'altro aggregato $\overline{Q'}$ collo stesso numero m di oggetti e quindi ad esso coordinabile:

$$A', B', C', \ldots, D', E' \qquad (1)'$$

e similmente in luogo di (2) un altro aggregato $\overline{\Omega'}$ ad esso coordinabile :

$$P', Q', R', \ldots, S', T' \qquad (2)'$$

e si faccia la composizione di questi due aggregati, p. es. nello stesso modo tenuto nel prec. articolo per costruire l' aggregato $\overline{Q}\overline{\Omega}$. Si otterrà come risultato un aggregato, $\overline{Q'}\overline{\Omega'}$, i cui elementi si possono far corrispondere uno per uno a quelli di $\overline{Q}\overline{\Omega}$, bastando a tale oggetto di far corrispondere ad un elemento qualunque di $\overline{Q}\overline{\Omega}$ quell' elemento di $\overline{Q'}\overline{\Omega'}$ che contiene le stesse lettere munite di apice (p. es. all' elemento BR l' elemento B'R'). I due aggregati $\overline{Q}\overline{\Omega}$ e $\overline{Q'}\overline{\Omega'}$ sono dunque coordinabili ; c. d. d.

31. Il numero degli elementi dell' aggregato $\overline{Q}\overline{\Omega}$, che è, come or si è visto, perfettamente determinato, appenachè sian dati i due numeri m e μ, si chiama il *prodotto* dei due numeri m e μ e si rappresenta in aritmetica col simbolo $m \times \mu$, in algebra col simbolo $m \cdot \mu$ o, più semplicemente con $m\mu$.

La definizione di prodotto si può dunque riassumere come segue : *prodotto di due numeri* m *e* μ *è il numero delle coppie che si possono formare combinando un elemento qualunque di un aggregato di* m *oggetti con un elemento qualunque di un altro aggregato di* μ *oggetti.*

L'operazione mediante la quale da due numeri m e μ si deduce il loro prodotto, si chiama *moltiplicazione*, e i due numeri m e μ si dicono i *fattori* del prodotto.

32. *Il prodotto di due numeri non varia, se si inverte l'ordine dei fattori; cioè:* $m\mu = \mu m$.

Ciò equivale a dire che l' *aggregato* $\overline{Q}\overline{\Omega}$ *è coordinabile all' aggregato* $\overline{\Omega}\overline{Q}$.

Infatti, per coordinare l'aggregato $\overline{Q}\overline{\Omega}$ all' aggregato $\overline{\Omega}\overline{Q}$, basta far corrispondere ad un elemento qualunque di $\overline{Q}\overline{\Omega}$ quell' elemento di $\overline{\Omega}\overline{Q}$ che consta degli stessi componenti presi in ordine inverso, cioè, p. es. all'elemento AR l'elemento RA, all'elemento BR l' elemento RB, ecc.

33. Il prodotto di due fattori eguali ad uno stesso numero si chiama anche il *quadrato* di quel numero. Per esprimere il qua-

drato di un numero a, in luogo di scrivere aa, si scrive quasi sempre a^2.

§ 5.° — Teoremi sulla composizione di più aggregati.

34. Dobbiamo premettere alcune spiegazioni, di indole generale, sull' uso delle *parentesi*, che hanno importanza capitale nella tecnica delle espressioni matematiche.

Supponiamo che nel corpo di una certa espressione simbolica si trovi un simbolo S il quale non sia costituito da un segno unico (lettera o cifra, ecc.) ma da più segni che servano soltanto a fissare, *nel loro insieme*, il significato di S, senza che, considerati isolatamente, debbano avere alcun rapporto diretto cogli altri simboli scritti al di fuori di S. Per mettere ciò in perfetta evidenza ed evitare così ogni possibile equivoco nella interpretazione dell' espressione, si racchiude il simbolo S fra due parentesi, cioè si scrive (S) in luogo di S.

Così, ad esempio, se α, β, γ sono dei numeri, il simbolo $\alpha(\beta\gamma)$ esprimerà che il numero α viene moltiplicato per il prodotto di β e γ; invece il simbolo $(\alpha\beta)\gamma$ esprimerebbe che il prodotto di α e di β viene moltiplicato per γ.

35. Se A, B, C, D, ..., E sono dei simboli qualisivogliano, il simbolo ABCD ... E, non mettendo chiaramente in evidenza il modo col quale esso s'intende essere stato formato mediante successive composizioni, può lasciar dubbio circa il significato dell' ente (aggregato, numero, ecc.) da esso rappresentato. Si è però convenuto, per economia di parentesi, di considerare sempre il simbolo ABCD...E come ottenuto componendo dapprima il simbolo A col simbolo B, poi il simbolo AB così ottenuto col simbolo C, quindi il simbolo (AB)C così ottenuto col simbolo D, e così via.

Così ad esempio, la genesi del simbolo ABCD viene espressa rigorosamente dall' eguaglianza:

$$ABCD = \Big((AB)C\Big)D,$$

cosicchè, se A, B, C, D, anzichè rappresentare degli enti qualisivogliano, rappresentino dei numeri, e si assuma come legge di composizione quella della moltiplicazione aritmetica, si avrà p. es.:

$$2 \times 1 \times 3 \times 1 = \Big((2 \times 1) \times 3\Big) \times 1 = 6.$$

36. Supponiamo ora che i simboli da comporsi rappresentino degli aggregati di simboli (i quali potranno alla lor volta rappresentare degli enti qualisivogliano). Consideriamo, per fissare le idee, quattro aggregati $\overline{O}$, $\overline{\Omega}$, $\overline{U}$, $\overline{V}$. Il simbolo $\overline{O}\overline{\Omega}\overline{U}\overline{V}$ rappresenterà un aggregato ben determinato di simboli composti, cioè quell'aggregato che si ottiene componendo prima l' aggregato $\overline{O}$ coll' aggregato $\overline{\Omega}$, poi l'aggregato $\overline{O}\overline{\Omega}$ così ottenuto con $\overline{U}$ e finalmente l'aggregato $(\overline{O}\overline{\Omega})\overline{U}$ con $\overline{V}$.

Pertanto uno qualunque degli elementi dell'aggregato $\overline{O}\overline{\Omega}\overline{U}\overline{V}$ si otterrà componendo dapprima un elemento qualunque O di $\overline{O}$ con un elemento qualunque Ω di $\overline{\Omega}$. Si otterrà così il simbolo $O\Omega$ che si comporrà con un elemento qualunque U di $\overline{U}$ e darà origine al nuovo simbolo $(O\Omega)U$. Questo si comporrà a sua volta con un elemento qualunque V di $\overline{V}$; e così si sarà generato il simbolo $[(O\Omega)U]V$ che sarà uno qualunque degli elementi di $\overline{O}\overline{\Omega}\overline{U}\overline{V}$. Anche qui però, in luogo di scrivere $[(O\Omega)U]V$, potremo scrivere più brevemente $O\Omega UV$.

Dunque: *se* $\overline{O}, \overline{\Omega}, \overline{U}, \ldots, \overline{V}$ *sono degli aggregati di simboli qualisivogliano, l'aggregato composto* $\overline{O}\overline{\Omega}\overline{U} \ldots \overline{V}$ *ha per suoi elementi tutti i simboli contenuti nel tipo* $O\Omega U \ldots V$, *dove* O *è uno qualunque degli elementi di* $\overline{O}$, Ω *uno qualunque degli elementi di* $\overline{\Omega}$, *e così via.*

37. *Se* $\overline{O'}, \overline{\Omega'}, \overline{U'}, \ldots, \overline{V'}$ *sono gli stessi aggregati* $\overline{O}, \overline{\Omega}, \overline{U}, \ldots, \overline{V}$ *scritti in un altro ordine qualsivoglia, i due aggregati* $\overline{O}\overline{\Omega}\overline{U} \ldots \overline{V}$ *ed* $\overline{O'}\overline{\Omega'}\overline{U'} \ldots \overline{V'}$ *sono fra loro coordinabili.*

Infatti, per coordinare fra loro questi due aggregati, basta far corrispondere ad ogni elemento $O\Omega U \ldots V$ di $\overline{O}\overline{\Omega}\overline{U} \ldots \overline{V}$ quel-l'elemento di $\overline{O'}\overline{\Omega'}\overline{U'} \ldots \overline{V'}$ che è formato dagli stessi simboli $O, \Omega, U, \ldots, V$ composti secondo il nuovo ordine di composizione. Così, ad esempio, considerando solo 4 aggregati, ad ogni elemento $O\Omega UV$ di $\overline{O}\overline{\Omega}\overline{U}\overline{V}$ si farà corrispondere in $\overline{\Omega}\overline{O}\overline{V}\overline{U}$ l'elemento ΩOVU e reciprocamente.

38. *Se* $\overline{O}, \overline{\Omega}, \overline{U}, \ldots, \overline{V}$ *sono certi aggregati ed* $\overline{O'}, \overline{\Omega'}, \overline{U'}, \ldots \overline{W'}$ *certi altri aggregati, l'aggregato composto* $\overline{O}\overline{\Omega}\overline{U} \ldots \overline{V}\overline{O'}\overline{\Omega'}\overline{U'} \ldots \overline{W'}$ *è coordinabile all'aggregato composto*:

$$(\overline{O}\overline{\Omega}\overline{U} \ldots \overline{V})(\overline{O'}\overline{\Omega'}\overline{U'} \ldots \overline{W'}).$$

È infatti manifesto che, per coordinare i due aggregati così composti, basta far corrispondere ad un elemento qualunque:

$$O\Omega U \ldots V\, O'\Omega'U' \ldots W'$$

del primo l'elemento:

$$(O\Omega U \ldots V)(O'\Omega'U' \ldots W')$$

del secondo.

§ 6.° — Teoremi sul prodotto di più numeri. Espressioni monomie.

39. Se $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \delta$ sono dei numeri qualisivogliano, col simbolo $\alpha\beta\gamma \ldots \delta$ (e coi simboli equivalenti $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \ldots \delta$ ed $\alpha \times \beta \times \gamma \times \ldots \times \delta$) s'intende secondo quanto si è già osservato (art. 35), quel numero che nasce dal moltiplicare dapprima α per β, poi il prodotto $\alpha\beta$ per γ, e così via.

40. *Se gli aggregati* $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \ldots, \bar{D}$ *contengono risp.* $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \delta$ *oggetti, l'aggregato composto* $\bar{A}\bar{B}\bar{C} \ldots \bar{D}$ *contiene* $\alpha\beta\gamma \ldots \delta$ *elementi.*

Infatti $\alpha\beta$ rappresenta, per la definizione stessa di prodotto, il numero degli elementi dell'aggregato $\bar{A}\bar{B}$. Per conseguenza $(\alpha\beta)\times\gamma$, cioè il numero $\alpha\beta\gamma$, rappresenterà, per la stessa ragione, il numero degli elementi dell' aggregato $(\bar{A}\bar{B})\bar{C}$, cioè appunto dell' aggregato $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$, e cosi via.

41. *Il prodotto di più numeri è indipendente dall'ordine dei fattori.*

Siano infatti $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \delta$ dei numeri qualisivogliano ed $\alpha', \beta', \gamma', \ldots, \delta'$ gli stessi numeri scritti in altro ordine a piacere. Se $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \ldots, \bar{D}$ sono risp. gli stessi aggregati che hanno dato origine ai numeri $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \delta$ e se $\bar{A'}, \bar{B'}, \bar{C'}, \ldots, \bar{D'}$ sono gli stessi aggregati disposti secondo il nuovo ordine, già sappiamo (art. 37) che i due aggregati composti:

$$\bar{A}\bar{B}\bar{C} \ldots \bar{D} \quad \text{ed} \quad \bar{A'}\bar{B'}\bar{C'} \ldots \bar{D'}$$

sono fra loro coordinabili, e quindi hanno lo stesso numero di elementi. Ma il numero dei loro elementi è dato risp. (art. 40) da:

$$\alpha\beta\gamma \ldots \delta \quad \text{ed} \quad \alpha'\beta'\gamma' \ldots \delta'.$$

È dunque $\alpha\beta\gamma \ldots \delta = \alpha'\beta'\gamma' \ldots \delta'$, c. d. d.

Il teorema ora dimostrato si suole enunciare dicendo che *la moltiplicazione è un'operazione che gode della proprietà commutativa.*

42. *Se* a, b, c, ..., e *ed* $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \delta$ *sono dei numeri qualisivogliano, il loro prodotto coincide col prodotto che si ottiene moltiplicando il prodotto* abc ... e *pel prodotto* $\alpha\beta\gamma \ldots \delta$; il che è significato dalla scrittura:

$$abc \ldots e\alpha\beta\gamma \ldots \delta = (abc \ldots e)(\alpha\beta\gamma \ldots \delta).$$

Questo teorema, conosciuto anche come *proprietà associativa* della moltiplicazione, discende naturalmente dal teorema dell'art. 38.

Siano infatti rispettivamente:

$$\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \ldots, \bar{E} \qquad \bar{A'}, \bar{B'}, \bar{C'}, \ldots, \bar{D'}$$

gli aggregati che hanno dato origine ai numeri:

$$a, b, c, \ldots, e \qquad \alpha, \beta, \gamma, \ldots, \delta.$$

Poichè, pel detto articolo, l'aggregato composto $\bar{A}\bar{B}\bar{C} \ldots \bar{E}\bar{A'}\bar{B'}\bar{C'} \ldots \bar{D'}$ è coordinabile all'aggregato $(\bar{A}\bar{B}\bar{C} \ldots \bar{E})(\bar{A'}\bar{B'}\bar{C'} \ldots \bar{D'})$, il numero originato dal primo, che è appunto (art. 40) il prodotto $abc \ldots e\alpha\beta\gamma \ldots \delta$, coincider deve col numero originato dal secondo, cioè, per la definizione di prodotto, col prodotto del numero originato da $(\bar{A}\bar{B}\bar{C} \ldots \bar{E})$ pel numero originato da $(\bar{A'}\bar{B'}\bar{C'} \ldots \bar{D'})$. Ma il numero originato da $(\bar{A}\bar{B}\bar{C} \ldots \bar{E})$ è $abc \ldots e$, e quello originato da $(\bar{A'}\bar{B'}\bar{C'} \ldots \bar{D'})$ è $\alpha\beta\gamma \ldots \delta$; quindi, ecc., c. d. d.

43. Dal teorema ora dimostrato segue manifestamente che:

$$abc\ldots e\alpha\beta\gamma\ldots\delta a'b'\ldots g' = ab\ldots e(\alpha\beta\ldots\delta)a'b'\ldots g',$$

ecc. ecc.

44. Se m è il numero dei fattori che compongono il prodotto $\alpha\beta\gamma\ldots\delta$ e se i numeri α, β, γ, ..., δ sono tutti eguali ad uno stesso numero a, il prodotto stesso si chiama la *potenza* m^{esima} del numero a; e in luogo di scrivere $aaa\ldots a$, si scrive più brevemente a^m.

Dei due numeri a ed m che figurano nella potenza a^m, il primo si chiama la *base* e il secondo l'*esponente* della potenza stessa.

45. Abbiamo già notato che la potenza seconda a^2 di un numero a si chiama anche il quadrato di a. Aggiungiamo che la terza potenza a^3 di a si chiama anche il *cubo* di a.

46. *Se* a, b, m *sono dei numeri naturali qualisivogliano, si ha:*

$$a^m b^m = (ab)^m.$$

Lasciamo al lettore la dimostrazione di quest'eguaglianza, come conseguenza della proprietà commutativa ed associativa della moltiplicazione.

47. *Ogni numero deducibile, mediante operazioni di moltiplicazione, da certi numeri* a, b, c, ..., d *è rappresentabile sotto la forma*:

$$a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots d^\delta, \tag{1}$$

essendo α, β, γ, ..., δ *degli esponenti da determinarsi opportunamente.*

In questo enunciato si deve intendere che gli esponenti α, β, γ, ..., δ possano anche prendere il valore zero; nel qual caso colla corrispondente potenza s'intenderà l'unità. Così ad esempio in luogo di scrivere $a^3c^2d^3$ si può anche scrivere $a^3b^0c^2d^3$. La *convenzione* $b^0 = 1$ s' impone del resto anche per altre ragioni che appariranno più tardi.

Infatti, un prodotto di un numero qualunque di fattori, scelti fra i numeri a, b, c, ..., d, si può sempre ridurre, mediante un opportuno scambio di fattori, alla forma (1); e il prodotto di due o più prodotti della forma (1) è del pari evidentemente riducibile alla forma (1).

48. Le espressioni della forma (1) si dicono *monomii*. Dei numeri a, b, c, ..., d alcuni sono perfettamente individuati e si possono surrogare con cifre, altri restano arbitrarii. Questi ultimi rappresentano spesso, nelle questioni algebriche, le così dette *variabili*, cioè dei numeri che in una stessa questione si fanno variare più o meno arbitrariamente. In tal caso essi si designano di preferenza colle lettere x, y, z, ξ, u, v, ... I fattori non variabili prendono invece nell'espressione monomia il nome di *coefficienti;* e il loro prodotto si chiama il *coefficiente* dell' espressione monomia.

Così, ad esempio, nei monomii con tre variabili x, y, z:

$$3xyz \ , \ 4x^2y^3z \ , \ ax^2y^2z^2 \ , \ 2ax^3y^2z \, ,$$

le cifre 2, 3, 4 e il numero, da fissarsi ad arbitrio, a fungono appunto da coefficienti e come tali si premettono, secondo l'uso generale, alle variabili. Per il quarto di questi monomii, in luogo di dire che ha i coefficienti 2 ed a, si dirà anche più semplicemente che *ha per coefficiente* $2a$.

§ 7.° — **Riunione di aggregati — Somma di due numeri.**

49. *Aggiungere* ad un'aggregato $\overline{U}$ un altro aggregato $\overline{V}$, di oggetti distinti da quelli di $\overline{U}$, o meglio: *riunire* gli aggregati $\overline{U}$ e $\overline{V}$ significa formare un nuovo aggregato $\overline{W}$ che abbia per elementi tutti gli elementi di $\overline{U}$ e tutti gli elementi di $\overline{V}$, e non abbia altri elementi all' infuori di questi.

L'aggregato così ottenuto si designerà col simbolo $\overline{U}\, ,\, \overline{V}$ (o anche con $\overline{U}+\overline{V}$) e si dirà la *riunione dei due aggregati*, onde si potrà scrivere:

$$\overline{W} = \overline{U}\, ,\overline{V} = \overline{V}\, ,\overline{U}.$$

L' aggregato $\overline{W}$ sarà evidentemente finito, come lo erano $\overline{U}$ e $\overline{V}$, poichè, per enunciare tutti i suoi elementi, basterà enunciare prima tutti quelli di $\overline{U}$ e poi tutti quelli di $\overline{V}$, o viceversa.

50. *Se l' aggregato* $\overline{A}$ *è coordinabile all' aggregato* $\overline{A}'$ *e l'aggregato* $\overline{B}$ *a* $\overline{B}'$, *l'aggregato* $\overline{A}\, ,\overline{B}$ *è coordinabile all' aggregato* $\overline{A}'\, ,\overline{B}'$.

Per coordinare l'aggregato $\overline{A}\, ,\, \overline{B}$ all'aggregato $\overline{A}'\, ,\overline{B}'$, basterà infatti di far corrispondere ad ogni elemento di $\overline{A}\, ,\, \overline{B}$ che sia elemento di $\overline{A}$, quello stesso elemento che già gli corrispondeva nella coordinazione di $\overline{A}$ ad $\overline{A}'$, e similmente ad ogni elemento di $\overline{B}$ quello che gli corrispondeva nella coordinazione di $\overline{B}$ a $\overline{B}'$.

51. Ciò premesso, ci è lecito di dare la seguente definizione: *se* α *e* β *sono due numeri qualunque, si chiamerà* SOMMA *di* α *e di* β, *e si indicherà con* $\alpha+\beta$ (*che si legge* α *più* β) *il numero originato dall'aggregato che si ottiene aggiungendo all'aggregato di oggetti che ha originato* α, *l'aggregato che ha originato* β.

Questa definizione è legittima, perchè, se invece dei due aggregati $\overline{A}$ e $\overline{B}$, risp. di numerosità α e β, se ne prendano altri due $\overline{A}'$ e $\overline{B}'$ che danno origine a questi stessi numeri, il numero originato da $\overline{A}\, ,\, \overline{B}$ sarà quello stesso originato da $\overline{A}'\, ,\overline{B}'$ essendo, per l' art. prec., gli aggregati $\overline{A}\, ,\, \overline{B}$ ed $\overline{A}'\, ,\overline{B}'$ fra loro coordinabili.

52. L'operazione mediante la quale, dati due numeri α e β, si ottiene la loro somma $\alpha+\beta$, si chiama *addizione*.

È chiaro che $\alpha+\beta=\beta+\alpha$, poichè l'aggregato $\overline{A}, \overline{B}$, non differisce dall'aggregato $\overline{B}, \overline{A}$.

53. Se $\alpha+\gamma=\beta+\gamma$, è anche $\alpha=\beta$.

Siano infatti $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$ gli aggregati che hanno originati risp. i numeri α, β, γ. Poichè l'aggregato $\overline{A}, \overline{C}$ è, per supposto, coordinabile all'aggregato $\overline{B}, \overline{C}$, togliendo da entrambi successivamente gli elementi di $\overline{C}$, gli aggregati residui $\overline{A}, \overline{B}$ riusciranno (art. 11) fra loro coordinabili. È dunque $\alpha=\beta$; c. d. d.

54. *Il prodotto di due potenze di uno stesso numero* a *è uguale ad un' unica potenza di* a *che ha per esponente la somma degli esponenti delle due prime.*

Infatti la proprietà associativa della moltiplicazione (art. 42) espressa dalla formola

$$(abc \dots e)(\alpha\beta \dots \gamma\delta) = abc \dots e\alpha\beta \dots \gamma\delta,$$

nel caso particolare in cui $a, b, c, \dots, e$ siano m numeri tutti eguali ad a ed $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \delta$ siano n numeri pure uguali allo stesso a, prende evidentemente la forma:

$$a^m a^n = a^{m+n}.$$

§ 8.° — Somma di più numeri — Espressioni polinomie.

55. Se all'aggregato $\overline{U}, \overline{V}$ si aggiunge un nuovo aggregato $\overline{W}$, si ottiene come risultato della riunione un aggregato che si dovrebbe rappresentare col simbolo $(\overline{U}, \overline{V}), \overline{W}$, ma che si rappresenterà più brevemente con $\overline{U}, \overline{V}, \overline{W}$ e si chiamerà la riunione di $\overline{U}, \overline{V}$ e $\overline{W}$; e così via.

56. *La riunione di diversi aggregati è indipendente dall'ordine secondo cui gli aggregati stessi vengono aggiunti successivamente.*

Così, ad esempio:

$$\overline{U}, \overline{V}, \overline{W}, \overline{\Omega} = \overline{V}, \overline{\Omega}, \overline{U}, \overline{W}.$$

È chiaro infatti che ogni elemento della prima riunione si trova come elemento anche nella seconda, e viceversa.

57. *La riunione di diversi aggregati*:

$$\overline{U}, \overline{V}, \dots, \overline{\Omega}, \overline{U'}, \overline{V'}, \dots, \overline{W'}$$

si può anche ottenere aggiungendo alla riunione $\overline{U}, \overline{V}, \dots, \overline{\Omega}$ *la riunione* $\overline{U'}, \overline{V'}, \dots, \overline{W'}$. *Cioè*:

$$\overline{U}, \overline{V}, \dots, \overline{\Omega}, \overline{U'}, \overline{V'}, \dots, \overline{W'} = (\overline{U}, \overline{V}, \dots, \overline{\Omega}), (\overline{U'}, \overline{V'}, \dots, \overline{W'}).$$

È chiaro infatti, anche qui, che ogni elemento dell' aggregato di destra è anche elemento dell'aggregato di sinistra e viceversa.

58. Se α, β, γ, ..., δ sono dei numeri qualisivogliano, col simbolo $\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\delta$ s'intenderà (analogamente alla definizione data sopra del simbolo $\overline{U}$, $\overline{V}$, $\overline{W}$, ..., $\overline{\Omega}$) il numero che si ottiene sommando dapprima α con β, poi il risultato ottenuto con γ, e così via.

59. *L'operazione di addizione gode della proprietà commutativa.* Cioè:

$$\alpha+\beta=\beta+\alpha\,,\quad \alpha+\beta+\gamma=\alpha+\gamma+\beta=\beta+\gamma+\alpha=\ldots;$$

e in generale: la somma di più numeri è indipendente dall'ordine secondo il quale si sommano gli addendi.

È questa una conseguenza manifesta dell'art. 56.

60. *L'operazione di addizione gode anche della proprietà associativa.* Cioè, se α, β, γ, ..., δ, α', β', γ', ..., ε' sono dei numeri qualisivogliano, si ha:

$$\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\delta+\alpha'+\beta'+\gamma'+\ldots+\varepsilon'$$
$$=(\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\delta)+(\alpha'+\beta'+\gamma'+\ldots+\delta').$$

Questa è, a sua volta, una conseguenza immediata dell'art. 57.

61. *Se* A, B, C, ..., E *sono gli elementi di un aggregato di oggetti e se nell'espressione aggregativa*:

$$A\,,B\,,C,\ldots,E,$$

si ponga in luogo di ogni lettera la cifra 1 *ed in luogo di ogni virgola il segno* +, *il simbolo numerico* $1+1+1+\ldots+1$ *così ottenuto rappresenta il numero originato da quell'aggregato* (*la numerosità dell'aggregato*).

Infatti, poichè $1+1$ è la numerosità dell'aggregato A,B, sarà $(1+1)+1$, cioè $1+1+1$, la numerosità dell'aggregato (A, B), C, cioè dell'aggregato A, B, C. Similmente, poichè $1+1+1$ è la numerosità dell'aggregato A, B, C, la numerosità di A, B, C, D, cioè di (A, B, C), D, sarà $(1+1+1)+1$, ossia, che è la stessa cosa, $1+1+1+1$; e così via.

62. *Il prodotto di due numeri qualunque* m *e* μ *è uguale alla somma di* μ *numeri tutti eguali ad* m.

Infatti, per iscrivere tutte le coppie che si possono formare (cfr. art. 31) combinando un elemento qualunque di un aggregato $A_1, A_2, \ldots, A_m$ di m oggetti con un elemento qualunque di un aggregato $B_1, B_2, \ldots, B_\mu$ di μ oggetti, basterà scrivere prima tutte le coppie che contengono B_1 (cioè un aggregato di m oggetti), poi tutte quelle che contengono B_2 (cioè un altro aggregato di m oggetti), e così via.

63. Corollario. — *La somma di* μ *numeri eguali ad* m *è uguale alla somma di* m *numeri eguali a* μ.

Sappiamo infatti (art. 32) che $m\mu=\mu m$.

64. Quando il prodotto $m\mu$ si considera sotto il punto di vista corrispondente all'enunciato dell'art. 62, dei due fattori m e μ che lo compongono, il primo si chiama *moltiplicando* ed il secondo *moltiplicatore*.

Secondo lo stesso punto di vista i prodotti $2m$, $3m$, ... si chiamano anche risp. il *doppio di* m, il *triplo di* m, ecc.

65. La somma di n numeri arbitrari si può rappresentare colla scrittura:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

alla quale vengono spesso sostituite le notazioni abbreviate:

$$\sum a, \quad \text{o meglio:} \quad \sum_{i=1}^{i=n} a_i$$

per mezzo del segno Σ, che si chiama simbolo *sommatorio*, di cui si fa in analisi uso frequentissimo.

66. La somma di più monomii (art. 48) si chiama *polinomio*. Il polinomio si distingue poi in *binomio*, *trinomio*, *quadrinomio*, ecc., a seconda che esso sia la somma di due soli monomii, ovvero di tre monomii, ecc. I singoli monomii, di cui il polinomio è la somma, si dicono poi *termini* del polinomio.

Ogni polinomio di $n+1$ termini, deducibile dai numeri $a, b, c, \ldots, d$ (cfr. art. 47) sarà evidentemente della forma:

$$a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots d^\delta + a^{\alpha'} b^{\beta'} c^{\gamma'} \ldots d^{\delta'} + \ldots + a^{\alpha^{(n)}} b^{\beta^{(n)}} \ldots d^{\delta^{(n)}}, \qquad (1)$$

ben inteso colla convenzione (cfr. art. 47), che si manterrà sempre d'ora innanzi, che *per potenza, con esponente uguale a zero, di un numero qualunque s'intenda l'unità.*

67. Supponiamo, per fissare le idee, che dei numeri $a, b, c, \ldots, d$, dai quali è stata dedotta l'espressione polinomia, soltanto due, che indicheremo con x ed y siano *variabili* (cfr. art. 48). Tutti gli altri numeri, siano essi rappresentati da cifre o da lettere, dovendo riguardarsi come *costanti*, è chiaro che anche i loro prodotti e potenze saranno da riguardarsi come tali. Pertanto all' espressione polinomia (1) si potrà anche dare la forma più semplice:

$$\sum a \cdot x^\alpha y^\beta, \quad \text{o meglio} \quad \sum_{a,\alpha,\beta} a \cdot x^\alpha y^\beta$$

mettendo in evidenza, a destra del segno sommatorio quello che si suol chiamare *termine generale*, o *generico*, del polinomio. Il segno Σ premesso al termine generale significa che s'intende doversi fare la somma di più termini i quali si deducono tutti dal tipo generico $a \cdot x^\alpha y^\beta$ attribuendo diversi valori al *coefficiente* costante a ed agli esponenti α e β. Invece le lettere x, y rappresentano in tutti i termini gli stessi numeri.

§ 9.° — Proprietà distributiva della moltiplicazione. Riduzione dei polinomii.

68. Se m, n, α sono numeri qualunque, si ha:

$$\alpha(m+n) = \alpha m + \alpha n \ , \ (m+n)\alpha = m\alpha + n\alpha \, , \qquad (1)$$

ed in ciò consiste la così detta *proprietà distributiva* della moltiplicazione.

Infatti, il prodotto $\alpha(m+n)$ è uguale (art. 62) alla somma di $m+n$ numeri tutti eguali ad α. Ora per fare questa somma, si potrà (art. 60) fare separatamente la somma dei primi m numeri, che è uguale ad αm, poi quella degli altri n numeri che è αn, e per ultimo sommare i risultati, il che dà appunto $\alpha m + \alpha n$.

La seconda delle uguaglianze (1) si deduce immediatamente dalla prima ricordando (art. 32) che:

$$(m+n)\alpha = \alpha(m+n) \ , \ m\alpha = \alpha m \ , \ n\alpha = \alpha n.$$

69. *Se* m, n, ..., r, s, t *sono numeri qualunque, si ha:*

$$\alpha(\mathrm{m+n+ \dots +r+s+t}) = \alpha\mathrm{m} + \alpha\mathrm{n} + \dots + \alpha\mathrm{r} + \alpha\mathrm{s} + \alpha\mathrm{t}.$$

e similmente:

$$(\mathrm{m+n+ \dots +r+s+t})\alpha = \mathrm{m}\alpha + \mathrm{n}\alpha + \dots + \mathrm{r}\alpha + \mathrm{s}\alpha + \mathrm{t}\alpha.$$

Si può scrivere infatti:

$$\alpha(m+n+ \dots +r+s+t) = \alpha[(m+n+ \dots +r+s)+t]$$

e quindi per l' art. prec.:

$$\alpha(m+n+ \dots +r+s+t) = \alpha(m+n+ \dots +r+s) + \alpha t \, ,$$

e similmente:

$$\alpha(m+n+ \dots +r+s) = \alpha(m+n+ \dots +r) + \alpha s,$$

onde:

$$\alpha(m+n+ \dots +r+s+t) = \alpha(m+n+ \dots +r) + \alpha s + \alpha t,$$

ecc. ecc.

70. *Se* a, b, c, ..., d *ed* α, β, γ, ..., ε *sono numeri qualunque, il prodotto delle due somme* a + b + c + . . + d *ed* $\alpha+\beta+\gamma+\dots+\varepsilon$ *è uguale alla somma di tutti i prodotti che nascono dal moltiplicare uno qualunque dei numeri* a, b, c, ..., d *per uno qualunque dei numeri* α, β, γ, ..., ε.

L' articolo precedente ci dà infatti primieramente:

$$\begin{aligned}(a+b+c+\dots+d)(\alpha+\beta+\gamma+\dots+\varepsilon) = {} & (a+b+c+\dots+d)\alpha \\ & + (a+b+c+\dots+d)\beta \\ & + \dots\dots\dots \\ & + (a+b+c+\dots+d)\varepsilon.\end{aligned}$$

Ma d'altra parte esso ci dà poi:

$$(a + b + c + \dots + d)\alpha = a\alpha + b\alpha + \dots + d\alpha$$
$$(a + b + c + \dots + d)\beta = a\beta + b\beta + \dots + d\beta$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$(a + b + c + \dots + d)\varepsilon = a\varepsilon + b\varepsilon + \dots + d\varepsilon\,,$$

onde si conclude:

$$\begin{aligned}(a + b + c + \dots + d)(\alpha + \beta + \gamma + \dots + \varepsilon) = {} & a\alpha + b\alpha + c\alpha + \dots + d\alpha \\ & + a\beta + b\beta + c\beta + \dots + d\beta \\ & + \dots\dots\dots\dots \\ & + a\varepsilon + b\varepsilon + c\varepsilon + \dots + d\varepsilon,\end{aligned}$$

c. d. d.

71. Rammentando la definizione (art. 28) di composto di due aggregati, si vede che il teorema ora dimostrato si può anche enunciare come segue: *se si compone l'aggregato dei simboli* a, b, c, ..., d *coll'aggregato* α, β, γ, ..., ε *e nell'aggregato risultante si sostituiscono alle virgole i segni* +, *il simbolo così ottenuto rappresenta il prodotto della somma di numeri* a + b + c + ... + d *per la somma* $\alpha + \beta + \gamma + \dots + \varepsilon$.

72. Quest' ultima osservazione mette anche in evidenza che *se* m *è il numero dei termini* a, b, c, ..., d *ed* n *il numero dei termini* α, β, γ, ..., ε, *il numero dei termini del prodotto* (a+b+c+ ... +d) $(\alpha + \beta + \gamma + \dots + \varepsilon)$, *sviluppato come all'art.* 70, *è* mn.

Invero il prodotto mn altro non è, per la definizione stessa di prodotto (art. 31), che il numero delle coppie $a\alpha$, $b\alpha$, , ..., $a\beta$, $b\beta$, ... che si possono formare combinando uno qualunque degli elementi dell'aggregato a, b, c, ..., d con uno qualunque degli elementi dell'aggregato α, β, γ, ..., ε.

73. Il teorema dell' art. 70 si può anche esprimere brevemente colla formola:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_m)(b_1 + b_2 + \dots + b_n) = \sum_{j=1}^{j=n} \sum_{i=1}^{i=m} a_i b_j.$$

Invero il segno sommatorio:

$$\sum_{i=1}^{i=n}$$

premesso ad una qualsivoglia espressione simbolica contenente il così detto *indice variabile* i, significa, analogamente a quanto si è già visto all'art. 65, che nell'espressione simbolica si devono sostituire successivamente in luogo di i i numeri 1, 2, ..., n e poi

scrivere la somma dei risultati così ottenuti. Si ha dunque:

$$\sum_{i=1}^{i=m} a_i b_j = a_1 b_j + a_2 b_j + \dots + a_n b_j ,$$

onde:

$$\sum_{j=1}^{j=n}\left(\sum_{i=1}^{i=m} a_i b_j\right) = \sum_{j=1}^{j=m}\left(a_1 b_j + a_2 b_j + \dots + a_m b_j\right),$$

dove ora il secondo membro esprimerà, secondo la stessa convenzione testè enunciata, ciò che si ottiene sostituendo nell'espressione:

$$a_1 b_j + a_2 b_j + \dots + a_m b_j$$

in luogo di j successivamente i numeri $1, 2, \dots, n$ e sommando i risultati. Ma in questo modo si ritrova appunto l'espressione stessa:

$$\begin{aligned} & a_1 b_1 + a_2 b_1 + \dots + a_m b_1 \\ + & a_1 b_2 + a_2 b_2 + \dots + a_m b_2 \\ + & \dots \dots \dots \dots \\ + & a_1 b_n + a_2 b_n + \dots + a_m b_n \end{aligned}$$

che si ottiene applicando al prodotto:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_m)(b_1 + b_2 + \dots + b_n)$$

la regola dell'art. 70.

74. Poichè:

$$(a_1+a_2+\dots+a_m)(b_1+b_2+\dots b_n)=(b_1+b_2+\dots+b_n)(a_1+a_2+\dots+a_m),$$

è chiaro che si ha l'uguaglianza:

$$\sum_{j=1}^{j=n}\sum_{i=1}^{i=m} a_i b_j = \sum_{i=1}^{i=m}\sum_{j=1}^{j=n} a_i b_j .$$

75. Esempio 1.° — La regola dell'art. 70 ci dà:

$$(a + b)(\alpha + \beta) = a\alpha + b\alpha + a\beta + b\beta .$$

Se dunque prendiamo, come caso particolare: $\alpha = a$, $\beta = b$, si ha:

$$(a + b)(a + b) = aa + ba + ab + bb,$$

ossia anche, poichè $ab + ab = 2ab$ (cfr. art. 62):

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 ,$$

cioè: *il quadrato della somma di due numeri è uguale alla somma dei loro quadrati e del loro doppio prodotto.*

76. Esempio 2.° — *Il quadrato della somma di più numeri è uguale alla somma dei loro quadrati e dei doppi prodotti che si*

possono formare accoppiando i numeri stessi in tutti i modi possibili.

Si ha infatti (art. 73):

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 = \sum_{j=1}^{j=n} \sum_{i=1}^{i=n} a_i a_j ,$$

dove il secondo membro è la somma di tutte le espressioni che nascono da $a_i a_j$ determinando i ed j in tutti i modi possibili. Se ora si prenda $i = j$, si hanno appunto i quadrati $a_1^2, a_2^2, \dots$; se si prenda invece $i \gtrless j$, si avranno i prodotti delle $a_1, a_2, \dots$ moltiplicate due a due, ciascuno ripetuto due volte poichè $a_i a_j = a_j a_i$.

Per esempio, per $n = 4$, si ha lo sviluppo:

$$(a + b + c + d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

$$+ 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd.$$

77. Dopo quanto si è visto dianzi, è chiaro che si ha poi:

$$(a_1 + \dots + a_m)(b_1 + \dots + b_n)(c_1 + \dots + c_r) = \left(\sum_{j=1}^{j=n} \sum_{i=1}^{i=m} a_i b_j\right)(c_1 + \dots + c_r)$$

$$= \sum_{h=1}^{h=r} \sum_{j=1}^{j=n} \sum_{i=1}^{i=m} a_i b_j c_h ,$$

e così via.

Il numero dei termini dello sviluppo così accennato sarà *mnr*.

In generale, si conclude che: *il prodotto*

$$(\mathrm{a}_1 + \dots + \mathrm{a}_m)(\mathrm{b}_1 + \dots + \mathrm{b}_n)(\mathrm{c}_1 + \dots + \mathrm{c}_r) \dots (\mathrm{d}_1 + \dots \mathrm{d}_s)$$

di più polinomii, sviluppato secondo la legge distributiva, si compone di mnr ... s *termini che si deducono dal termine generico* $\mathrm{a}_i \mathrm{b}_j \mathrm{c}_h \dots \mathrm{d}_k$ *dando agli indici* i, j, h, ... k *tutti i significati di cui sono suscettibili. Questi termini si possono anche riguardare come gli elementi dell'aggregato che nascerebbe dal comporre* (cfr. art. 36) *l'aggregato dei simboli* $\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \dots, \mathrm{a}_m$ *coll'aggregato* $\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \dots, \mathrm{b}_n$, *l'aggregato così ottenuto coll'aggregato dei simboli* $\mathrm{c}_1, \mathrm{c}_2, \dots, \mathrm{c}_r$, e così via.

78. Esempio 3.° — *Il cubo della somma di più numeri è uguale alla somma dei loro cubi, dei tripli prodotti di uno qualunque di essi pel quadrato di un altro qualunque e dei prodotti, presi ciascuno sei volte, dei numeri stessi moltiplicati tre a tre.*

È infatti:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^3 = \sum_{h=1}^{h=3} \sum_{j=1}^{j=3} \sum_{i=1}^{i=3} a_i a_j a_h$$

e, dei termini dello sviluppo, quelli pei quali $i = j = h$, si presentano ciascuno una sola volta dando origine al cubo a_i^3; di quelli

con due soli indici eguali, ciascuno si presenta tre volte, poichè: $a_i a_i a_h = a_i a_h a_i = a_h a_i a_i$, dando origine al termine $3a_i^2 a_h$; quelli con tre indici distinti si presentano ciascuno sei volte, poichè:

$$a_i a_j a_h = a_j a_h a_i = a_h a_i a_j = a_j a_i a_h = a_i a_h a_j = a_h a_j a_i,$$

e danno quindi dei termini della forma $6a_i a_j a_h$.

Si ha così, per esempio, per $n = 3$:

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 6abc$$

$$+ 3a^2 b + 3a^2 c + 3b^2 a + 3b^2 c + 3c^2 a + 3c^2 b.$$

79. Chiuderemo questo paragrafo colla nozione di *riduzione* dei polinomii.

In un polinomio, contenente (cfr. art. 67) certe variabili $x, y, \ldots, z$, si dicono *simili* quei termini nei quali le variabili si trovano elevate agli stessi esponenti. Ora è chiaro che alla somma di tutti i termini simili:

$$a \cdot x^\alpha y^\beta \ldots z^\gamma \quad , \quad b \cdot x^\alpha y^\beta \ldots z^\gamma \quad , \quad \ldots \quad , \quad d \cdot x^\alpha y^\beta \ldots z^\gamma$$

contenenti le stesse potenze $x^\alpha, y^\beta, \ldots, z^\gamma$ si può surrogare un unico termine:

$$\mathrm{A} \cdot x^\alpha y^\beta \ldots z^\gamma$$

che abbia per coefficiente la somma dei coefficienti di quei singoli termini, cioè:

$$\mathrm{A} = a + b + \ldots + d.$$

Quest'operazione si chiama *riduzione*. Per mezzo di cosiffatte riduzioni si potrà evidentemente sempre ottenere che il polinomio non contenga più termini simili, ed allora esso si dirà *ridotto* alla sua più semplice espressione *rispetto alle variabili* x, y, ..., z.

80. Così, ad esempio, la forma ridotta del polinomio:

$$1 + 3x^2 yz + 4xy^3 + 5x^2 zy + 7xy^3 + 2xyz + 4$$

sarà:

$$(3 + 5)x^2 yz + (4 + 7)xy^3 + 2xyz + (1 + 4),$$

cioè:

$$8x^2 yz + 11xy^3 + 2xyz + 5,$$

e quella del polinomio:

$$ax^2 yz + 3bxy^3 + a^2 bx^2 yz + cxy^3 + 2xyz + 2$$

sarà:

$$(a + a^2 b)x^2 yz + (3b + c)xy^3 + 2xyz + 2.$$

§ 10.° — Successione naturale dei numeri. Definizione di maggiore e minore.

81. Da quanto si è visto all' art. 16 del § 2° segue manifestamente, dopo la definizione da noi data dei numeri naturali, che: *se* A, B, C, D, . . . *sono degli oggetti qualisivogliano, i numeri originati dagli aggregati*:

(I) A A, B A, B, C A, B, C, D. . . .

che si rappresenteranno risp. coi simboli numerici:

1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 , ...

sono tutti distinti fra loro.

La progressione illimitata di numeri così generata prende il nome di *successione naturale* dei numeri naturali.

82. È appena necessario far rilevare che *non esistono altri numeri naturali oltre quelli compresi nella successione naturale*. Invero ogni numero è originato da un aggregato di oggetti, ed ogni aggregato è evidentemente coordinabile ad uno degli aggregati (I).

83. Secondochè un numero α si presenta, nella successione naturale, prima o dopo di un altro numero β, si dice rispettivamente che esso è *minore* ovvero *maggiore* di β, scrivendosi nel primo caso $\alpha < \beta$ e nel secondo $\alpha > \beta$. Dalle due *diseguaglianze* $\alpha < \beta$ e $\beta < \gamma$ segue evidentemente $\alpha < \gamma$.

84. *Se α è un numero qualunque, il numero dei numeri della successione naturale che non sono maggiori di α, è lo stesso numero α.*

Sia infatti A, B, C, ... , E, G quello degli aggregati (I) che da origine al numero α. I numeri non maggiori di α essendo quelli originati dagli aggregati:

A A,B A,B,C . . . A,B,C, . . , E A,B,C, . . , E,G,

il loro aggregato è evidentemente coordinabile all' aggregato:

A, B, C, . . . , E, G,

c. d. d.

85. *Il numero $\alpha + \beta$ è quello che segue, di β posti, il numero α nella successione naturale dei numeri.*

Invero, se nella successione fondamentale di aggregati (I) che genera la successione naturale dei numeri, sia $\overline{U}$ l'aggregato che dà origine ad α, l' aggregato che lo segue di β posti, si ottiene aggiungendo ad $\overline{U}$ altri β oggetti o, che è la stessa cosa, un aggregato $\overline{V}$ di β oggetti. Il numero che succede ad α dopo β posti è dunque generato dall' aggregato $\overline{U}, \overline{V}$, ed il numero originato da $\overline{U}, \overline{V}$ è appunto $\alpha + \beta$.

86. *Se un aggregato* $\overline{\mathrm{U}}$ *è parte* (*o coordinabile ad una parte*) *di un altro aggregato* $\overline{\mathrm{W}}$, *il numero originato da* $\overline{\mathrm{U}}$ *è minore di quello originato da* $\overline{\mathrm{W}}$.

Siano infatti risp. $\overline{\mathrm{U}'}$ e $\overline{\mathrm{W}'}$ quelli fra gli aggregati della progressione (I) che sono coordinabili ad $\overline{\mathrm{U}}$ e $\overline{\mathrm{W}}$; e supponiamo, se è possibile, che $\overline{\mathrm{W}'}$ non si trovi scritto dopo di $\overline{\mathrm{U}'}$; cioè che $\overline{\mathrm{W}'}$ sia contenuto in $\overline{\mathrm{U}'}$. Nella coordinazione di $\overline{\mathrm{W}}$ a $\overline{\mathrm{W}'}$ alla parte $\overline{\mathrm{U}}$ di $\overline{\mathrm{W}}$ corrisponderà evidentemente una parte $\overline{\mathrm{V}'}$ di $\overline{\mathrm{W}'}$. D' altra parte $\overline{\mathrm{V}'}$ ed $\overline{\mathrm{U}'}$, essendo entrambi coordinabili ad $\overline{\mathrm{U}}$, saranno anche coordinabili fra loro. Ora ciò è assurdo (art. 15) poichè $\overline{\mathrm{V}'}$, essendo parte di $\overline{\mathrm{W}'}$ che è contenuto in $\overline{\mathrm{U}'}$, è evidentemente parte di $\overline{\mathrm{U}'}$.

87. *Se* a, b, c *sono tre numeri qualunque ed* $a > b$, *è anche* $ca > cb$, *e reciprocamente. Così pure è* $a + c > b + c$, *e reciprocamente.*
Omettiamo la dimostrazione di questi due teoremi che sono una facile conseguenza della definizione di *maggiore*, della definizione di prodotto (o di somma) e del teorema dell'art. precedente.

88. Chiuderemo questo § col seguente teorema: *il doppio della somma dei primi* n *numeri naturali è uguale al prodotto* $n(n + 1)$.
Facciamo precedere il seguente lemma: la somma di due numeri α e β resta inalterata, se in luogo di α si prenda il numero α' che lo segue immediatamente ed in luogo di β il numero β' che precede immediatamente β nella successione naturale dei numeri.
Invero, poichè $\alpha' = \alpha + 1$ e $\beta = \beta' + 1$ (art. 85), si ha (cfr. art. 60):

$$\alpha + \beta = \alpha + (\beta' + 1) = \alpha + \beta' + 1$$

e quindi anche (cfr. art. 59):

$$\alpha + \beta = \alpha + 1 + \beta' = (\alpha + 1) + \beta' = \alpha' + \beta'.$$

89. Ciò premesso, se $a, b, c, \ldots, d, e, g$ sono i primi n numeri naturali, poichè $a = 1$ e $g = n$, si ha:

$$a + g = n + 1 \qquad (\alpha)$$

e da quest'uguaglianza si deducono successivamente, applicando il lemma testè dimostrato, le seguenti:

$$b + e = n + 1$$
$$c + d = n + 1$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$e + b = n + 1$$
$$g + a = n + 1$$

che sommate *membro a membro* unitamente alla (α) ci danno

(art. 62):

$$(a + b + ... + e + g) + (g + e + ... + b + a) = n(n + 1),$$

cioè appunto:

$$2(a + b + \dots + e + g) = n(n + 1),$$

c. d. d.

Note ed Esercizi.

1. Una successione naturale di numeri non è che un caso particolare di una successione di numeri della forma:

$$a\ ,\ a + h\ ,\ a + 2h\ ,\ a + 3h\ , \dots$$

che si chiama una *progressione aritmetica*.

Si dimostri, in modo analogo a quello tenuto agli articoli 88 e 89, che *il doppio della somma di* k *numeri in progressione aritmetica è uguale a* k *moltiplicato per la somma del primo e dell'ultimo numero della progressione.*

2. Trovare la somma dei primi n elementi della progressione aritmetica.

$$1\ ,\ 3\ ,\ 5\ ,\ 7\ ,\ 9 , \dots$$

3. Le cifre moderne 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 si chiamano anche cifre arabiche. Esse traggono però la loro origine dalle Indie d'onde sono state importate, non senza notevoli modificazioni, fra gli arabi dell'Africa e fra gli europei nel secondo secolo dell'era cristiana. Le differenze fra le cifre europee del medio evo e le arabiche occidentali non sono molto grandi. Maggiore è la differenza fra esse e le cifre dell'arabia orientale, importate pure dalle Indie, ma in un'epoca posteriore (nell'ottavo secolo). Le cifre del medio evo subirono poi naturalmente ancora altre lievi modificazioni prima di raggiungere la forma moderna dei nostri tempi.

4. I Greci, a differenza della maggior parte degli altri popoli, non inventarono segni speciali ad uso di cifre. A quest'oggetto si servirono essi delle stesse lettere del loro alfabeto. Così vediamo i ventiquattro canti dell'Iliade enumerati mediante le ventiquattro lettere dell'alfabeto jonico, facendosi corrispondere l'ordine alfabetico α, β, γ, δ, ε, ... all'ordine della successione naturale dei numeri.

5. I Romani composero i simboli dei primi nove numeri della successione naturale:

I , II , III , IV , V , VI , VII , VIII , IX

mediante le sole tre cifre I, V, X. Impiegarono però anche ad uso di cifre, le lettere dell'alfabeto L, C, D, M.

§ 11.° — Differenza di due numeri.

90. *Se di due numeri α e β sia α minore di β, esiste sempre un unico numero δ (che si chiama la* DIFFERENZA *fra α e β) tale che la somma di α e δ sia eguale a β.*

Invero, poichè β si presenta nella successione naturale dei numeri dopo il numero α, esso seguirà al numero α dopo un certo numero di posti che possiamo designare con δ. Ma il numero che segue di δ posti il numero α nella successione dei numeri naturali, è rappresentabile (art. 85) con $\alpha + \delta$; sarà dunque appunto:

$$\alpha + \delta = \beta. \tag{1}$$

Non può poi esistere alcun altro valore δ che soddisfi all'uguaglianza (1). Supposto infatti che fosse simultaneamente:

$$\alpha + \delta = \beta \ , \ \alpha + \delta' = \beta,$$

se ne dedurrebbe:

$$\alpha + \delta = \alpha + \delta'$$

e quindi (art. 53):

$$\delta = \delta' \ ,$$

c. d. d.

91. Poichè $\alpha + 0 = \alpha$, e per ogni numero δ diverso da zero si ha invece (art. 85) $\alpha + \delta > \alpha$, si vede che 0 è il solo numero δ che soddisfi all'uguaglianza $\alpha + \delta = \alpha$. Possiamo dunque anche parlare della differenza fra due numeri eguali. Essa è sempre uguale a zero.

92. L'operazione che ha per oggetto di calcolare la differenza fra un numero qualunque α ed un altro numero β che sia eguale o maggiore ad α, si chiama *sottrazione*. In questa operazione il numero β si chiama il *minuendo* ed α il *sottraendo*. La loro differenza si indica poi col simbolo $\beta - \alpha$ (che si legge β *meno* α); diguisachè si può scrivere:

$$\alpha + (\beta - \alpha) = \beta. \tag{2}$$

93. *Se* $\alpha \overline{\overline{<}} \beta$, *il numero che precede di* α *posti il numero* β *nella successione naturale dei numeri, è rappresentabile con* $\beta - \alpha$.

Infatti, il numero che segue di α posti il numero $\beta - \alpha$ è uguale (art. 85) alla somma:

$$(\beta - \alpha) + \alpha$$

e la (2) ci dice che questa somma è il numero β.

94. *La differenza fra due numeri resta la stessa se a ciascuno di essi si aggiunge uno stesso numero.*

Aggiungendo infatti a ciascuno dei due membri della (2) un numero qualunque h, se ne deduce:

$$(\alpha + h) + (\beta - \alpha) = (\beta + h)$$

cioè appunto:

$$(\beta + h) - (\alpha + h) = \beta - \alpha.$$

95. *La differenza fra due numeri non si altera se da ciascuno di essi si tolga uno stesso numero.*

Invero, se h è un numero $\overline{\overline{<}} \alpha$ ed $\overline{\overline{<}} \beta$, la (2) si può scrivere (art. 92):

$$(\alpha - h) + h + (\beta - \alpha) = (\beta - h) + h,$$

d'onde si deduce (art. 53):

$$(\alpha - h) + (\beta - \alpha) = (\beta - h),$$

cioè appunto:

$$(\beta - h) - (\alpha - h) = \beta - \alpha.$$

96. *Se* β *è maggiore di* α, *ed* h *è un numero minore di* α (*e quindi anche di* β), *è anche* β—h *maggiore di* α—h.

Poichè, se fosse invece:

$$\beta - h \overline{\overline{<}} \alpha - h,$$

se ne dedurrebbe (art. 87):

$$(\beta - h) + h \overline{\overline{<}} (\alpha - h) + h.$$

cioè (art. 92): $\beta \overline{\overline{<}} \alpha$, contro il supposto.

97. *Se* β *è maggiore della somma* α+a, *la differenza* β—α *è maggiore di* a.

Si ha, infatti, per l'articolo precedente:

$$\beta - \alpha > (\alpha + a) - \alpha = a.$$

98. Se $a \overline{\overline{>}} b$, *si ha*:

$$(a - b) + c = (a + c) - b.$$

Se, infatti, dai due membri dell'uguaglianza:

$$(a - b) + c + b = a + c$$

si sottrae b, si ha appunto la formola voluta.

99. *Se* β *è maggiore di* α + a, *per sottrarre da* β *la somma* α + a, *si può sottrarre dapprima* α *e dalla differenza ottenuta sottrarre poi* β; *cioè:*

$$\beta - (\alpha + a) = (\beta - \alpha) - a. \qquad (3)$$

Invero, poichè (art. 97) il numero $\beta - \alpha$ è maggiore di a, si può scrivere:

$$[(\beta - \alpha) - a] + a = \beta - \alpha,$$

d'onde si deduce, aggiungendo α ai due membri:

$$[(\beta - \alpha) - a] + (\alpha + a) = \beta$$

che equivale appunto alla (3).

100. *Per fare la somma di un numero* β *e di una differenza* α — a, *si può aggiungere a* β *il numero* α *e dalla somma ottenuta sottrarre* a; *cioè:*

$$\beta + (\alpha - a) = (\beta + \alpha) - a.$$

Invero, si riconosce immediatamente che:

$$\beta + (\alpha - a) + a = \beta + \alpha,$$

essendo:

$$(\alpha - a) + a = \alpha.$$

101. *Se* β *è maggiore di* α — a, *per sottrarre da* β *la differenza* α — a, *si può aggiungere a* β *il numero* a *e dalla somma ottenuta*

sottrarre a, *cioè:*

$$\beta - (\alpha - a) = (\beta + a) - \alpha. \qquad (4)$$

Si ha infatti, per l'articolo 99:

$$(\beta + \alpha) - [a + (\alpha - a)] = [(\beta + a) - a] - (\alpha - a)$$

che è appunto la (4), poichè:

$$a + (\alpha - a) = \alpha\,, (\beta + a) - a = \beta.$$

102. *Il prodotto della differenza* $\beta - \alpha$ *per un numero qualunque* γ *è uguale alla differenza fra il prodotto* $\beta\gamma$ *e il prodotto* $\alpha\gamma$.

In virtù della (2) si può scrivere infatti:

$$[\alpha + (\beta - \alpha)]\gamma = \beta\gamma$$

e quindi anche (art. 68):

$$\alpha\gamma + (\beta - \alpha)\gamma = \beta\gamma,$$

ossia appunto:

$$(\beta - \alpha)\gamma = \beta\gamma - \alpha\gamma.$$

Quest'ultima formola non cessa di esser vera anche nel caso di $\alpha = \beta$, se, come noi faremo d'ora innanzi, *addottiamo la convenzione che il prodotto di un numero qualunque per lo zero significhi lo zero.*

103. *Se* $\beta \overline{\overline{>}} \alpha$ *e* $b \overline{\overline{>}} a$, *si ha:*

$$(\beta - \alpha)(b - a) = (\beta b + \alpha a) - (\beta a + \alpha b). \qquad (5)$$

Per l'art. prec. si può scrivere infatti:

$$(\beta - \alpha)(b - a) = \beta(b - a) - \alpha(b - a) = (\beta b - \beta a) - (\alpha b - \alpha a)$$

e quindi anche (art. 101):

$$(\beta - \alpha)(b - a) = [(\beta b - \beta a) + \alpha a] - \alpha b,$$

e per l' art. 98:

$$(\beta - \alpha)(b - a) = [(\beta b + \alpha a) - \beta a] - \alpha b.$$

Ora da questa eguaglianza, che dice essere $\beta b + \alpha a$ maggiore di $\beta a + \alpha b$, si ha appunto la (5) applicando l'art. 99.

§ 12.° — Espressioni naturali — Espressioni intere.

104. *Ogni espressione ottenuta operando con un numero finito di addizioni e moltiplicazioni sopra certi numeri (che possono restare arbitrari e si rappresenteranno quindi con delle semplici lettere* a, b, c, ..., d) *si può sempre ridurre alla forma polinomia:*

$$\sum k \cdot a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \ldots d^{\delta} \qquad (1)$$

in cui i coefficienti k *e gli esponenti* $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \delta$ *sono dei numeri*

ben determinati, ed inoltre uno stesso sistema di esponenti non si presenta che in un unico termine.

Per dimostrare ciò, basta far vedere che la somma, ovvero il prodotto di due espressioni del tipo (1), si possono ancora ridurre allo stesso tipo; giacchè, dimostrato ciò, è chiaro che, se le prime n espressioni ottenute nel modo indicato si possono porre sotto la forma (1), anche la $(n+1)^{esima}$ espressione, la quale non può essere che la somma od il prodotto di due espressioni gia ottenute, si potrà ridurre del pari alla stessa forma.

Invero, se:

$$\sum k' \cdot a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \ldots d^{\delta} \qquad (1)'$$

è un' altra espressione dello stesso tipo (1) composta cogli stessi numeri arbitrari $a, b, c, \ldots, d$, i termini simili (art. 79) di (1) e di (1)' non potendo differire che per il coefficiente k, si potrà fare la riduzione:

$$\sum k a^{\alpha} b^{\beta} \ldots d^{\delta} + \sum k' a^{\alpha} b^{\beta} \ldots d^{\delta} = \sum (k + k') a^{\alpha} b^{\beta} \ldots d^{\delta},$$

cioè ad un unico polinomio del tipo (1).

Supponiamo, in secondo luogo, che si voglia considerare il prodotto dei due polinomii (1) ed (1)'. Sviluppando il prodotto di queste due somme secondo la regola dell' articolo 70, il risultato sarà una somma di più termini ognuno dei quali nasce dal moltiplicare un termine qualunque $k \cdot a^{\alpha} b^{\beta} \ldots d^{\delta}$ di (1) per un termine qualunque $h \cdot a^{\alpha'} b^{\beta'} \ldots d^{\delta'}$ di (1)'; cioè sarà la somma di tanti monomii del tipo:

$$kh \cdot a^{\alpha+\alpha'} b^{\beta+\beta'} \ldots d^{\delta+\delta'}$$

e per conseguenza, fatte le riduzioni sui termini simili, si ricadrà in un' espressione del tipo (1).

105. La riduzione di ogni espressione letterale (dedotta dalle arbitrarie $a, b, c, \ldots, d$ mediante addizioni e moltiplicazioni) alla forma polinomia ha importanza fondamentale, come vedremo in seguito, dal punto di vista algebrico. Non così dal punto di vista del calcolo aritmetico dell'espressione, giacchè la forma polinomia non è, generalmente parlando, la forma più addatta per il calcolo effettivo del numero che essa rappresenta, quando vengano fissati in un determinato modo i numeri $a, b, c, \ldots, d$. A convincerci di ciò portiamo un esempio semplice, del quale avremo però in seguito occasione di apprezzare l'importanza.

Essendo n un certo numero ben determinato, si consideri il polinomio:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

composto colle $n+2$ arbitrarie $x, a_0, a_1, \ldots, a_n$. La sua espressione ci dice che le operazioni da eseguirsi per calcolare il numero da esso rappresentato, appenachè siano stati fissati in un certo modo i numeri $x, a_0, a_1, \ldots, a_n$, sono le seguenti:

1°) le $n-1$ moltiplicazioni successive necessarie per calcolare $x^2, x^3, \ldots, x^n$;

2°) le n moltiplicazioni necessarie per calcolare i prodotti:

$$a_0x^n\ ,\ a_1x^{n-1}\ ,\ \ldots\ ,\ a_{n-2}x^2\ ,\ a_{n-1}x; \tag{2}$$

3°) le n addizioni semplici (cioè ciascuna di due soli numeri) necessarie per fare la somma dei numeri (2) e del numero a_n.

Si hanno in tutto $3n-1$ operazioni semplici, in luogo delle quali ne bastano sole $2n$, se si calcolano successivamente i polinomi:

$$a_0x + a_1\ ,\ a_0x^2 + a_1x + a_2\ ,\ a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3\ ,\ \ldots,$$

osservando che ciascuno di essi si ottiene dal precedente con una moltiplicazione ed un'addizione. Infatti, per avere il secondo polinomio, basta moltiplicare il primo per x ed aggiungere al risultato a_2; per avere il terzo, basta moltiplicare il secondo per x ed aggiungervi a_3, e così via.

Così, ad esempio, per mettere in evidenza che il calcolo del polinomio:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \tag{3}$$

non richiede necessariamente 7 moltiplicazioni semplici e 4 addizioni semplici, ma può invece effettuarsi mediante sole 4 moltiplicazioni e 4 addizioni semplici, converrà togliere alla espressione (3) la forma polinomia e sostituirvi l'espressione equivalente:

$$\left(\left(\left((ax + b)x + c\right)x + d\right)x + e\right).$$

106. Prendiamo ora in esame le espressioni che si possono ottenere operando sui numeri arbitrari $a, b, c, \ldots, d$ mediante le tre operazioni di moltiplicazione, addizione e sottrazione. Tutte queste espressioni si chiamano *espressioni intere*.

Resta naturalmente ben inteso che l'arbitrarietà dei numeri $a, b, c, \ldots, d$ non è più assoluta (come nelle espressioni *naturali* in cui non interveniva l'operazione di sottrazione); bensì essa è limitata dalla condizione che in ognuna delle sottrazioni da eseguirsi il minuendo riesca superiore (od eguale) al sottraendo, poichè altrimenti quelle operazioni non avrebbero, almeno per ora, alcun significato.

107. *Ogni espressione intera ottenuta operando sui numeri* a, b, c, ..., d *con un numero finito di moltiplicazioni, addizioni e sottrazioni, si può sempre ridurre alla forma:*

$$\sum k\cdot a^\alpha b^\beta \ldots d^\delta - \sum h\cdot a^\alpha b^\beta \ldots d^\delta\ , \tag{2}$$

cioè si può rappresentare come differenza di due polinomii del tipo (1).

Per dimostrare ciò, basterà far vedere, analogamente a quanto si è fatto all'art. 104, che la somma, la differenza ed il prodotto di due espressioni del tipo (2) può sempre ridursi allo stesso tipo.

Siano infatti:

$$A - B \quad e \quad C - D$$

le due espressioni del tipo (2) che si vogliano considerare, cosicchè A, B, C, D sono dei polinomii del tipo (1). Mediante le proposizioni degli articoli 100, 101 e 103 del § che precede, si verificherà facilmente che:

$$(A - B) + (C - D) = (A + C) - (B + D)$$
$$(A - B) - (C - D) = (A + D) - (B + C)$$
$$(A - B)(C - D) = (AC + BD) - (AD + BC)$$

ed i secondi membri di queste uguaglianze sono appunto la differenza di due espressioni, ciascuna delle quali si può ridurre, secondo il teorema dell' art. 104, ad un polinomio del tipo (1).

CAPITOLO II.

DIVISIBILITÀ E PROPRIETÀ ELEMENTARI DEI NUMERI NATURALI.

§ 1° — Multipli e sottomultipli.

108. I numeri che nascono dal moltiplicare un numero n per un altro numero qualunque, si chiamano *multipli* di n, poichè essi si possono considerare (art. 62) come la somma di *molti* numeri tutti eguali ad n.

I multipli di n disposti secondo il loro ordine naturale sono dunque rappresentati da:

$$2n\,,\ 3n\,,\ 4n\,,\ 5n\,,\ \ldots \tag{1}$$

o, che è la stessa cosa, da:

$$n+n\,,\ n+n+n\,,\ n+n+n+n\,,\ \ldots \tag{2}$$

Quest'ultima rappresentazione suggerisce di premettere alla successione (2) anche le somme improprie che contengono *un solo addendo* n *o nessun addendo* n, in quanto esse possono rappresentare i numeri n e 0 rispettivamente. Pertanto noi considereremo come multipli di n tutti i numeri:

$$0n\,,\ 1n\,,\ 2n\,,\ 3n\,,\ 4n\,,\ \ldots \tag{3}$$

essendosi già convenuto (art. 102) che il prodotto di n per lo zero significhi appunto lo zero.

109. Per $n = 2$ la successione (3) ci dà i multipli di 2, che si chiamano anche numeri *pari*, cioè:

$$0\,,\ 2\,,\ 4\,,\ 6\,,\ 8\,,\ \ldots$$

Tutti gli altri numeri, cioè:

$$1\,,\ 3\,,\ 5\,,\ 7\,,\ 9\,,\ \ldots$$

si dicono invece *dispari*.

È senz'altro manifesto che, come tutti i numeri pari sono quelli contenuti nell'espressione generale $2n$, così tutti i dispari sono quelli contenuti nell'espressione generale $2n+1$.

110. Se m è un multiplo di n, il numero n si dice essere un *sottomultiplo* di m o anche, più comunemente, un *divisore* di m.

Quest' ultima denominazione è giustificata dal fatto che, ove ciò accada, il numero m si può rappresentare sotto la forma $n + n + \ldots + n$, cioè si può spezzare (*dividere*) in una somma di numeri tutti eguali ad n.

È senz'altro manifesto che *ogni divisore di un numero* m *è anche divisore di tutti i multipli di* m.

111. *Se un numero* a *è divisore di due numeri* m *ed* n, *esso è anche divisore della loro somma* m + n *e della loro differenza* m — n (*per* $\mathrm{m} \overline{\overline{>}} \mathrm{n}$).

Esistono infatti per ipotesi due numeri h e k pei quali è:

$$ah = m \ , \ ak = n$$

e da queste uguaglianze sommate, ovvero sottratte, membro a membro, segue:

$$ah + ak = m + n \ , \ ah - ak = m - n \, ,$$

cioè appunto (articoli 68 e 102):

$$a(h + k) = m + n \ , \ a(h - k) = m - n.$$

112. Corollario 1.º — *Se un numero divide la somma di due numeri, ed uno di essi, esso divide anche l'altro.*

Infatti, uno dei due numeri che vengono sommati, si può considerare come la differenza fra la somma stessa e l'altro numero.

113. Corollario 2.º — *Se un numero divide la differenza fra due numeri, ed uno di essi, divide anche l'altro.*

È questa una conseguenza del precedente, poichè se c è la differenza dei due numeri a e b della quale è divisore il numero dato, si ha:

$$a = c + b.$$

114. *Se i numeri* a, b, c, ... *sono rispettivamente divisori dei numeri* α, β, γ, ..., *il prodotto* abc ... *è un divisore del prodotto* $\alpha\beta\gamma$ ....

Dalle uguaglianze:

$$aa' = \alpha \ , \ bb' = \beta \ , \ cc' = \gamma$$

segue infatti:

$$aa'bb'cc' = \alpha\beta\gamma$$

e quindi anche:

$$abc \cdot a'b'c' = \alpha\beta\gamma$$

il che dimostra l' asserto.

115. Se m è un multiplo di n, il numero h che soddisfa l'eguaglianza:

$$m = hn \, ,$$

si rappresenta anche col simbolo $\frac{m}{n}$ e si chiama il *quoto* di m rispetto ad n, poichè risponde alla domanda: *se il numero* m *è la somma di* n *parti eguali, quanta è ogni parte (quota pars)?*

Come il simbolo $m - n$ non aveva finora significato se non quando $m \overline{>} n$, così il simbolo $\frac{m}{n}$ non avrà significato, almeno per ora, se non nel caso in cui m sia un multiplo di n.

116. *Se il simbolo* $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}}$ *ha significato di numero naturale, anche il simbolo* $\frac{\mathrm{mh}}{\mathrm{nh}}$ *ha precisamente lo stesso significato, qualunque sia il numero naturale* h.

L' eguaglianza:

$$\frac{m}{n} = c$$

esprimendo infatti che:

$$m = cn$$

e da questa deducendosi manifestamente:

$$mh = cnh,$$

si ha appunto:

$$\frac{mh}{nh} = c.$$

§ 2.° — Divisione naturale dei numeri.

117. Dati due numeri m ed n, se il primo di essi non è un multiplo del secondo, cioè se non coincide con uno dei numeri:

$$0\,, n\,, 2n\,, 3n\,, 4n\,, \ldots, \qquad (1)$$

esso sarà evidentemente compreso fra due numeri consecutivi della progressione (1), p. es. fra qn e $(q+1)n$; cosicchè si potrà scrivere:

$$m = qn + r \qquad (2)$$

essendo r un numero inferiore ad n.

118. L'operazione mediante la quale, dati m ed n, si determinano q ed r, si chiamerà *divisione naturale* di m per n. Dei due numeri m ed n il primo si chiamerà il *dividendo*, il secondo il *dividente* (*). Il numero q, che esprime quante volte n è contenuto in m, si chiama il *quoziente* della divisione naturale (perchè risponde alla do-

(*) Adoperiamo, per maggior chiarezza, la parola *dividente* in luogo della parola *divisore* usata comunemente. La parola *divisore* verrà da noi riservata esclusivamente al significato già attribuitole all' art. 110.

manda *quoties?*, cioè *quante volte?*) ed il numero r, che esprime quanto resta di m, quando da m si toglie il massimo multiplo di n in esso contenuto, si chiama il *resto*.

L'eguaglianza (2) ci dice che il dividendo è uguale al prodotto del dividente per il quoziente aumentato del resto.

119. *Se in una divisione naturale il dividente è un divisore* (art. 110) *del dividendo, il resto è uguale a zero, e reciprocamente.*

Infatti, l'uguaglianza (2) ci dice che $r = 0$ è condizione necessaria e sufficiente perchè m sia un multiplo di n.

120. *Se il dividendo e il dividente di una divisione naturale si moltiplicano per uno stesso numero* h, *il quoziente rimane inalterato ed il resto riesce moltiplicato per* h.

Moltiplicando infatti per h i due membri della (2), se ne deduce (art. 68):

$$mh = q \cdot nh + rh \ ,$$

e questa relazione ci dice appunto che q è il quoziente della divisione di mh per nh, ed rh è il resto; poichè, essendo $r < n$, è anche (art. 87) $rh < nh$.

121. *Se al dividendo* h *si aggiunge un multiplo* tn *del dividente* n, *il quoziente verrà ad essere accresciuto di* t, *rimanendo inalterato il resto.*

Dalla (2) segue infatti evidentemente:

$$m + tn = qn + tn + r \ ,$$

cioè appunto:

$$m + tn = (q + t)n + r.$$

122. *Il resto di una somma di più numeri è uguale al resto della somma dei resti dei singoli numeri.*

Invero, dalle uguaglianze:

$$\begin{aligned} m &= qn + r \\ m' &= q'n + r' \\ m'' &= q''n + r'' \end{aligned}$$

si deduce:

$$m + m' + m'' = (q + q' + q'')n + (r + r' + r'') \ ,$$

d'onde segue (art. 121) che i due numeri $m + m' + m''$ ed $r + r' + r''$, sottoposti alla divisione per n, daranno lo stesso resto; c. d. d.

123. Corollario. — *Se i numeri* $m, m', m'', \ldots$ *divisi per* n *danno risp. gli stessi resti dei numeri* $\mu, \mu', \mu'', \ldots$, *anche la somma* $m + m' + m'' + \ldots$ *e la somma* $\mu + \mu' + \mu'' + \ldots$ *daranno, divise per* n, *lo stesso resto.*

Entrambe daranno infatti, per resto, il resto della somma dei resti dei singoli addendi, cioè lo stesso numero.

124. ***Il resto di un prodotto di più numeri è uguale al resto del prodotto dei resti dei singoli numeri.***

Dalle uguaglianze:

$$m = qn + r$$
$$m' = q'n + r'$$

si deduce infatti (art. 70):

$$mm' = qq'n^2 + q'rn + qr'n + rr',$$

cioè: posto $qq'n + qr' + rq' = \mathrm{M}$:

$$mm' = \mathrm{M}n + rr',$$

d'onde segue, come all'art. prec., che mm' ed rr' danno lo stesso resto.

Similmente, dall'uguaglianza ora scritta e dalla nuova eguaglianza:

$$m'' = q''n + r''$$

si dedurrà:

$$mm'm'' = \mathrm{N}n + rr'r'',$$

ecc.

125. *Se* q *è il quoziente ed* r *il resto della divisione di* m *per* n, *il quoziente della divisione di* m + m' *per* n *si può ottenere aggiungendo a* q *il quoziente della divisione di* r + m' *per* n; *ed il suo resto coincide col resto di quest'ultima divisione.*

Infatti, se q' ed r' sono rispettivamente il quoziente ed il resto della divisione di $r + m'$ per n, dalle due uguaglianze:

$$m = qn + r$$
$$r + m' = q'n + r'$$

si deduce sommando membro a membro:

$$r + m + m' = (q + q')n + r' + r,$$

cioè appunto:

$$m + m' = (q + q')n + r'.$$

126. *Se il quoziente della divisione naturale di* m *per* n *si divide per* n', *il nuovo quoziente così ottenuto è anche il quoziente della divisione di* m *per* nn'.

Siano infatti q ed r il quoziente ed il resto della divisione di m per n, e siano q' ed r' il quoziente ed il resto della divisione di q per n'. Sussisteranno le due uguaglianze:

$$m = qn + r\ ,\ q = q'n' + r',$$

cosicchè, se nella prima si sostituisce in luogo di nq la sua espressione:

$$nq = q'nn' + nr'$$

ricavata dalla seconda eguaglianza moltiplicata per n, si ottiene:

$$m = q'(nn') + (nr' + r),$$

onde, per accertare che q' è effettivamente, come si è asserito, il quoziente della divisione di m per nn', basterà riconoscere che:

$$nr' + r < nn'.$$

Invero, poichè:

$$r \overline{\gtrless} n - 1 \ , \ r' \overline{\gtrless} n' - 1,$$

si ha:

$$nr' + r \overline{\gtrless} n(n' - 1) + (n - 1),$$

cioè appunto:

$$nr' + r \overline{\gtrless} nn' - 1.$$

Note

1. Se rappresentiamo per brevità con $m \| n$ il quoziente della divisione naturale di m per n, con $m \| n \| n'$ il quoziente della divisione di $m \| n$ per n' e così via, dal teorema dell'art. 126 applicato ripetutamente segue manifestamente:

$$m \| (n_1 n_2 n_3 \ldots n_k) = m \| n_1 \| n_2 \| n_3 \| \ldots \| n_k.$$

2. *Se* $q_1, q_2, q_3, \ldots$ *ed* $r_1, r_2, r_3, \ldots$ *sono risp. i quozienti ed i resti che successivamente si ottengono nella divisione ripetuta* $m \| n_1 \| n_2 \| n_3 \| \ldots$, *si ha*:

$$m = r_1 + n_1 r_2 + n_1 n_2 r_3 + \ldots + n_1 n_2 \ldots n_{k-1} r_k + n_1 n_2 \ldots n_k q_k. \quad (1)$$

Si hanno infatti, per il significato stesso delle $q_1, q_2, q_3, \ldots, r_1, r_2, r_3, \ldots$ le uguaglianze:

$$m = n_1 q_1 + r_1$$
$$q_1 = n_2 q_2 + r_2$$
$$q_2 = n_3 q_3 + r_3$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$q_{k-1} = n_k q_k + r_k,$$

e, se queste uguaglianze si moltiplicano risp. per $1, n_1, n_1 n_2, n_1 n_2 n_3, \ldots n_1 n_2 \ldots n_{k-1}$ e si sommano poi membro a membro, si ottiene appunto la (1); poichè i termini contenenti le $q_1, q_2, \ldots, q_{k-1}$ risultano gli stessi nei due membri e si possono quindi sopprimere.

3. *Se* $r_1, r_2, r_3, \ldots$ *sono i resti successivi che nascono dalla divisione ripetuta* $m \| n_1 \| n_2 \| n_3 \ldots$, *il resto della divisione naturale di* m *per il prodotto* $n_1 n_2 \ldots n_k$ *è dato da*:

$$r_1 + n_1 r_2 + n_1 n_2 r_3 + \ldots + n_1 n_2 \ldots n_{k-1} r_k.$$

Indicando infatti con Q_k ed R_k risp. il quoziente ed il resto della divisione di m per $n_1 n_2 \ldots n_k$, si dovrà avere:

$$m = n_1 n_2 \ldots n_k Q_k + R_k.$$

Ma, per la nota 1ª, il quoziente Q_k è uguale al quoziente q_k della nota pre-

cedente, cosicchè si può scrivere:

$$m = n_1 n_2 \dots n_k q_k + R_k ,$$

e dal paragone di questa eguaglianza colla (1) segue appunto:

$$R_k = r_1 + n_1 r_2 + n_1 n_2 r_3 + \dots + n_1 n_2 \dots n_{k-1} r_k .$$

§ 3.° — Sistemi di numerazione fondati sulla divisione ripetuta.

127. I *sistemi di numerazione* hanno per oggetto di rappresentare tutti i numeri naturali mediante un numero limitato di segni particolari (p. es. di cifre) fra loro variamente combinati; diguisachè ad ogni numero corrisponda una certa speciale combinazione di detti segni, mediante la quale esso venga ad essere completamente individuato, cioè distinto da tutti gli altri infiniti numeri.

Noi preciseremo ancor meglio il problema proponendoci di rappresentare tutti i numeri mediante le cifre:

$$0\,,1\,,2\,,3\,,\dots,\overline{n-1} \qquad (1)$$

od altri segni particolari che supponiamo siano già stati adottati per raffigurare i primi n numeri della successione naturale. Si è scritto $\overline{n-1}$ in luogo del semplice simbolo letterale $n-1$ (che non rappresenta per se stesso un numero determinato) per esprimere in qualche modo che in luogo del simbolo generico $n-1$ s'intende posta una certa cifra o segno convenzionale rappresentante un unico numero ben determinato.

128. Dato un numero qualsivoglia m, sia n^k la più alta potenza di n in esso contenuta. Dividendo m per n^k si otterrà:

$$m = pn^k + r \qquad (2)$$

con $p < n$ ed $r < n^k$. Infatti r, essendo il resto della divisione, è inferiore al dividente n; ed il quoziente p non può uguagliare o superare n, perchè, ove ciò fosse, il prodotto pn^k sarebbe almeno eguale ad n^{k+1} e quindi il numero m conterrebbe la potenza $(k+1)^{esima}$ di n, contro il supposto.

Dividendo ora il numero r per n^{k-1}, si otterrà similmente:

$$r = qn^{k-1} + r_1 \qquad (3)$$

con $q < n$ ed $r_1 < n^{k-1}$, colla sola differenza che, mentre p era almeno eguale ad 1, può invece q riuscire anche uguale a zero.

Sostituendo l'espressione (3) in (2), viene:

$$m = pn^k + qn^{k-1} + r_1 ,$$

cosicchè dividendo ulteriormente r_1 per n^{k-2}, e poi così di seguito, si giungerà ad ottenere per m un'espressione della forma:

$$m = pn^k + qn^{k-1} + \dots + dn^3 + cn^2 + bn + a, \qquad (4)$$

dove i numeri $p, q, \ldots, d, c, b, a$, essendo tutti inferiori ad n, possono anche esprimersi colle corrispondenti cifre (1):

$$\bar{p}\,,\,\bar{q}\,,\ldots,\,\bar{d}\,,\,\bar{c}\,,\,\bar{b}\,,\,\bar{a}$$

già adottate per individuarli.

129. I numeri $p, q, \ldots, d, c, b, a$ che permettono di esprimere il numero m sotto la forma (4), possono anche definirsi in un altro modo, mediante un procedimento che conduce a determinarli nell'ordine opposto a quello di pocanzi, cioè nell'ordine $a, b, c, d, \ldots, q, p$.

Invero all'espressione (4) può darsi la forma:

$$m = (pn^{k-1} + qn^{k-2} + \ldots + dn^2 + cn + b)n + a$$

la quale, tenendo presente che $a < n$, ci dice che a è il resto della divisione di m per n, nel mentre che:

$$pn^{k-1} + qn^{k-2} + \ldots + dn^2 + cn + b$$

ne è il quoziente. Similmente si vede che, dividendo questo quoziente per n, si otterrà per resto b e per nuovo quoziente:

$$pn^{k-2} + qn^{k-3} + \ldots + dn + c$$

e così di seguito, finchè si giungerà al quoziente p che diviso per n darà per quoziente 0 e per resto p.

Pertanto si conclude che *quando un numero* m *è posto sotto la forma*:

$$\mathrm{p}n^k + \mathrm{q}n^{k-1} + \ldots + \mathrm{d}n^3 + \mathrm{c}n^2 + \mathrm{b}n + \mathrm{a}$$

in cui $p, q, \ldots, d, c, b, a$ sono inferiori ad n, i numeri $a, b, c, d, \ldots, q, p$ altro non sono che i resti successivi della divisione ripetuta di m per n.

130. Se, dopo aver ottenuto il quoziente 0 ed il resto p, si volesse proseguire la divisione per n, si troverebbe:

$$0 = 0 \cdot n + 0,$$

cioè si troverebbe poi sempre per quoziente e per resto lo zero. Nulla però impedisce di assumere, per individuare con cifre il numero m, in luogo della successione $a, b, c, \ldots, q, p$, la successione $a, b, c, \ldots, q, p, 0$, ovvero la successione $a, b, c, \ldots, q, p, 0, 0$ e così via, poichè le espressioni:

$$0 \cdot n^{k+1} + pn^k + qn^{k-1} + \ldots + cn^2 + bn + a$$
$$0 \cdot n^{k+2} + 0 \cdot n^{k+1} + pn^k + qn^{k-1} + \ldots + cn^2 + bn + a$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

danno sempre evidentemente lo stesso numero m rappresentato dalla (4).

131. Il nuovo modo di definire la successione $a, b, c, \ldots$ mostra chiaramente che *uno stesso numero* m *non può porsi che in unico*

modo sotto la forma:

$$m = pn^k + qn^{k-1} + \ldots + dn^3 + cn^2 + bn + a$$

nel senso, cioè, che un'altra eguaglianza consimile:

$$m = p_1n^k + q_1n^{k-1} + \ldots + d_1n^3 + c_1n^2 + b_1n + a_1$$

(colle $p_1, q_1, \ldots, d_1, c_1, b_1, a_1$ del pari inferiori ad n) *non è possibile senza che sia* $p_1 = p$, $q_1 = q, \ldots, a_1 = a$.

Invero, i numeri $a_1, b_1, c_1, \ldots$ esser dovrebbero, al pari di $a, b, c, \ldots$, i resti successivi della divisione ripetuta di m per n, i cui risultati (resti e quozienti) si trovano determinati in modo unico.

132. Come si vede, una volta fissato il numero n, che si chiamerà la *base del sistema di numerazione*, ogni altro numero si trova caratterizzato completamente da un unico allineamento di cifre:

$$\bar{p}\bar{q} \ldots \bar{d}\bar{c}\bar{b}\bar{a}$$

colla prima cifra a sinistra diversa da zero, o da uno qualunque degli allineamenti equivalenti:

$$0\bar{p}\bar{q} \ldots \bar{d}\bar{c}\bar{b}\bar{a}$$

$$00\bar{p}\bar{q} \ldots \bar{d}\bar{c}\bar{b}\bar{a}$$

$$000\bar{p}\bar{q} \ldots \bar{d}\bar{c}\bar{b}\bar{a}$$

. . . .

Il problema propostoci si trova così risoluto nel modo desiderato, poichè nella composizione di tutti questi allineamenti non intervengono che *n segni*, cioè le n cifre rappresentanti i numeri inferiori ad n; e nulla ci impedisce di adottare ogni allineamento di questo genere come simbolo numerico proprio del numero da esso caratterizzato.

Le lineette sovrapposte alle lettere, nel mentre che ci avvertono trattarsi di cifre, ci mettono in guardia a non confondere il significato del simbolo $\bar{p}\bar{q} \ldots \bar{b}\bar{a}$ con quello del simbolo $pq \ldots ba$ rappresentante il prodotto dei numeri $p, q, \ldots, b, a$, e a dargli invece soltanto il significato definito dalle uguaglianze:

$$\bar{a} = a \;,\quad \bar{b}\bar{a} = bn + a \;,\quad \bar{c}\bar{b}\bar{a} = cn^2 + bn + a, \ldots \qquad (5)$$

133. Queste uguaglianze ci danno, in particolare, la rappresentazione della base n e delle sue potenze sotto la forma:

$$n^0 = 1 \;,\; n = \bar{1}\bar{0} \;,\; n^2 = \bar{1}\bar{0}\bar{0} \;,\; n^3 = \bar{1}\bar{0}\bar{0}\bar{0} \;, \ldots$$

poichè, se si prende, p. es., nella terza delle (5):

$$c = 1 \;,\; b = 0 \;,\; a = 0 \;,$$

essa ci dà appunto:

$$\bar{1}\bar{0}\bar{0} = n^2.$$

134. Le stesse uguaglianze (5) ci danno la rappresentazione dei prodotti di una potenza di n per un numero a inferiore ad n sotto la forma:

$$a \times n = \overline{a}\overline{0}\,, \quad a \times n^2 = \overline{a}\overline{0}\overline{0}\,, \quad a \times n^3 = \overline{a}\overline{0}\overline{0}\overline{0}\,, \ldots$$

135. *Se all'allineamento di cifre rappresentante un certo numero si aggiunge uno zero alla destra, il nuovo allineamento rappresenta lo stesso numero moltiplicato per la base.*

È infatti:

$$\overline{p}\overline{q} \ldots \overline{c}\overline{b}\overline{a}\overline{0} = 0 + an + bn^2 + cn^3 + \ldots$$
$$= (a + bn + cn^2 + \ldots)n = \overline{p}\overline{q} \ldots \overline{c}\overline{b}\overline{a} \times n.$$

136. Corollario. — *Per moltiplicare un numero per* n^k, *basta aggiungere* k *zeri alla destra dell' allineamento che lo rappresenta.*

È poi chiaro che, reciprocamente, affinchè un numero sia divisibile per n^k, è necessario che la sua espressione incominci, a partire da destra, con k zeri consecutivi.

137. *Se l' espressione in cifre (secondo la base* n) *di un certo numero* α *si compone di* k *cifre*, si ha:

$$n^{k-1} \gtreqless \alpha < n^k,$$

e reciprocamente.

Infatti, l' espressione di α in cifre essendo per ipotesi della forma:

$$\alpha = pn^{k-1} + qn^{k-2} + \ldots + cn^2 + bn + a, \qquad p \gtreqless 1,$$

è senz'altro evidente che $\alpha \gtreqless n^{k-1}$. D'altra parte, se questa è l' espressione di α, ciò significa (art. 128) che n^{k-1} è la più alta potenza di n contenuta in α e che, per conseguenza, n^k non è contenuta in α; onde appunto $\alpha < n^k$.

§ 4.° — Sistema decimale. Caratteri di divisibilità nel sistema decimale.

138. D'ora innanzi tutte le volte che ci occorrerà di individuare un numero speciale mediante la sua espressione in cifre, ci serviremo sempre del sistema così detto *decimale*, di quello, cioè, che ha per base il numero:

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$

che nella nostra lingua si chiama *dieci*, il quale si potrebbe anche definire, in modo meno empirico, mediante l' espressione:

$$(2 \times 2 \times 2) + 2.$$

139. I numeri inferiori al dieci, considerati secondo il loro ordine naturale, si rappresentano, come già si è notato (art. 81), colle cifre:

$$1\,,\,2\,,\,3\,,\,4\,,\,5\,,\,6\,,\,7\,,\,8\,,\,9.$$

Il numero consecutivo al 9, cioè il dieci, essendo la base del sistema, sarà rappresentato dal simbolo $\overline{1}\overline{0}$ e le sue potenze $(10)^2$, $(10)^3$, . . . dai simboli (art. 133)

$$\overline{1}\overline{0}\overline{0}\,,\ \overline{1}\overline{0}\overline{0}\overline{0}\,,$$

che si leggono *cento, mille*, ...

140. L'apposizione di un numero qualunque di zeri alla sinistra di un numero espresso in cifre non altera, come si è visto (articolo 132), il significato dell' espressione stessa. Invece l'aggiungere uno, due, tre, . . . zeri alla sua destra equivale (art. 136) a moltiplicare il numero per dieci, cento, mille, ...

Così ad esempio:

$$\overline{0}\overline{0}\overline{3}\overline{2}=\overline{0}\overline{3}\overline{2}=\overline{3}\overline{2}=(3\times 10)+2$$

$$\overline{3}\overline{2}\overline{0}=\overline{3}\overline{2}\times 10$$

$$\overline{3}\overline{2}\overline{0}\overline{0}=\overline{3}\overline{2}\times\overline{1}\overline{0}^2=\overline{3}\overline{2}\times\overline{1}\overline{0}\overline{0}.$$

141. D'ora innanzi, per maggiore semplicità, ometteremo le lineette—nelle espressioni in *cifre effettive* 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Così, p. es., in luogo di scrivere $\overline{3}\overline{9}\overline{0}\overline{2}$, scriveremo semplicemente 3902. Ad evitare ogni possibile equivoco, dobbiamo però fare la convenzione, universalmente addottata dagli algebristi, che un composto simbolico $s\sigma$ allora soltanto sia equivalente al composto $s\times\sigma$, quando almeno uno dei due simboli s e σ sia *letterale*.

In base a questa convenzione s'intenderà p. es.:

$$ba=b\times a\quad,\quad 3a=3\times a$$

ed invece:

$$32=\overline{3}\overline{2}=(3\times\overline{1}\overline{0})+2,\ \text{e non: } 32=3\times 2,$$

e così:

$$235a=\overline{2}\overline{3}\overline{5}\times a,\ \text{e non: } 235a=2\times 3\times 5\times a.$$

142. I divisori del numero 10 sono, oltre l'unità e lo stesso 10, i numeri 2 e 5; e si ha: $10=2\times 5$.

Segue di quì (art. 110) che di un numero qualunque:

$$\overline{p}\,\overline{q}\ldots\overline{c}\,\overline{b}\,\overline{a}=(\overline{p}\,\overline{q}\ldots\overline{c}\,\overline{b}\times 10)+\overline{a} \qquad (1)$$

la prima parte $\overline{p}\,\overline{q}\ldots\overline{c}\,\overline{b}\times 10$ è divisibile per 10, per 2 e per 5; onde affinchè l'intero numero $\overline{p}\,\overline{q}\ldots\overline{c}\,\overline{b}\,\overline{a}$ sia divisibile per 10, per 2 o per 5, è necessario e sufficiente (articoli 111 e 112) che lo sia anche la seconda parte, cioè $\overline{a}$. Pertanto:

Affinchè un numero sia divisibile per 10, *è necessario e sufficiente che la sua prima cifra a destra sia uno zero.*

Affinchè sia divisibile per 5, *è necessario e sufficiente che la sua prima cifra sia* 0, *ovvero* 5.

Affinchè sia divisibile per 2, *è necessario e sufficiente che la prima cifra sia* 0, 2, 4, 6, *ovvero* 8.

143. L'uguaglianza (1) ci dice, più precisamente, che *il resto della divisione di un numero per* 2, 5, 10 *è lo stesso resto che si otterrebbe dividendo risp. per* 2, 5, 10 *la sua prima cifra a destra.*

Infatti, il resto di una divisione non si altera (art. 121) se si toglie dal dividendo un multiplo del dividente.

Così, p. es., poichè 7 diviso per 2 da per resto 1, i numeri 567, 4327, 87, ... divisi per 2 daranno tutti lo stesso resto 1.

144. Poichè 10 è divisibile per 2, il prodotto 10×10, cioè 100, è divisibile (art. 114) pel prodotto 2×2, cioè per 4; e similmente il prodotto $2 \times 2 \times 2$ cioè 1000 è divisibile pel prodotto $2 \times 2 \times 2$, cioè per 8.

Ma, essendo 100 un multiplo di 4, dall'eguaglianza:

$$\bar{p}\bar{q} \dots \bar{c}\bar{b}\bar{a} = (\bar{p}\bar{q} \dots \bar{c} \times 100) + \bar{b}\bar{a}$$

si deduce, con raziocinio identico a quello dei due articoli precedenti, che: *il resto della divisione di un numero per* 4 *è uguale al resto della divisione per* 4 *del numero* $(\bar{b}\bar{a})$ *rappresentato dalle sole due prime cifre di destra.*

E, similmente, poichè 1000 è un multiplo di 8, l'uguaglianza:

$$\bar{p}\bar{q} \dots \bar{d}\bar{c}\bar{b}\bar{a} = (\bar{p}\bar{q} \dots \bar{d} \times 1000) + \bar{c}\bar{b}\bar{a}$$

ci dice che: *il resto della divisione di un numero per* 8 *è uguale al resto della divisione per* 8 *del numero* $(\bar{c}\bar{b}\bar{a})$ *formato dalle sue prime tre cifre di destra.*

Così, ad esempio, poichè 57 diviso per 4 dà per resto 1, i numeri 657, 2357, 41557, ... divisi per 4 daranno tutti per resto 1.

E così, poichè 296 diviso per 8 dà per resto zero, cioè è un multiplo di 8, tutti i numeri 296, 4296, 5296, ... saranno del pari multipli di 8.

145. Poichè 10 diviso per 3 dà per resto 1, una potenza qualunque di 10 divisa per 3 darà (art. 124) del pari per resto 1; e quindi, se $\bar{g}$ è una cifra qualunque, i prodotti $\bar{g} \times 10$, $\bar{g} \times 100$, $\bar{g} \times 1000$, ... divisi per 3 daranno tutti (secondo lo stesso articolo) lo stesso resto che darebbe $\bar{g}$.

Pertanto, se un numero qualunque $\bar{p}\bar{q} \dots \bar{c}\bar{b}\bar{a}$ si scriva sotto la forma:

$$a + (b \times 10) + (c \times 100) + \dots$$

e si consideri che i termini di questa somma divisi per 3 danno risp. per resto gli stessi resti che darebbero i numeri $a, b, c, \dots,$ si vede (art. 123) che il resto di $\bar{p}\bar{q} \dots \bar{c}\bar{b}\bar{a}$ diviso per 3 coincide col resto che si otterrebbe dividendo per 3 la somma $a+b+c+\dots+p+q$. Cioè: *il resto della divisione di un numero per* 3 *è uguale al resto che si ottiene dividendo per* 3 *la somma delle sue cifre.*

Per conseguenza, *affinchè un numero sia divisibile per* 3, *è ne-*

cessario e sufficiente che la somma delle sue cifre sia un multiplo di 3.

Così, p. es., il resto della divisione per 3 del numero 457082 coincide col resto della divisione per 3 della somma $4+5+7+0+8+2=26$; epperò è uguale a 2.

146. Il ragionamento dell'articolo precedente sussiste inalterato se in luogo della cifra 3 si consideri la cifra 9, poichè 10 diviso per 9 dà pure per resto 1.

Dunque: *il resto della divisione di un numero per* 9 *è uguale al resto della divisione per* 9 *della somma delle sue cifre.* E per conseguenza: *affinchè un numero sia divisibile per* 9, *è necessario e sufficiente che sia divisibile per* 9 *la somma delle sue cifre.*

147. Non ci occupiamo della divisibilità per 6, poichè, essendo $6 = 2 \times 3$, vedremo più tardi che *affinchè un numero sia divisibile per* 6, *è necessario e sufficiente che esso sia divisibile così per* 2, *come per* 3.

148. *Per riconoscere se un numero* $\overline{a\,b\,c\,d \ldots e\,h}$ *sia divisibile per* 7, *si moltiplichino le sue cifre, a cominciare da sinistra, periodicamente per* 1, 2, 4. *Siano* α, β, γ, δ, ..., ε, η *i resti dei prodotti così ottenuti divisi per* 7. *Affinchè il numero proposto sia divisibile per* 7, *è necessario e sufficiente che la differenza fra la somma delle cifre di posto dispari del nuovo numero* $\overline{\alpha\beta\gamma\delta \ldots \varepsilon\eta}$ *e quella delle sue cifre di posto pari sia divisibile per* 7.

Sia proposto p. es. ad esaminare il numero:

$$14947819733\,.$$

I prodotti:

$$1\times1,\ 4\times2,\ 9\times4,\ 4\times1,\ 7\times2,\ 8\times4,\ 1\times1,\ 9\times2,\ 7\times4,\ 3\times1,\ 3\times2$$

divisi per 7 danno rispettivamente i resti:

$$1\,,1\,,1\,,4\,,0\,,4\,,1\,,4\,,0\,,3\,,6.$$

Il numero proposto è dunque divisibile per 7, poichè la differenza fra il numero:

$$1+1+0+1+0+6=9$$

ed il numero:

$$1+4+4+4+3=16$$

è divisibile per 7.

La dimostrazione di questa regola verrà data in luogo più opportuno.

Note ed Esercizi.

1. Dedurre dall'art. 144 che un numero è divisibile per 4 allora e soltanto quando la sua prima cifra a destra accresciuta del doppio della seconda sia divisibile per 4.

2. Dedurre dallo stesso articolo che affinchè un numero sia divisibile

per 8, è necessario e sufficiente che sia divisibile per 8 la somma delle sue prime tre cifre, a cominciare da destra, moltiplicate rispettivamente per 1, 2, 4.

3. *Affinchè un numero sia divisibile per* 11, *è necessario e sufficiente che la differenza fra la somma delle cifre di posto pari e quella delle cifre di posto dispari sia un multiplo di* 11.

Si stabilirà facilmente questo criterio dopo aver prima riconosciuto che la potenza n^{esima} di 10, divisa per 11, dà per resto 1 ovvero 10, secondochè n sia pari o dispari.

§ 5.° – Calcolo di una somma con un numero di addendi non superiore alla base.

149. Si voglia calcolare l'espressione in cifre (a base dieci) del numero che rappresenta la somma di più numeri $\mathrm{A}\bar{\alpha}\bar{a}$, $\mathrm{B}\bar{\beta}\bar{b}$, $\mathrm{C}\bar{\gamma}\bar{c}, \ldots, \mathrm{E}\bar{\varepsilon}\bar{e}$, dei quali per brevità abbiamo messo in evidenza soltanto le prime due cifre, indicando complessivamente con A, B, C, . . . , E le rimanenti.

Le cifre del *totale* $\mathrm{S}\bar{\sigma}\bar{s}$ si calcolano successivamente a cominciare dalla prima a destra, e si scrivono, di mano in mano che si ottengono, sotto le corrispondenti cifre degli addendi precedentemente allineate in verticale; con che si viene a formare lo schema:

$$\begin{array}{c} \mathrm{A}\bar{\alpha}\bar{a} \\ \mathrm{B}\bar{\beta}\bar{b} \\ \mathrm{C}\bar{\gamma}\bar{c} \\ \cdots \\ \mathrm{E}\bar{\varepsilon}\bar{e} \\ \hline \mathrm{S}\bar{\sigma}\bar{s} \end{array}$$

Noi supporremo che il numero degli addendi non superi la base n del sistema di numerazione adottato.

Ciò posto, per trovare la prima cifra del totale, cioè $\bar{s}$, si farà la somma delle prime cifre $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}, \ldots, \bar{e}$ degli addendi. Poichè il numero delle cifre $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}, \ldots, \bar{e}$ non supera n ed ogni cifra è $\leqq n-1$, sarà:

$$a + b + c + \ldots + e \leqq n(n-1) = n^2 - n,$$

e, per conseguenza, questa somma sarà espressa da un numero di due cifre al più. Se $\bar{r}\bar{s}$ è il numero così ottenuto, sarà $\bar{s}$ la prima cifra del totale, e la cifra $\bar{r}$ si *riporterà* per sommarla colle cifre della seconda colonna.

Poichè ora nella somma $\bar{r} + \bar{\alpha} + \bar{\beta} + \bar{\gamma} + \ldots + \bar{\varepsilon}$ il numero degli addendi non può superare $n+1$, sarà:

$$r + \alpha + \beta + \gamma + \ldots + \varepsilon \leqq (n+1)(n-1) = n^2 - 1$$

e quindi anche questa somma sarà espressa da un numero $\bar{\rho}\bar{\sigma}$ che si comporrà, al più, di due cifre. La sua prima cifra σ sarà la seconda cifra del totale.

La terza cifra del totale sarà similmente la prima cifra del numero (necessariamente di due cifre al più) che si otterrà sommando la cifra *riportata* $\bar{\rho}$ colle cifre della terza colonna degli addendi; e così di seguito.

150. Per giustificare la regola ora spiegata, s'incomincierà dall'osservare che:

$$A\bar{\alpha}\bar{a} + \bar{B}\beta\bar{b} + C\bar{\gamma}\bar{c} + \ldots + E\bar{\varepsilon}\bar{e} =$$

$$(A\bar{\alpha} + B\bar{\beta} + C\bar{\gamma} + \ldots + E\bar{\varepsilon})\cdot n$$

$$+ (a + b + c + \ldots + e) =$$

$$(A\bar{\alpha} + B\bar{\beta} + C\bar{\gamma} + \ldots + E\bar{\varepsilon} + \bar{r})\cdot n + \bar{s}.$$

La cifra $\bar{s}$ è dunque il resto della divisione della somma richiesta per n, cioè è la prima cifra del totale. E, se il totale sia espresso da $S\bar{\sigma}\bar{s}$, sarà per conseguenza:

$$A\bar{\alpha} + B\bar{\beta} + C\bar{\gamma} + \ldots + E\bar{\varepsilon} + \bar{r} = S\bar{\sigma}.$$

La seconda cifra del totale, cioè $\bar{\sigma}$, sarà dunque la prima cifra del numero che esprime la somma:

$$A\bar{\alpha} + B\bar{\beta} + C\bar{\gamma} + \ldots + E\bar{\varepsilon} + \bar{r},$$

cioè appunto, per la stessa ragione di dianzi, la prima cifra del numero esprimente la somma $\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\varepsilon+r$, secondo la regola dell'art. precedente; e così via.

§ 6.° — Prodotto di un numero di più cifre per uno di una sola cifra.

151. Se nella somma considerata al § prec. gli addendi sono tutti eguali fra loro, ed il loro numero sia k, essendo k minore della base del sistema di numerazione, il totale ci darà il prodotto di un numero di più cifre $\bar{p}\bar{q}\ldots\bar{\mu}\bar{\alpha}\bar{a}$ per k, cioè per un numero di una sola cifra $\bar{k}$. L'operazione stessa si semplificherà, poichè la somma di quelle cifre degli addendi che si trovano in una medesima colonna, si ridurrà evidentemente al prodotto di due numeri, ciascuno di una sola cifra.

152. Allo schema dell'operazione si darà ora la forma:

$$\begin{array}{r} \bar{p}\bar{q}\ldots\bar{\mu}\bar{\alpha}\bar{a} \\ \bar{k} \\ \hline \ldots\ldots\bar{\tau}\bar{\sigma}\bar{s} \end{array}$$

dove la prima cifra $\bar{s}$ del totale, cioè del prodotto, è la prima cifra del prodotto di $\bar{a}$ per $\bar{k}$, la seconda cifra $\bar{\sigma}$ del prodotto è la prima cifra del prodotto di $\bar{\alpha}$ per $\bar{k}$ accresciuto della seconda cifra *riportata* dal prodotto precedente (quella stessa che all'articolo 149 si era indicata con $\bar{r}$), la terza cifra $\bar{\tau}$ è la prima del prodotto di $\bar{\mu}$ per $\bar{k}$ accresciuto della nuova cifra riportata (la $\bar{\rho}$ dell'art. 149), e così via.

153. Dal procedimento tenuto per eseguire la moltiplicazione appare chiaramente che il numero delle cifre del prodotto sarà uguale, od al più superiore di un' unità, al numero delle cifre del moltiplicando.

§ 7.° — Calcolo di una somma con un numero qualunque di addendi.

154. Consideriamo dapprima la somma di un numero qualunque di addendi ciascuno di una sola cifra. Se il numero degli addendi è superiore alla base n del sistema, alcune delle cifre da sommare si troveranno necessariamente ripetute; cosicchè si tratterà di calcolare l' espressione:

$$(1 \times \alpha_1) + (2 \times \alpha_2) + (3 \times \alpha_3) + \ldots + \overline{n-1} \times \alpha_{n-1}$$

dove α_i indica quante volte la cifra $\bar{i}$ si trova ripetuta come addendo.

Il calcolo da farsi si comporrà quindi di tre parti, cioè:

1.°) Di semplici *enumerazioni*, dovendosi *contare* quante volte si presenta fra gli addendi la cifra $\bar{i}$, per avere il numero α_i.

2.°) Di moltiplicazioni di due numeri, dei quali uno è di una sola cifra. Il numero delle moltiplicazioni da farsi non supera $n-2$; e si determineranno così i prodotti $2\alpha_2$, $3\alpha_3$, ... Queste moltiplicazioni si eseguiranno colla regola del § precedente.

3.°) Della somma di un numero di addendi non superiore alla base (cfr. § 5.°), cioè di α_1 e dei numeri già calcolati $2\alpha_2$, $3\alpha_3$, ...

155. Supponiamo, in secondo luogo, che gli addendi si compongano di un numero qualunque di cifre, p. es. che ogni addendo si componga di 4 cifre o di un numero inferiore di cifre.

Se A_1, A_2, A_3, A_4 sono i numeri, calcolati come all'articolo precedente, che rappresentano rispettivamente la somma di tutte le prime cifre, a partire da destra, di tutte le seconde cifre, di tutte le terze e di tutte le quarte, la somma cercata sarà esprimibile con:

$$A_1 + (A_2 \times 10) + (A_3 \times 100) + (A_4 \times 1000).$$

Si tratterà dunque di fare ancora la somma di soli 4 addendi già completamente determinati; giacchè, p. es., $A_3 \times 100$ si ottiene (art. 136) aggiungendo due zeri alla destra delle cifre che rappresentano A_3.

§ 8.° — Calcolo del prodotto di due numeri qualisivogliano.

156. Il prodotto di un numero qualunque A per un moltiplicatore di più cifre:

$$\bar{p}\bar{q}\ldots\bar{c}\bar{b}\bar{a}$$

si può scrivere:

$$A\times\bar{p}\bar{q}\ldots\bar{c}\bar{b}\bar{a}=A[a+(b\times 10)+(c\times 100)+\ldots]$$
$$=(A\times a)+[(A\times b)\times 10]+[(A\times c)\times 100]+\ldots$$

Si calcoleranno quindi (art. 151) i *prodotti parziali*:

$$A\times a\equiv\ldots\bar{\alpha}_3\bar{\alpha}_2\bar{\alpha}_1$$
$$A\times b\equiv\ldots\bar{\beta}_3\bar{\beta}_2\bar{\beta}_1$$
$$A\times c\equiv\ldots\bar{\gamma}_3\bar{\gamma}_2\bar{\gamma}_1$$
$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$

dopodichè il prodotto cercato altro non sarà che la somma degli addendi:

$$\ldots\ldots\bar{\alpha}_3\;\bar{\alpha}_2\;\bar{\alpha}_1$$
$$\ldots\;\bar{\beta}_3\;\bar{\beta}_2\;\bar{\beta}_1\;\bar{0}$$
$$\ldots\;\bar{\gamma}_3\;\bar{\gamma}_2\;\bar{\gamma}_1\;\bar{0}\;\bar{0}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

giacchè per moltiplicare $\ldots\bar{\beta}_3\bar{\beta}_2\bar{\beta}_1$ per 10 basterà (art. 136) aggiungere uno zero alla sua destra, ecc.

157. *Se il numero delle cifre del moltiplicando è* h, *e* k *quello delle cifre del moltiplicatore, il numero delle cifre del prodotto è* $h+k$ *ovvero* $h+k-1$.

Infatti, poichè il moltiplicatore ha k cifre, esso è compreso (articolo 137) fra 10^{k-1} e 10^k. Per conseguenza il prodotto sarà compreso (art. 87) fra il prodotto del moltiplicando per 10^{k-1} e il prodotto del moltiplicando per 10^k, quindi anche (art. 136) fra il moltiplicando seguito da $k-1$ zeri e il moltiplicando seguito da k zeri; cioè fra un numero di $h+k-1$ cifre ed un numero di $h+k$ cifre. Ciò dimostra appunto l' asserto.

§ 9.° — Calcolo della differenza di due numeri qualunque.

158. Si voglia la differenza dei due numeri $\bar r\bar s \dots \bar c\bar b\bar a$ e $\bar\rho\bar\sigma \dots \bar\gamma\bar\beta\bar\alpha$ già espressi in cifre nel sistema di numerazione a base n. Supporremo che il primo sia il maggiore; cosicchè possiamo ritenere che il numero delle cifre $\bar\rho$, $\bar\sigma, \dots, \bar\alpha$ sia eguale a quello delle cifre $\bar r$, $\bar s, \dots, \bar a$, ma che la cifra $\bar\rho$ sia lo zero od almeno non sia superiore alla cifra $\bar r$.

L'operazione da eseguirsi per calcolare la differenza, che sia $\bar t \dots \bar p\bar q\bar d$, si rappresenterà mediante lo schema:

$$\begin{array}{l} \bar r\bar s \dots \bar c\bar b\bar a \\ \bar s\bar\sigma \dots \bar\gamma\bar\beta\bar\alpha \\ \hline \bar t \dots\dots \bar q\bar d \end{array}.$$

159. Cominciamo dall'osservare che *per conoscere la prima cifra $\bar d$ della differenza, basta conoscere la prima cifra $\bar a$ del minuendo e la prima cifra $\bar\alpha$ del sottraendo.* Infatti, poichè la somma del sottraendo e della differenza deve riprodurre il minuendo, deve la cifra $\bar d$ esser tale che sommata colla cifra $\bar\alpha$ dia per risultato il numero $\bar a$, ovvero il numero $\bar 1\bar a$. Quindi: la cifra $\bar d$ è la cifra che bisogna aggiungere ad $\bar\alpha$ per ottenere $\bar a$, se $\bar\alpha$ è uguale o minore ad $\bar a$; è invece la cifra che bisogna aggiungere ad $\bar\alpha$ per ottenere $\bar 1\bar a$, se α è maggiore di $\bar a$.

Determinata così la cifra $\bar d$ e detta $\bar\varepsilon\bar a$ (con $\varepsilon = 0$ ovvero $= 1$, a seconda dei due casi) la somma delle due cifre $\bar\alpha$ e $\bar d$, per determinare la seconda cifra $\bar q$ della differenza, s'immaginerà, come sopra, di verificare che la somma del sottraendo e della differenza è uguale al minuendo, osservando che la somma delle due cifre della prima colonna ha per cifra di riporto $\bar\varepsilon$. La cifra cercata $\bar q$ dovrà dunque, sommata con $\bar\beta + \bar\varepsilon$, dare per risultato $\bar b$, ovvero $\bar 1\bar b$. Pertanto, se $\bar\beta + \bar\varepsilon$ è $\leqq$ di $\bar b$, sarà $\bar q$ quella cifra che, sommata con $\bar\beta + \bar\varepsilon$, dà per risultato $\bar b$; in caso contrario sarà la cifra che, sommata con $\bar\beta + \bar\varepsilon$, da $\bar 1\bar b$. E così si determineranno allo stesso modo tutte le cifre della differenza, tenendo presente, nel fare ogni somma, se la cifra riportata dalla somma precedente sia lo zero, ovvero l'unità.

§ 10.° — Calcolo del quoziente e del resto di una divisione naturale.

160. La determinazione delle cifre, secondo il sistema di numerazione a base n, del quoziente e del resto di una divisione naturale si può ricondurre, come vedremo fra poco, al caso particolare in cui il quoziente è espresso da una sola cifra. Questo caso è caratterizzato come segue: *affinchè il quoziente di* m *per* d *sia di una sola cifra (diversa da zero), è necessario e sufficiente che il numero delle cifre di* m *uguagli o superi di un' unità il numero delle cifre di* d, *e che la prima cifra di* m, *a partire da sinistra, sia nel primo caso* $\gtreqless$, *e nel secondo* $\lesseqgtr$, *della prima cifra di* d.

Infatti, affinchè il quoziente sia di una sola cifra diversa da zero, è necessario e sufficiente che m sia $\gtreqless$ di d e minore di d moltiplicato per la base n, cioè minore del numero che nasce dall'aggiungere uno zero alla destra delle cifre di d.

161. Ciò premesso, si voglia calcolare il quoziente Q ed il resto R della divisione naturale di un dividendo qualunque D per un dividente qualunque d. Supporremo naturalmente $D \gtreqless d$, giacchè in caso contrario il quoziente cercato sarebbe uguale a zero, ed il resto sarebbe lo stesso numero D.

Si separino dall' espressione in cifre di D, a cominciare da sinistra, tante cifre quante precisamente ne sono necessarie per formare un numero $\gtreqless$ di d. Sia D' il numero rappresentato dalle cifre così separate e D'' il numero rappresentato dalle rimanenti h cifre del dividendo, cosicchè sarà:

$$D = (D' \times n^h) + D''. \tag{1}$$

Allora, se q è il quoziente della divisione naturale di D' per d ed r ne è il resto, cosicchè:

$$D' = qd + r \; ,$$

la (1) si potrà scrivere:

$$D = (qn^h \cdot d) + rn^h + D''. \tag{2}$$

Di qui segue (art. 121) che, per avere il quoziente cercato Q, basterà aggiungere a $q \times n^h$ il quoziente della divisione di $r \times n^h + D''$ per d, nel mentre che il resto cercato R coinciderà col resto di quest'ultima divisione.

Il calcolo si trova così ricondotto:

1°) *a determinare il quoziente* q *che si comporrà di una sola cifra diversa da zero* (art. 160);

2°) *a determinare il quoziente* Q' *della divisione per* d *del numero* $\Delta = rn^h + D''$ *di cui già si ha l' espressione in cifre (composta delle* h *cifre di* D'' *cui si facciano precedere a sinistra le cifre di* r).

Invero, una volta calcolate le h cifre di Q' (completate con degli zeri alla sinistra nel caso che il loro numero riuscisse infe-

riore ad h), le cifre di Q si otterranno aggiungendo semplicemente queste cifre alla destra della cifra $\bar{q}$.

Che il numero delle cifre di Q' non possa superare h, segue facilmente dall' uguaglianza:

$$\Delta = rn^h + D''$$

in cui è:

$$D'' < n^h,$$

cosicchè:

$$\Delta < (r + 1) \times n^h$$

e quindi anche:

$$\Delta < d \times n^h, \qquad (3)$$

poichè $r + 1 \leqq d$. La diseguaglianza (3) ci dice infatti che il quoziente Q' della divisione naturale di Δ per d è inferiore ad n^h, cioè appunto che il numero delle cifre di Q' non può superare h.

162. Esempio. — Vogliasi determinare il quoziente Q ed il resto R della divisione del numero (scritto in base dieci):

$$D = 148276504321,$$

pel numero:

$$d = 371.$$

Si ha in questo caso:

$$D' = 1482 \ , \ D'' = 76504321 \, ,$$

onde $h = 8$; cosicchè già sappiamo che il quoziente Q si comporrà di $h + 1$, cioè di 9, cifre. Il quoziente q ed il resto r della divisione di D' per d sono dati evidentemente da:

$$q = 3 \ , \ r = 1482 - (3 \times 371) = 369,$$

d' onde segue:

1°) che la prima cifra a sinistra del quoziente cercato Q è 3;

2°) che:

$$Q = 300000000 + Q',$$

dove il numero Q' (al più di 8 cifre) è il quoziente della divisione di:

$$\Delta = 36976504321$$

per d;

3°) che il resto cercato R coincide col resto della divisione di Δ per q.

Questa prima parte dell'operazione si può rappresentare col seguente schema dimostrativo:

```
148276504321   |371
1113           |---------
-----          3
 36976504321
```

163. Si procederà ora sul numero Δ, che si può chiamare il *primo dividendo parziale*, precisamente come si è operato su D, cioè si determinerà la prima cifra a sinistra del quoziente Q', di Δ per d,

ed il ***secondo dividendo parziale***; il quale, a sua volta, darà luogo ad una terza divisione il cui quoziente conterrà almeno una cifra di meno di quelle di Q', cioè al più $h-1$ cifre, e così di seguito finchè, dopo un numero di divisioni (con un quoziente di un'unica cifra) il cui numero non potrà in ogni caso superare $h+1$, tutte le cifre di Q si troveranno completamente determinate.

164. Lo schema dimostrativo dell'operazione da eseguirsi dopo quella dell'art. 162 per determinare il secondo dividendo parziale, sarebbe il seguente:

```
36976504321     |371
3339            ---------
 3586504321      9
```

I due schemi si possono quindi riassumere nell' unico schema dimostrativo:

```
148276504321     |371
1113             ---------
 36976504321      39
 3339
  3586504321 ,
```

e così di seguito.

L' operazione avrà il suo termine appenachè si giunga ad un dividendo parziale inferiore a d. *Esso sarà evidentemente il resto cercato* R.

165. Ci resta ad aggiungere qualche osservazione circa la determinazione del quoziente nel caso particolare in cui esso sia di una sola cifra. In questo caso il dividendo m e il dividente d, espressi in cifre, sono della forma:

$$m = \bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}\,...\,\bar{e}\ , \qquad d = \bar{b'}\,\bar{c'}\,...\,\bar{e'}\ ,$$

cioè in m, oltre alle cifre $\bar{b}, \bar{c}, ..., \bar{e}$ corrispondenti una per una alle cifre $\bar{b'}, \bar{c'}, ..., \bar{e'}$ di d, si ha di più a sinistra la cifra $\bar{a}$, che può anche essere lo zero.

Il quoziente cercato q, *di* m *diviso per* d, *è* $\leqq$ *del quoziente* q' *di* $\bar{a}\bar{b}$ *per* $\bar{b'}$, *ed è* $\geqq$ *del quoziente* q'' *di* $\bar{a}\bar{b}$ *per* $b'+1$.

Cominciamo dall' osservare che, se k è il numero delle cifre $c, d, ..., e$, si ha evidentemente:

$$m < (\bar{a}\bar{b} + 1)n^k, \quad \bar{d} \geqq b' \times n^k. \tag{4}$$

Ciò posto, ammesso, se è possibile, che fosse:

$$d(q'+1) \leqq m, \tag{5}$$

se ne dedurrebbe per le (4):

$$b' \cdot n^k \cdot (q'+1) < (\bar{a}\bar{b} + 1) \times n^k$$

e quindi:

$$b'(q'+1) \gtreqless \overline{a}\,\overline{b},$$

contrariamente al supposto che sia q' il quoziente della divisione di $\overline{a}\,\overline{b}$ per $\overline{b'}$. La (5) è dunque inammissibile, cioè il quoziente di m per d è $\gtreqless q'$.

Osserviamo, in secondo luogo, che si ha:

$$m \gtreqless \overline{a}\,\overline{b} \times n^k \quad , \quad d < (b'+1) \times n^k.$$

Per conseguenza, ammesso, se è possibile, che fosse:

$$d \cdot q'' > m,$$

se ne dedurrebbe:

$$(b'+1) \cdot n^k \cdot q'' > \overline{a}\,\overline{b} \times n^k$$

e quindi:

$$(b'+1)q'' > \overline{a}\,\overline{b},$$

contro il supposto.

Note ed Esercizi.

1. Allo schema dimostrativo dell'art. 164 si sostituisce praticamente lo schema più semplice:

```
148276504321  |371
1113          ---------
 3697          3 9
 3339
  3586
```

abbassando una sola volta l'una dopo l'altra le cifre 7, 6,... del dividendo.

2. Essendo, come all'art. 163, D il dividendo, Δ il primo dividendo parziale e Δ' il secondo dividendo parziale, riconoscere che se il numero delle cifre di Δ è uguale al numero delle cifre di D, la prima cifra a sinistra di Δ sarà inferiore alla prima cifra a sinistra di D ed il numero delle cifre di Δ' sarà certamente inferiore al numero delle cifre di Δ.

3. Il procedimento operativo dato agli articoli 161-163 si può riassumere, nel caso in cui il dividente d è di una sola cifra, come segue.

Volendo dividere un numero di k cifre: $\overline{a_1}\,\overline{a_2}\,\overline{a_3} \ldots \overline{a_k}$ per un numero di una sola cifra $\overline{d}$, si ragionerà come segue: a_1 diviso per d dà per quoziente q_1 (che sarà però 0, se $a_1 < d$) e per resto $\overline{r_1}$; il numero $\overline{r_1}\,\overline{a_2}$ diviso per d dà per quoziente $\overline{q_2}$ e per resto $\overline{r_2}$; $\overline{r_2}\,\overline{a_3}$ diviso per $\overline{d}$ dà per quoziente $\overline{q_3}$ e per resto $\overline{r_3}$, ecc. ecc.; finalmente $\overline{r_{k-1}}\,\overline{a_k}$ diviso per d dà per quoziente $\overline{q_k}$ e per resto $\overline{r_k}$. Il quoziente cercato sarà il numero $\overline{q_1}\,\overline{q_2}\,\overline{q_3} \ldots \overline{q_k}$ ed il resto sarà rk.

4. Come si vede, quando il dividente è di una sola cifra, le divisioni parziali si effettuano *immediatamente*, semprechè si conoscano i prodotti di due numeri di una sola cifra. Il procedimento testè dato potrà p. es. servire per riconoscere se un numero espresso in cifre secondo il sistema decimale sia divisibile per 7, quando non si voglia applicare il criterio dell'art. 148. il quale ha però il vantaggio di limitare le divisioni per 7 ai soli numeri inferiori a 36.

5. Volendo dividere un numero per 9, si potrà dapprima determinare facilmente il resto (cfr. art. 146), cosicchè, sottratto dal dividendo il resto già

trovato, resterà a trovare il quoziente della divisione per 9 di un numero che è un multiplo di 9.

Ciò posto, se D è un multiplo di 9 e Q è il quoziente della divisione di D per 9, dall'eguaglianza:

$$D = 9\,Q = 10\,Q - Q$$

segue:

$$Q = 10.Q - D.$$

In base a quest'uguaglianza le cifre di Q si potranno calcolare l'una dopo l'altra, *a cominciare dalla prima di destra*, immaginando di fare la sottrazione, secondo lo schema dell'art. 158, del numero D dal numero 10.Q. Infatti, la prima cifra a destra di 10.Q è conosciuta (perchè evidentemente uguale a zero) onde si troverà subito la prima cifra a destra di D che è poi la seconda a destra di 10.Q; cosicchè, conoscendosi la seconda cifra a destra così di 10.Q, come di D, si determinerà anche la seconda cifra a destra della differenza Q, che è poi la terza a destra di 10.Q, e così via.

6. Con raziocinio poco dissimile si potrà fare la divisione per 11 e per 99 di un numero multiplo di 11 o di 99, determinando le cifre del quoziente una per una *a cominciare da destra*. Si osservi a tale oggetto che $11 = 10 + 1$ e $99 = 100 - 1$. (Cfr. il Capitolo IV del *Trattato di Aritmetica* del *Bertrand*, 1883).

§ 11.° — Divisori comuni a due o più numeri. Massimo comun divisore.

166. Dati due numeri qualunque m ed n, se la divisione di m per n dà per quoziente q e per resto r, si ha (art. 117):

$$m = qn + r. \qquad (1)$$

Quest' uguaglianza ci dice che ogni numero d, che sia simultaneamente divisore di m e di n, è anche divisore comune di q e di r e reciprocamente. Infatti, se d è divisore di m e di n, esso dividerà la somma $qn+r$ e la sua prima parte qn, e quindi (art. 112) anche la seconda parte, cioè r. Reciprocamente, se d divide n ed r, esso dividerà i due addendi della somma $qn + r$ e quindi anche (art. 111) la somma stessa, cioè m.

Pertanto: *i divisori comuni di due numeri* m *ed* n *coincidono coi divisori comuni di* n *e del resto della divisione di* m *per* n.

Se $m > n$ (come del resto è sempre lecito di supporre), questo teorema agevola la ricerca dei divisori comuni di m ed n, riconducendola a quella dei divisori comuni di n ed r, essendo r minore di n e quindi a maggior ragione di m.

167. Per questo stesso teorema, i divisori comuni di m ed r dovranno, alla lor volta, coincidere coi divisori comuni di r ed r_1, essendo r_1 il resto della divisione di n per r, e quindi poi anche coi divisori comuni di r_1 ed r_2, se r_2 è il resto della divisione di r per r_1; e così via. Si verrà così a costruire mediante successive divisioni una progressione di numeri:

$$m\,,\; n\,,\; r\,,\; r_1\,,\; r_2\,,\; \ldots\,,\; r_{k-1}\,,\; r_k = 0$$

ognuno dei quali è più piccolo del precedente, che si dovrà arrestare soltanto quando si ottenga come ultimo resto, r_k, lo zero. Essa godrà della proprietà che i divisori comuni a due resti con-

secutivi qualisivogliano r_i ed r_{i+1} coincideranno coi divisori comuni di m ed n.

In particolare, i divisori comuni di m ed n coincideranno coi divisori comuni di r_{k-1} e di r_k, cioè coi divisori di r_{k-1}, poichè r_k, essendo uguale a zero, è divisibile per tutti i numeri naturali ($0 = 0 \times h$, qualunque sia h). Ora, fra i divisori di r_{k-1}, il massimo è lo stesso numero r_{k-1} ($r_{k-1} = r_{k-1} \times 1$). Concludiamo quindi:

1°) *che* r_{k-1} *è il massimo comun divisore di* m *ed* n.

2°) *che i divisori comuni di* m *ed* n *altro non sono che i divisori del loro massimo comun divisore.*

168. Se $r_{k-1} = 1$, i due numeri m ed n non avranno alcun divisore comune all'infuori dell'unità, *la quale del resto è divisore comune di tutti i numeri naturali.* In questo caso m ed n si dicono *primi* fra loro.

Se invece $r_{k-1} > 1$, esisterà almeno un divisore comune di m ed n, oltre l'unità.

Pertanto: *affinchè due numeri* m *ed* n *siano primi fra loro, è necessario e sufficiente che, detto* r *il resto della divisione di* m *per* n, r_1 *il resto della divisione di* r *per* r_1, *e così via, l'ultimo resto, diverso da zero, così ottenuto sia eguale all'unità.*

169. Se in luogo di procedere, come si è fatto sopra, sui due numeri m ed n per costruire la progressione:

$$m\,,\ n\,,\ r\,,\ r_1\,,\ \ldots\,,\ r_{k-1}\,,\ r_k = 0\,,$$

si procedesse allo stesso modo sui due numeri m ed n moltiplicati per uno stesso fattore h, si otterrebbe invece (art. 120) la progressione:

$$mh\,,\ nh\,,\ rh\,,\ r_1h\,,\ \ldots\,,\ r_{k-1}h\,,\ r_kh = 0.$$

Quindi: *se due numeri si moltiplicano per uno stesso fattore, anche il loro massimo comun divisore si troverà moltiplicato per quello stesso fattore.*

170. Di qui si trae facilmente che: *se un numero divide il prodotto di due fattori, ed è primo con uno di essi, esso è un divisore dell'altro.*

Supponiamo infatti che n sia divisore del prodotto mh e sia primo con m. Poichè n è primo con m, il massimo comun divisore di m ed n è l'unità, e quindi, per l'art. prec., il massimo comun divisore di mh e di nh è h. Dovrà dunque n dividere h, poichè, essendo n un divisore comune di mh e di nh, deve anche dividere (art. 167) il loro massimo comun divisore.

171. Corollario. — *Se* d *è primo con* m *e con* n, *esso è primo anche col loro prodotto* mn.

Infatti, se δ fosse divisore comune di d e di mn, essendo esso primo con m, dovrebbe dividere l'altro fattore n, contro il supposto.

172. Quindi anche, più generalmente: *se* d *è primo con ciascuno dei numeri* $m_1, m_2, \ldots, m_i$, *esso è anche primo col prodotto* $m_1 m_2 \ldots m_i$.

Infatti, poichè d è primo con m_1 ed m_2, esso è anche primo con $m_1 m_2$; ed essendo primo con $m_1 m_2$ e con m_3 sarà, sempre per l'art. prec., primo con $m_1 m_2 m_3$, ecc.

173. *Un numero divisibile per due numeri primi fra loro, è divisibile anche per il loro prodotto.*

Sia infatti M divisibile pei numeri m ed n primi fra loro; e sia $M = mq$. Poichè n divide M, cioè il prodotto mq ed è primo con m, dovrà dividere q (art. 170), cosicchè si potrà scrivere $q = nq'$. Si avrà così $M = mnq'$, c. d. d.

174. *Se* D *è massimo comun divisore di* m *ed* n, *i quozienti che si ottengono dividendo* m *ed* n *per* D, *sono primi fra loro.*

Siano infatti p e q questi quozienti, cosicchè:

$$m = Dp \ , \ n = Dq.$$

Da queste uguaglianze appare chiaramente che, se p e q avessero un divisore comune d, diverso dall'unità, i due numeri m ed n sarebbero entrambi divisibili pel prodotto Dd, e per conseguenza avrebbero un divisore comune superiore a D contro il supposto.

175. Vogliansi ora ricercare tutti i divisori comuni a più numeri:

$$m_1 \ , m_2 \ , m_3 \ , \ldots \ , m_k. \tag{2}$$

Se d sia un divisore comune a tutti questi numeri, esso dividerà, in particolare, m_1 ed m_2 e quindi anche il loro massimo comun divisore D_1. Sarà dunque d un divisore comune dei $k-1$ numeri:

$$D_1 \ , m_3 \ , m_4 \ , \ldots \ , m_k \ , \tag{3}$$

e, reciprocamente, ogni divisore comune di questi ultimi sarà anche divisore comune di tutti i numeri (2), poichè ogni divisore di D_1 è divisore comune di m_1 ed m_2. La questione è così ricondotta a ricercare i divisori comuni a tutti i numeri (3).

Procedendo come sopra, si vede che, se D_2 è il massimo comun divisore di D_1 ed m_3, i divisori comuni dei numeri (3) coincidono coi divisori comuni dei $k-2$ numeri:

$$D_2 \ , m_4 \ , m_5 \ , \ldots \ , m_k.$$

Così seguitando si giungerà ad un unico numero D_{k-1} il quale godrà della proprietà che ogni suo divisore sarà divisore comune di tutti i numeri (2), e reciprocamente. Esso sarà evidentemente il massimo comun divisore di tutti i numeri $m_1, m_2, \ldots, m_k$.

Note ed Esercizi.

1. Riconoscere che due numeri consecutivi sono sempre primi fra loro.
2. Essendo A il massimo comun divisore dei numeri $a_1, a_2, \ldots, a_h$ e B il massimo comun divisore dei numeri $b_1, b_2, \ldots, b_k$, dimostrare che il mas-

simo comun divisore di tutti i numeri $a_1, a_2, \ldots, a_h, b_1, b_2, \ldots, b_k$ altro non è che il massimo comun divisore di A e di B.

3. Dedurre dalla relazione che lega tre resti consecutivi che: *nella ricerca del massimo comun divisore di due numeri, ogni resto è maggiore del doppio di quello che lo segue di due posti.*

4. Si deduca di qui che: *se* 2^λ *è la prima potenza di* 2 *che supera il più piccolo dei due numeri* m *ed* n, *il numero delle divisioni da effettuarsi per la ricerca del massimo comun divisore di* m *ed* n, *non può superare* 2λ.

5. Dimostrare che il massimo comun divisore di due numeri m ed n è uguale al numero dei multipli di n contenuti nella progressione:

$$m, 2m, 3m, \ldots, nm.$$

Si applichi l'art. 174; e poi l'art. 170.

6. Il massimo comun divisore di tre numeri m, n, r è il numero che esprime quante volte nelle due linee:

$$m, 2m, 3m, \ldots, rm$$

$$n, 2n, 3n, \ldots, rn$$

due numeri corrispondenti sono simultaneamente divisibili per r.

7. Per altri teoremi elementari sui divisori si vegga p. es. il trattato di Aritmetica di *G. Bertrand* (traduzione italiana di *G. Novi*).

§ 12.° — Multipli comuni a due o più numeri. Minimo comune multiplo.

176. Per *minimo comune multiplo* di due o più numeri dati s'intende il più piccolo numero diverso da zero, che sia multiplo di ciascuno di essi.

L'esclusione dello zero è necessaria, poichè lo zero si può considerare come multiplo comune di tutti i numeri, potendosi scrivere, qualunque sia il numero k:

$$0 = k \times 0.$$

177. *Il minimo comune multiplo di due numeri è uguale al quoto che si ottiene dividendo il loro prodotto per il loro massimo comun divisore.*

Sia infatti M un multiplo comune dei due numeri m ed n, i quali abbiano per massimo comun divisore D. Possiamo scrivere:

$$m = Dm', \quad n = Dn'. \qquad (1)$$

Poichè M è multiplo di m, cioè di Dm', sia:

$$M = Dm' \cdot k. \qquad (2)$$

Il numero M è poi anche divisibile per n; cioè il prodotto $Dm'k$ è divisibile per Dn', e quindi $m'k$ per n'. Ma il fattore m' è primo con n' (art. 174); dovrà quindi (art. 170) essere divisibile per n' l'altro fattore k, onde si può scrivere:

$$k = hn'.$$

Sostituendo ciò in (2), si ottiene per M l'espressione:

$$M = h \cdot m'n'D \qquad (3)$$

la quale ci dice che ogni multiplo comune di m e di n è un multiplo di $m'n'D$. Reciprocamente, è senz' altro evidente, per le (1), che ogni multiplo di $m'n'D$ è multiplo comune di m ed n.

Dando ad h, nella (3), il minimo valore possibile, cioè 1, si avrà il minimo multiplo di m ed n. *Il minimo multiplo è dunque* $m'n'D$ che, come appare dalla (1), è appunto il quoziente della divisione di mn per D; c. d. d.

178. *Ogni multiplo comune di due numeri è un multiplo del loro minimo comune multiplo.*

Ciò è contenuto nello stesso risultato dell' art. prec., come si vede dalla (3) che dà l'espressione più generale di un multiplo comune di m ed n.

179. La ricerca del minimo comune multiplo di più numeri si riconduce a quella del minimo comune multiplo di due soli numeri partendo dall' osservazione che: *se* $a_1, a_2, \ldots, a_k$ *sono numeri qualunque, ed* m *è il minimo multiplo di* a_1 *ed* a_2, *il minimo comune multiplo di* $a_1, a_2, \ldots, a_k$ *altro non è che il minimo multiplo comune dei numeri* $m, a_3, a_4, \ldots, a_k$.

Infatti, se M è un multiplo comune di $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$, in quanto è multiplo comune di a_2, a_2, esser dovrà (art. 178) un multiplo di m. Sarà dunque M un multiplo comune di $m, a_2, a_3, \ldots, a_k$. Reciprocamente, ogni siffatto multiplo sarà anche multiplo di $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$, poichè ogni multiplo di m è multiplo comune di a_1 ed a_2.

Di qui segue evidentemente la verità di quanto si è asserito; ed è quindi chiaro che il minimo multiplo comune di $a_1, a_2, \ldots, a_k$ si otterrà mediante successive ricerche di minimi multipli di due soli numeri, con procedimento perfettamente analogo a quello già indicato (art. 175) per la ricerca del massimo comun divisore di più numeri.

§ 13.° — Numeri primi — Decomposizione di un numero qualunque in fattori primi.

180. Un numero si dice *primo* quando non ammette alcun divisore all'infuori di sè stesso e dell'unità.

Come si vede facilmente, dire che un numero è primo, equivale a dire che esso è primo (art. 168) con tutti i numeri ad esso inferiori.

181. *Un numero primo è primo con tutti i numeri che non sono suoi multipli.*

Infatti, se un numero primo p ha con un altro numero m un divisore comune che non sia l'unità, questo divisore comune non può essere che lo stesso numero p, non avendo p altri divisori all'infuori di se stesso e dell'unità. Il numero m è dunque un multiplo di p.

182. *Se un numero primo divide il prodotto di più fattori, dev'essere divisore di qualcuno di essi.*

Sia infatti il numero primo p divisore del prodotto $a \times b \times c \times \ldots \times d$. Se p divide a, il teorema è verificato. In caso contrario sarà p (art. 181) primo con a. Allora però, essendo p divisore del prodotto di a per $b \times c \times \ldots \times d$ e primo col fattore a, dovrà (art. 170) dividere l'altro fattore, cioè $b \times c \times \ldots \times d$. Ragionando come sopra si osserverà ora che, se p non divide b, dovrà dividere $c \times \ldots \times d$; e così procedendo si concluderà evidentemente che, se p non divide alcuno dei fattori precedenti all'ultimo, dovrà dividere l'ultimo; c. d. d.

183. *Ogni numero che non sia primo, è il prodotto di due o più numeri primi.*

Infatti, se un numero m non è primo, esso ammetterà qualche divisore diverso da se stesso e dall'unità. Se a è il più piccolo fra questi divisori, esso è certamente primo, poichè, se a ammettesse un divisore d, anche m ammetterebbe il divisore d più piccolo di a, contro il supposto.

Possiamo dunque scrivere:

$$m = a \cdot m'$$

e, per dimostrare il teorema, basterà far vedere che m' è un numero primo ovvero un prodotto di numeri primi. In effetto, se m' non è primo, ragionando come sopra si troverà:

$$m' = b \cdot m''$$

dove b è primo, cosicchè sarà:

$$m = a \cdot b \cdot m''$$

e resterà a far vedere che m'', se non è primo, è un prodotto di numeri primi. Così procedendo, poichè i numeri m, m', m'', ... divengono sempre più piccoli, si finirà evidentemente con ottenere m sotto forma di un prodotto di numeri primi; c. d. d.

184. *La decomposizione di un numero in un prodotto di numeri primi non si può fare (fatta astrazione dall'ordine dei fattori, che in un unico modo.*

Siano infatti:

$$m = a \times b \times c \times d \times \ldots \times g$$

ed

$$m = a_1 \times b_1 \times c_1 \times d_1 \times \ldots \times e_1$$

due decomposizioni dello stesso numero m in fattori primi. Poichè a_1 divide m, dovrà dividere il prodotto $a \times b \times c \times \ldots \times g$ e quindi (art. 182), poichè a_1 è primo, almeno uno dei fattori $a, b, c, \ldots, g$; per esempio a. Ma a è pure primo e come tale non ammette divisori diversi da se stesso o da 1. Sarà dunque $a_1 = a$, onde dall'uguaglianza:

$$a \times b \times c \times d \times \ldots \times g = a_1 \times b_1 \times c_1 \times d_1 \times \ldots \times e_1$$

si potrà dedurre dividendo per a:

$$b \times c \times d \times \ldots \times g = b_1 \times c_1 \times d_1 \times \ \ldots \times e_1.$$

Ma di qui si dedurrà allo stesso modo l'eguaglianza di un fattore del primo membro con uno del secondo, cioè p. es.: $b = b_1$; onde resterà:

$$c \times d \times \ldots g = c_1 \times d_1 \times \ldots \times e_1.$$

Così procedendo si otterrà p. es. successivamente $c = c_1$, $d = d_1$, ...; come d. d.

185. *La successione dei numeri primi è illimitata.*

Supponiamo infatti, se è possibile, che i numeri primi fossero soltanto k. Indicando questi k numeri primi con $p_1, p_2, \ldots, p_k$, esisterebbe il numero:

$$1 + p_1 p_2 \ldots p_k \tag{1}$$

il quale, dovendo ammettere (art. 183) un divisore primo, esser dovrebbe divisibile per uno almeno dei numeri $p_1, p_2, \ldots, p_k$, per esempio per p_i. Ora ciò è assurdo, perchè la somma (1) divisa per p_1 dà evidentemente per resto l'unità.

Note ed Esercizi.

1. Dimostrare che un numero primo è della forma $6h + 1$, ovvero della forma $6h - 1$.

2. Dedurne che il quadrato di ogni numero primo è della forma $6h + 1$.

3. *Se* p *è un numero primo e* k *non è un multiplo di* p, *i numeri:*

$$k, 2k, 3k, \ldots, (p-1)k \tag{α}$$

divisi per p *danno resti tutti differenti.*

Si osservi che se due di essi ik ed jk, $(j > i)$, dessero lo stesso resto, la loro differenza $(j-i)k$ esser dovrebbe divisibile per p; e che p non può dividere $j - i$ che è più piccolo di esso.

4. Poichè i numeri (α) divisi per p danno per resti, fatta astrazione dall'ordine, i numeri:

$$1, 2, 3, \ldots, p-1, \tag{β}$$

il prodotto dei numeri (α) diviso per p darà per resto (art. 124) lo stesso resto che darebbe il prodotto dei numeri (β). La differenza di questi due prodotti, cioè:

$$1.2.3 \ldots (p-1)[k^{p-1} - 1]$$

divisa per p darà dunque per resto zero. Di qui segue che p è un divisore di $k^{p-1} - 1$, cioè il:

Teorema di Fermat — *Se* k *non è un multiplo del numero primo* p, *la differenza* $k^{p-1} - 1$ *è divisibile per* p.

5. Riconoscere che se due numeri non sono primi fra loro, essi hanno almeno un divisore primo in comune.

6. Se a e b sono primi fra loro, anche $a+b$ è primo con ab e così pure anche la loro differenza è prima col loro prodotto.

Si dimostri ciò per assurdo, supponendo che $a + b$ ed ab abbiano un divisore primo in comune.

7. Teorema di Wilson — *Se* p *è un numero primo, il numero*:

$$1.2.3 \ldots (p-1)$$

accresciuto di un'unità è divisibile per p.

Il teorema reciproco è senz'altro evidente; poichè se sia $p = a.b$, fra i fattori del prodotto $1.2.3 \ldots (p-1)$ se ne troverà uno divisibile per a, per esempio lo stesso a ed *un altro* divisibile per b.

8. Si può dunque affermare che *affinchè un numero* p *sia primo, è necessario e sufficiente che il prodotto* $1.2.3 \ldots (p-1)$ *accresciuto di un' unità sia divisibile per* p.

§ 14.° — Ricerca metodica dei numeri primi.

186. La determinazione di tutti i numeri primi inferiori ad un numero dato M si può effettuare mediante un procedimento assai semplice conosciuto fino dall' antichità sotto il nome di *crivello di Eratostene.*

Si scriva la serie naturale dei numeri da 1 fino ad M tralasciando i numeri pari ad eccezione del 2 che è il solo numero pari primo. Nella successione così ottenuta:

$$1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15,\ 17,\ 19,\ 21, \ldots \qquad (\alpha)$$

si cancellino i numeri di tre in tre ad eccezione del 3 che è un numero primo. Segnando con una lineetta i numeri da cancellarsi, si ottiene così la successione:

$$1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7,\ \overline{9},\ 11,\ 13,\ \overline{15},\ 17,\ 19,\ \overline{21}$$

nella quale il primo numero non cancellato è il 5 che è numero primo. Si cancelleranno ora in questa stessa successione anche i numeri di 5 in 5 che non siano già stati precedentemente cancellati, ad eccezione del 5. Dopo ciò, essendo 7 il primo dei numeri non ancora cancellati, si cancelleranno anche tutti i numeri di 7 in 7 ad eccezione del 7 e così di seguito finchè non si avrà più a cancellare alcun numero inferiore ad M. I numeri non cancellati saranno precisamente i numeri primi non superiori ad M.

187. Non è difficile rendersi ragione di cosiffatto procedimento. È chiaro, infatti, primieramente, che i numeri cancellati non sono numeri primi, poichè se h è uno qualunque dei numeri dispari (α), i numeri dispari che vanno di h in h sono evidentemente multipli di h e quindi non primi. Resta quindi soltanto a dimostrare che se dopo uno dei successivi periodi di cancellazioni, il primo dei numeri non ancora cancellati è k, esso è necessariamente un numero primo. Invero, se k non fosse primo, dovrebbe k essere multiplo di un numero primo h inferiore a k; e il numero h dovrebbe far parte dei numeri che non sono stati cancellati, giacchè nessuno dei numeri cancellati è primo, come già si è notato. Ma i multipli dei numeri non cancellati precedenti a k sono già stati tutti cancellati. Il numero k sarebbe dunque anch' esso già stato cancellato, contrariamente al supposto. Resta così dimostrato che k è numero primo.

188. È importante di osservare che se dopo un certo periodo di cancellazioni (per esempio dopo aver cancellato tutti i numeri di h in h ad eccezione di h), il primo numero non cancellato sia k,

non solamente è primo il numero k, *come si è testè dimostrato, ma sono primi altresì tutti i numeri non cancellati compresi fra* k *e* k^2.

Ammettiamo infatti, se è possibile, che un certo numero N, non cancellato e compreso fra k e k^2, non fosse primo. Esso sarebbe allora il prodotto di due o più fattori primi (art. 183) dei quali almeno uno, p, esser dovrebbe inferiore a k; poichè se tutti fossero eguali o maggiori di k, il loro prodotto N sarebbe evidentemente uguale o superiore a k^2 contro il supposto. Ma, il numero p essendo primo e inferiore a k, tutti i suoi multipli, sono già stati precedentemente cancellati. Il numero N sarebbe dunque già stato cancellato contro il supposto.

189. Quanto si è dimostrato testè ha per conseguenza importante che la cancellazione dei numeri non primi che non superano un dato numero M, avrà termine appenachè si giunga ad un numero primo k il cui quadrato sia superiore ad M.

Note ed Esercizi.

1. Riconoscere che quando, col procedimento indicato per la ricerca dei numeri primi inferiori ad M, si cancellano tutti i numeri di k in k ad eccezione dello stesso k, il primo numero che si dovrà effettivamente cancellare è precisamente k^2.

2. Per riconoscere se un numero dato N è primo, basta, conoscendosi i numeri primi il cui quadrato è inferiore ad N, di verificare se la divisione di N per uno almeno di questi ultimi dia per resto zero. Se nessuna divisione dia per resto zero, il numero N sarà un numero primo.

3. Dall'esame delle tavole di numeri fino ad oggi costruite risulta che vi sono 26 numeri primi inferiori a 100; 169 inferiori a 1000; 1230 inferiori a 10000; 9592 inferiori a 100000 e 78493 inferiori ad 1000000.

§ 15.° — Massimo comun divisore e minimo multiplo di numeri decomposti in fattori primi.

190. *Il massimo comun divisore* (cfr. § 11.°) *di più numeri decomposti nei loro fattori primi è il prodotto dei fattori primi comuni a tutti i numeri, presi ciascuno col minimo esponente.* S'intende cioè che, nella composizione del massimo comun divisore, ogni numero primo dev' essere preso, come fattore, elevato ad una potenza eguale a quella in cui esso si presenta, nei numeri decomposti, col minimo esponente.

Sia infatti p un fattore primo del numero D massimo comun divisore dei numeri dati A, B, C, ..., e sia p^α la massima potenza di p che divide D. Poichè p^α divide D, ciascuno dei numeri A, B, C, ... sarà divisibile per p^α. Inoltre p^α sarà, almeno per uno dei numeri A, B, C, ..., la massima potenza di p che lo divide. Invero, ove così non fosse, ciascuno dei numeri A, B, C, ... sarebbe divisibile per $p^{\alpha+1}$; e per conseguenza anche il loro massimo comun divisore D esser dovrebbe (art. 167) divisibile per $p^{\alpha+1}$, contro il supposto.

191. Corollario. — *Affinchè un numero* A *sia divisibile per un altro numero* B, *è necessario e sufficiente che i fattori primi di* B

siano anche fattori primi di A *e che l' esponente di ogni fattore primo in* B *sia uguale o minore all'esponente di quello stesso fattore primo in* A.

Infatti, se B è divisore di A, il massimo comun divisore di A e di B è lo stesso B, e reciprocamente.

192. Di qui segue che se

$$A = p^a q^b r^c \ldots s^d$$

è il numero A decomposto nei suoi fattori primi distinti $p, q, r, \ldots, s$, ogni divisore di A è della forma:

$$p^\alpha q^\beta r^\gamma \ldots s^\delta$$

essendo;

$$\alpha \lesseqgtr a,\ \beta \lesseqgtr b,\ \gamma \lesseqgtr c, \ldots, \delta \lesseqgtr d$$

e reciprocamente.

È dunque assai facile trovare tutti i divisori di un numero dato A, dopochè si sia fatta la decomposizione di A nei suoi fattori primi.

193. *Il minimo comune multiplo di più numeri è il prodotto di tutti i fattori primi nei quali essi si decompongono, presi ciascuno col massimo esponente.*

Siano infatti $p, q, r, \ldots$ i fattori primi distinti che nascono dal decomporre i numeri A, B, C, ... dei quali si voglia determinare il minimo comune multiplo M. Se p^α è la massima potenza di p che divide almeno uno dei numeri A, B, C, ..., p. es. A, è chiaro che M, essendo divisibile per A, sarà divisibile per p^α. Similmente si vede che M sarà divisibile per $q^\beta, r^\gamma, \ldots$ essendo $q^\beta, r^\gamma, \ldots$ le massime potenze di $q, r, \ldots$ che dividono almeno uno dei numeri A, B, C, ... Il numero M essendo divisibile per i numeri $p^\alpha, q^\beta, r^\gamma, \ldots$, due qualunque dei quali sono primi fra loro, sarà (cfr. art. 173) anche divisibile per il loro prodotto $p^\alpha q^\beta r^\gamma \ldots$ Reciprocamente ogni multiplo di $p^\alpha q^\beta r^\gamma \ldots$ è evidentemente un multiplo comune di A, B, C, ... Sarà dunque appunto $p^\alpha q^\beta r^\gamma \ldots$ il loro minimo multiplo, c. d. d.

§ 16.° — Radice del massimo quadrato contenuto in un numero dato.

194. Se A è la potenza n^{esima} di un numero a, si dice che a è la *radice* n^{esima} di A e si scrive:

$$a = \sqrt[n]{A}$$

come equivalente dell'uguaglianza: $a^n = A$. Il simbolo $\sqrt{\ }$ si chiama simbolo *radicale* e il simbolo $\sqrt[n]{\ }$ si legge *radice* n^{esima}.

In particolare, se A è il quadrato di a, si dice che a è radice quadrata di A e si scrive:

$$a = \sqrt[2]{A},$$

o più semplicemente:

$$a = \sqrt{A}.$$

195. Se A è un numero qualunque, non esiste in generale un numero naturale il cui quadrato sia A. Esiste però sempre un numero naturale α, perfettamente determinato, il cui quadrato sia il massimo quadrato contenuto in A; cosicchè:

$$\alpha^2 \gtreqless A < (\alpha + 1)^2.$$

In questo § noi ci occuperemo appunto della ricerca del numero α così definito, che si chiama spesso la *radice quadrata, a meno di un'unità, del numero* A.

196. *Se α è la radice quadrata, a meno di un'unità, del numero* A, *la radice quadrata, a meno di un' unità, del numero che nasce dall' aggiungere alla destra delle cifre di* A *due nuove cifre* $\bar{b}\,\bar{c}$, *si otterrà aggiungendo un'unica cifra* β *alla destra delle cifre di* α.

In altri termini: se n è la base del sistema di numerazione (cosicchè b e c sono inferiori ad n), la radice del massimo quadrato contenuto in $An^2 + bn + c$ è della forma $\alpha n + \beta$, essendo $\beta < n$.

Invero, poichè:

$$bn + c = \bar{b}\,\bar{c} < \bar{1}\,\bar{0}\,\bar{0} = n^2,$$

si ha:

$$An^2 \gtreqless An^2 + (bn + c) < An^2 + n^2$$

o anche:

$$An^2 \gtreqless An^2 + bn + c < (A + 1)n^2. \qquad (1)$$

Ma, per l' ipotesi fatta:

$$\alpha^2 \gtreqless A < (\alpha + 1)^2,$$

onde:

$$\alpha^2 \gtreqless A \quad , \quad A + 1 \gtreqless (\alpha + 1)^2.$$

Segue quindi dalla (1) a maggior ragione:

$$\alpha^2 n^2 \gtreqless An^2 + bn + c < (\alpha + 1)^2 n^2$$

ossia anche:

$$(\alpha n)^2 \gtreqless An^2 + bn + c < (\alpha n + n)^2.$$

La radice del massimo quadrato contenuto in $An^2 + bn + c$ sarà dunque uguale o maggiore di αn e minore di $\alpha n + n$, cioè sarà appunto della forma $\alpha n + \beta$ (per $\beta < n$), come si è asserito.

197. La differenza $A - \alpha^2$, che indicheremo con R, fra il numero A e il massimo quadrato in esso contenuto si chiama il *resto del massimo quadrato contenuto in* A.

Ciò posto, poichè la cifra β da aggiungersi alla destra delle cifre di α per avere, secondo l' art. prec., la radice del massimo quadrato contenuto in $A\bar{b}\,\bar{c}$, è il massimo numero, minore di n, che soddisfa la diseguaglianza:

$$(\alpha n + \beta) \gtreqless A\bar{b}\,\bar{c}$$

ossia:

$$\alpha^2 n^2 + 2\alpha\beta n + \beta^2 \overline{\leqq} An^2 + bn + c,$$

possiamo anche dire (come si vede togliendo dai due membri $\alpha^2 n^2$) che *la cifra β è la massima cifra soddisfacente la diseguaglianza*:

$$(2\alpha n + \beta)\beta \overline{\leqq} Rn^2 + bn + c. \qquad (2)$$

198. Poichè dall' uguaglianza (2) segue a maggior ragione, essendo $c < n$:

$$2\alpha\beta n < Rn^2 + bn + n$$

cioè:

$$2\alpha\beta < Rn + b + 1,$$

essa non potrà essere soddisfatta se non quando sia:

$$2\alpha\beta \overline{\leqq} Rn + b;$$

cosicchè *la cifra β non può in alcun caso superare il quoziente della divisione di* Rn + b *per* 2α.

Per conseguenza, detto q questo quoziente, la cifra β è il primo dei numeri q, $q-1$, $q-2$, ... che sostituito in (2) la rende soddisfatta. È chiaro che mediante quest' osservazione si possono diminuire i tentativi da farsi per la determinazione pratica della cifra β.

199. Esempio. — Sapendo che (nel sistema a base n uguale a *dieci*) il massimo quadrato contenuto in 1878 ha per radice 43 e per resto 29, ricerchiamo la radice del massimo quadrato contenuto in 187832.

In questo caso si ha:

$$A = 1878\ ,\ b = 3\ ,\ c = 2\ ,\ \alpha = 43\ ,\ R = 29.$$

Per determinare la cifra β che dovrà scriversi alla destra di 43 per avere la radice del massimo quadrato contenuto in 187832, comincieremo dall'osservare che essa non può superare il quoziente della divisione di $Rn+b$ per 2α, cioè di 293 per $43\times2=86$, che è 3.

Per riconoscere poi se la cifra 3 è proprio quella cercata, dobbiamo *provarla*, cioè verificare (art. 197) se per $\beta = 3$ sia soddisfatta la (2), osservando a tale oggetto che $2\alpha n + \beta$ è il numero che si ottiene scrivendo la cifra β alla destra del numero 2α già calcolato e che $Rn^2 + bn + c$ è il numero che nasce dallo scrivere la cifra c a destra del numero $Rn + b$; cosicchè si tratta, nel nostro caso, di verificare se sia:

$$863 \times 3 \overline{\leqq} 2932.$$

Poichè è appunto così, è 3 la cifra delle unità; cioè la radice del massimo quadrato contenuto in 187832 è 433. In caso contrario, si sarebbe dovuto provare per β la cifra immediatamente inferiore a 3; e così via.

200. Applicando più volte di seguito la regola testè spiegata, si

potrà evidentemente calcolare la radice quadrata, a meno di un'unità, di un numero qualsivoglia N. Invero basterà a tale oggetto decomporre le cifre di N in gruppi di due cifre a cominciare da destra; e dopo aver trovato, a prima vista, la radice del numero rappresentato dal primo gruppo di sinistra (che è di una sola cifra o di due cifre al più) determinare poi, colla regola spiegata, quella del numero che si ottiene aggiungendo al primo gruppo di sinistra le cifre del secondo gruppo di sinistra, dipoi colla stessa regola quella del numero rappresentato dai primi tre gruppi di sinistra, e così di seguito.

Da questo procedimento emerge chiaramente che il numero delle cifre della radice coincide col numero dei gruppi in cui sono state distinte le cifre di N. In altri termini: *se un numero si compone di* 2m *o di* 2m−1 *cifre, la sua radice quadrata a meno di un' unità ha precisamente* m *cifre.*

201. È utile di dimostrare questo teorema più direttamente, generalizzandolo al tempo stesso come segue: *se l'espressione di un numero* A *si compone di* km−k′ *cifre* (*essendo* k′ < k), *la sua radice* k^{esima}, *a meno di unità, si compone precisamente di* m *cifre.*

Sia, infatti, α la radice k^{esima}, a meno di un' unità, del numero A, cosicchè:

$$\alpha^k \leqq A \quad , \quad A < (\alpha+1)^k. \tag{3}$$

Poichè l'espressione di A, secondo la base n, si compone di $km-k'$ cifre, si ha (art. 137):

$$n^{mk-k'-1} \leqq A$$

e quindi per la seconda delle (3):

$$n^{mk-k'-1} < (\alpha+1)^k,$$

d' onde segue anche, poichè $k'+1 \leqq k$:

$$n^{mk-k} < (\alpha+1)^k,$$

e quindi anche:

$$m^{m-1} < \alpha + 1,$$

o, che è la stessa cosa:

$$n^{m-1} \leqq \alpha. \tag{4}$$

D'altra parte si ha anche (art. 137), essendo $km-k'$ il numero delle cifre di A:

$$A < n^{mk-k'}$$

d'onde per la prima delle (3):

$$\alpha^k < n^{mk-k'}$$

e a maggior ragione:

$$\alpha^k < n^{mk},$$

cosicchè:

$$\alpha < n^m. \tag{5}$$

Così resta dimostrato quanto si voleva, poichè le (4) e (5) ci dicono appunto (art. 137) che l'espressione di a si compone di m cifre.

Note ed Esercizi.

1. Se α è la radice del massimo quadrato contenuto in A, il numero delle cifre di α^2 coincide, quando esso è pari, col numero delle cifre di A; se invece è dispari, può essergli inferiore di una unità.

2. Affinchè il numero delle cifre di α^2 sia inferiore di un'unità al numero delle cifre di $(\alpha+1)^2$, è necessario e sufficiente che α^2 sia il massimo quadrato inferiore ad una potenza della base del sistema di numerazione.

Esempio. — 81 è il massimo quadrato inferiore a 100, che è il quadrato successivo ad 81 ed ha una cifra di più; 961 ($=31^2$) è il massimo quadrato contenuto in 1000, e il quadrato successivo a 961, cioè 1024 ($=32^2$), ha una cifra di più.

3. Si cerchino dei teoremi analoghi per le radici k^{esime} a meno di un'unità, essendo k qualunque.

§ 17.° — Risoluzione dell'equazione pitagorica: $x^2 + y^2 = z^2$.

202. Evidentemente, possiamo ritenere che due qualunque dei tre numeri cercati x, y, z soddisfacenti l'equazione:

$$x^2 + y^2 = z^2 \tag{1}$$

siano primi fra loro; poichè se, per esempio, x ed y avessero un divisore primo comune d, questo dovrebbe dividere anche z, cosicchè l'equazione (1) potrebbe semplificarsi, pur mantenendo la stessa forma, dividendone i tre termini per d^2.

In virtù di questo supposto, se l'equazione (1) si scrive sotto la forma equivalente:

$$y^2 = (z+x)(z-x), \tag{1'}$$

si vede che i due fattori $z+x$ e $z-x$ non debbono avere alcun divisore dispari in comune. Invero, se fosse d un divisore dispari di $z+x$ e di $z-x$, dovrebbe esso dividere anche la loro somma $2z$ e la loro differenza $2x$ e quindi anche, essendo esso dispari, z ed x, contrariamente a quanto si richiede, cioè che z ed x siano primi fra loro.

203. Ciò premesso, sia p un divisore primo dispari di $z+x$ e p^λ la massima potenza di p che divide $z+x$. Sarà ancora p^λ la massima potenza di p che divide $(z+x)(z-x)$, giacchè $z-x$ non è, per quanto si è or ora notato, divisibile per p. È dunque p^λ la massima potenza di p che divide y^2; cosicchè λ è necessariamente pari. Di qui segue evidentemente che $z+x$ è della forma:

$$z + x = 2^m \cdot u^2; \tag{2}$$

e affatto similmente si proverà essere:

$$z - x = 2^n \cdot v^2 \tag{3}$$

essendo u e v numeri dispari primi fra loro.

204. Dalle (2) e (3) sommate, ovvero sottratte, membro a membro si deduce ora:

$$x = \frac{2^m u^2 - 2^n v^2}{2}, \quad z = \frac{2^m u^2 + 2^n v^2}{2}$$

e dalle stesse (2) e (3) paragonate con (1)':

$$y = 2^{\frac{m+n}{2}} uv.$$

Reciprocamente, prendendo a piacere i numeri u, v, m, n, queste espressioni di x, y, z, se hanno significato di numeri naturali (il che accadrà, come è facile riconoscere, quando $m+n$ sia pari e quando inoltre m, n siano entrambi uguali a zero ovvero entrambi diversi da zero) soddisfano, come subito si riconosce, l'equazione (1).

205. Per $m = n = 0$, si hanno dunque primieramente le formole di risoluzione:

$$x = \frac{u^2 - v^2}{2}, \quad y = uv, \quad z = \frac{u^2 + v^2}{2} \tag{I}$$

le quali, comunque si scelgano u, v, purchè dispari e primi fra loro, daranno sempre per x, y, z dei numeri primi fra loro due a due.

Per $m = 1 + \mu$ ed $n = 1 + \nu$, si avrebbero le formole di risoluzione:

$$x = 2^\mu u^2 - 2^\nu v^2, \quad y = 2 \cdot 2^{\frac{\mu+\nu}{2}} uv, \quad z = 2^\mu u^2 + 2^\nu v^2$$

nelle quali, però, almeno uno dei due numeri μ, ν dovrà prendersi eguale a zero (e quindi l'altro della forma $2k$), senza di che x, y, z avrebbero il divisore comune 2. Alle risoluzioni del tipo (I) sono dunque soltanto da aggiungersi quelle del tipo:

$$x = 4^k u^2 - v^2, \quad y = 2^{k+1} uv, \quad z = 4^k u^2 + v^2 \tag{II}$$

e quelle del tipo:

$$x = u^2 - 4^k v^2, \quad y = 2^{k+1} uv, \quad z = u^2 + 4^k v^2. \tag{III}$$

206. Le soluzioni dei tipi (II) e (III) sono caratterizzate dall'essere in esse il numero y necessariamente pari, nel mentre che nelle (I) è invece y necessariamente dispari. Intanto, se la (1) è verificata da certi numeri x, y, z essa lo è evidentemente anche se si scambino fra loro x ed y. Poichè ora facendo questo scambio nelle (II) o nelle (III) le y diverrebbero dispari, è chiaro che le (II) e (III) devono ricadere mediante questo scambio nelle (I).

Concludiamo dunque che tutti i sistemi di numeri x, y, z, primi fra loro, che soddisfano l'equazione (1) sono dati dai seguenti due tipi:

$$x = \frac{u^2 - v^2}{2}, \quad y = uv, \quad z = \frac{u^2 + v^2}{2} \tag{I}$$

ovvero:

$$x = uv,\ y = \frac{u^2 - v^2}{2},\ z = \frac{u^2 + v^2}{2}, \qquad \text{(I)}'$$

essendo u, v numeri dispari primi fra loro che possono scegliersi ad arbitrio.

Note ed Esercizi.

1. Riconoscere direttamente che i numeri della forma:

$$2^{k+1}uv$$

(che è quanto dire i numeri pari) sono anche della forma:

$$\frac{u^2 - v^2}{2}$$

e reciprocamente (con u e v s'intendono ancora numeri dispari primi fra loro).

2. Riconoscere che se il quadrato di un numero è la somma di due quadrati primi fra loro, il doppio del numero è pure la somma di due quadrati primi fra loro, e reciprocamente.

3. Si applichi ciò a decomporre il quadrato di 41 nella somma di due quadrati.

4. Con procedimento analogo a quello degli articoli 202 e 203 si risolverà più generalmente l'equazione:

$$x^2 + By^2 = z^2, \qquad (\alpha)$$

essendo B un numero fissato a piacere. Si potrà sempre ritenere che B non ammetta come divisore alcun quadrato esatto; poichè, se fosse $B = b^2c$, ponendo $by = y'$, l'equazione (α) si ridurrebbe ad

$$x^2 + cy'^2 = z^2.$$

Inoltre si potrà poi richiedere, in secondo luogo, che x, y, z debbano essere primi fra loro due a due; poichè se, p. es., x e z avessero un divisore primo d in comune, dovrebbe By^2 essere divisibile per d^2, e quindi anche y divisibile per d; giacchè altrimenti dovrebbe B essere divisibile per d^2 contro il supposto.

Ciò premesso, scritta la (α) sotto la forma:

$$(z + x)(z - x) = By^2,$$

essa si potrà risolvere ponendo:

$$z + x = \mu u^2,\ z - x = \nu v^2,\ y = uv,\ B = \mu\nu,$$

d'onde

$$x = \frac{\mu u^2 - \nu v^2}{2},\quad y = uv,\quad z = \frac{\mu u^2 + \nu v^2}{2}. \qquad (\beta)$$

Reciprocamente, le (β) soddisferanno ad (α) comunque si spezzi B nel prodotto di due fattori μ, ν.

CAPITOLO III.

ELEMENTI DI ANALISI COMBINATORIA

§ 1.° — Disposizioni, permutazioni, inversioni nelle permutazioni.

207. Il numero di modi differenti secondo cui, sopra k posti disti, si possono distribuire altrettanti oggetti da scegliersi a piacere fra n oggetti distinti dati, si dice numero delle *disposizioni degli* n *oggetti*, k a k. Naturalmente il numero k dei posti deve supporsi non maggiore del numero n degli oggetti. Noi indicheremo questo numero con $D_{n,k}$.

Se $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sono gli oggetti dati, una disposizione qualunque k a k si può rappresentare coll' allineamento

$$a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}$$

dove $i_1, i_2, \ldots, i_k$ sono k numeri distinti scelti fra $1, 2, \ldots, n$ e dove l'ordine dell' allineamento esprime che al primo dei posti si è situato l'oggetto a_{i_1}, al secondo l'oggetto a_{i_2}, ecc.

208. Fra le $D_{n,k}$ disposizioni così costruite ve ne sono $D_{n-1,k-1}$ nelle quali il primo posto si trova occupato da a_1; poichè, una volta situato a_1 al primo posto, si potranno poi disporre a piacere, sui $k-1$ posti che restano, gli altri $n-1$ oggetti, cioè appunto in $D_{n-1,k-1}$ modi distinti.

Similmente si vede che fra le $D_{n,k}$ disposizioni ve ne saranno $D_{n-1,k-1}$ che al primo posto hanno l'oggetto a_2, e così di seguito. Poichè dunque le $D_{n,k}$ disposizioni sono costituite da $D_{n-1,k-1}$ disposizioni che cominciano con a_1, da $D_{n-1,k-1}$ che cominciano con a_2, ecc. e gli oggetti che possono portarsi al primo posto sono n, si avrà evidentemente

$$D_{n,k} = n \cdot D_{n-1,k-1}. \qquad (1)$$

Da questa relazione generale, diminuendo in essa successivamente n e k di un' unità, se ne deducono le altre seguenti

$$D_{n-1,k-1} = (n-1)D_{n-2,k-2}$$
$$D_{n-2,k-2} = (n-2)D_{n-3,k-3}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$D_{n-k+2,2} = (n-k+2)D_{n-k+1,1}$$

dalle quali moltiplicate fra loro membro a membro si trae, osservando che si ha evidentemente $D_{n-k+1, 1} = n - k + 1$:

$$D_{n, k} = n(n-1)(n-2)(n-3)\dots(n-k+2)(n-k+1). \qquad (2)$$

Il numero $D_{n, k}$ *è dunque uguale al prodotto di* k *numeri interi consecutivi decrescenti a cominciare da* n.

209. Se supponiamo in particolare di prendere $k = n$, si avranno le disposizioni di n oggetti sopra n posti. In tal caso esse si chiamano piuttosto *permutazioni* degli n oggetti od elementi dati sopra gli n posti, o semplicemente permutazioni di n elementi. Il loro numero s'indicherà con P_n. Se dunque nella (2) si faccia $k = n$, si avrà:

$$P_n = D_{n, n} = n(n-1)(n-2)\dots, 3.2.1 = \underline{|n}. \qquad (3)$$

Cioè: *il numero delle permutazioni di* n *elementi distinti è uguale al prodotto dei numeri naturali da* 1 *ad* n.

Questo numero si indica con $\underline{|n}$ o anche con $n!$ e si chiama *fattoriale* o anche *facoltà* di n.

210. Se gli n elementi si designano con $a_1, a_2, a_3 \dots, a_n$, si chiamerà permutazione *fondamentale* quella fra le $\underline{|n}$ permutazioni nella quale ogni elemento occupa il posto corrispondente al proprio indice. Essa è rappresentata dall' allineamento

$$a_1 a_2 a_3 \dots a_n$$

dal quale si dedurranno poi tutte le altre permutazioni invertendo in tutti i modi possibili l' ordine degli oggetti, il che si può fare metodicamente come segue.

Si comincia dallo scrivere (supponendo p. es. per fissare le idee $n = 5$, la permutazione fondamentale

$$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$$

e da questa se ne deduce una seconda

$$a_2 a_1 a_3 a_4 a_5$$

scambiando il secondo elemento col primo.

Ognuna di queste due permutazioni, scambiando in essa l' elemento che si trova al terzo posto con l'uno o con l'altro dei due precedenti, ne darà altre due, cosicchè in tutto si avranno le 2.3 permutazioni

$$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5, \quad a_3 a_2 a_1 a_4 a_5, \quad a_1 a_3 a_2 a_4 a_5$$

$$a_2 a_1 a_3 a_4 a_5, \quad a_3 a_1 a_2 a_4 a_5, \quad a_2 a_3 a_1 a_4 a_5$$

le quali diventeranno 2.3.4 se in ognuna di esse si cambierà l'elemento che sta al quarto posto con ciascuno dei precedenti. Finalmente se in ognuna di queste ultime si cambi l' ultimo elemento con ciascuno dei 4 precedenti, si avranno in tutto le 2.3.4.5 permutazioni dei 5 elementi dati.

211. Sia $a_1 a_2 a_3 \ldots a_n$ la permutazione fondamentale degli n elementi. In essa gli indici degli elementi si seguono nell' ordine naturale; ma se invece si consideri una qualunque delle altre permutazioni, accadrà certamente di trovare qualche elemento seguito, immediatamente o no, da un elemento di indice più piccolo. Si dice allora che questi due elementi si trovano in *inversione.* Così per es., partendo dalla permutazione fondamentale $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$, in cui non ci sono inversioni, e formando la permutazione $a_1 a_4 a_5 a_2 a_3$, si vede che in quest' ultima gli elementi a_4 ed a_2 si trovano in inversione.

Per trovare quale sia il numero totale di inversioni contenute in una data permutazione, basterà paragonare ogni elemento con ciascheduno di quelli che si trovano scritti dopo di esso e vedere se vi sia o no inversione. Così p. e. nella permutazione ora scritta vi sono in tutto 4 inversioni, cioè di a_4 con a_2, di a_4 con a_3, di a_5 con a_2 e con a_3.

212. Di tutte le $\lfloor n$ permutazioni degli n elementi si chiameranno *permutazioni di classe pari* quelle in cui si trovi un numero pari di inversioni e *permutazioni di classe dispari* quelle in cui il numero di inversioni sia dispari. Così p. es. delle sei permutazioni di a_1, a_2, a_3 tre sono di classe pari: $a_1 a_2 a_3$ (0 inv.), $a_2 a_3 a_1$ (2 inv.), $a_3 a_1 a_2$ (2 inv.), e tre di classe dispari: $a_2 a_1 a_3$ (1 inv.), $a_1 a_3 a_2$ (1 inv.), $a_3 a_2 a_1$ (3 inv.).

213. Teorema. — *Se in una permutazione si scambiano fra di loro due elementi qualisivogliano, la permutazione cambia di classe.*

Sieno infatti a_h ed a_k gli elementi che si vogliano scambiare in una data permutazione; e cominciamo dal supporre che essi si trovino scritti consecutivamente, cosicchè, indicando complessivamente con A la successione degli elementi scritti prima di a_h e con B quella degli elementi scritti dopo di a_k, la permutazione sarà della forma

$$\mathrm{A} a_h a_k \mathrm{B}$$

e scambiando fra loro a_h ed a_k prenderà invece la forma

$$\mathrm{A} a_k a_h \mathrm{B}.$$

Se ora si esaminano le inversioni fatte dagli elementi di A coi successivi, è chiaro che il risultato dell'esame sarà lo stesso tanto nella prima che nella seconda permutazione, e lo stesso dicasi per riguardo alle inversioni che gli elementi di B possono fare così fra loro come con a_h ed a_k. Soltanto nel confronto di a_h con a_k si avrà risultato opposto nelle due permutazioni; cioè la seconda permutazione avrà un' inversione di più, ovvero un' inversione di meno della prima, secondochè h sia minore o maggiore di k. In entrambi i casi la classe sarà passata dal pari al dispari o viceversa, cioè si sarà cambiata classe.

Supponiamo in secondo luogo che a_h ed a_k non siano consecutivi, ma che fra essi si trovino compresi altri λ elementi il cui complesso indicheremo con C. La permutazione primitiva sarà allora della forma

$$\mathrm{A} a_h \mathrm{C} a_k \mathrm{B} \qquad (4)$$

nel mentre che collo scambio di a_h con a_k diventerebbe:

$$Aa_kCa_hB. \tag{5}$$

Se ora nella (4) scambiamo l' elemento a_h con l'elemento consecutivo a destra e così consecutivamente con tutti i λ elementi di C e per ultimo anche con a_k, la permutazione (4) si cambia in

$$ACa_ka_hB \tag{6}$$

dopo essersi effettuati, per quanto si è dimostrato poco fa, $\lambda + 1$ cambiamenti successivi di classe. Se poi nella (6) scambiamo a_k successivamente con ognuno dei λ elementi di C, è chiaro che la (6) prenderà appunto la forma (5), ed il cambiamento di classe si sarà effettuato altre λ volte. In tutto si sono fatti così $2\lambda + 1$ cambiamenti di classe, cioè la permutazione (4), per prendere la forma (5), sarà passata alternativamente dalla classe pari alla classe dispari un numero di volte uguale a $2\lambda + 1$, che è un numero dispari; epperò essa si troverà in ultimo nella classe opposta a quella in cui era prima, c. d. d.

214. *Di tutte le permutazioni di* n *elementi, il numero di quelle di classe pari è quanto il numero di quelle di classe dispari.*

Immaginiamo infatti di avere scritte tutte le $\underline{|n}$ permutazioni degli n elementi e di scambiare quindi in tutte le permutazioni un certo elemento con un altro. È chiaro che, fatta astrazione dall' ordine, si avranno sempre le stesse $\underline{|n}$ permutazioni degli elementi. Intanto, pel teorema precedente, le permutazioni di classe pari saranno divenute di classe dispari e viceversa. Quindi il numero delle prime deve essere necessariamente uguale al numero delle seconde.

Esercizi

1. Riconoscere che: $D_{m,k} = D_{m,h} \cdot D_{m-h,k-h}$.

2. Il massimo numero di inversioni che può avere una permutazione degli n elementi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ è dato da $\frac{n(n-1)}{2} = N$. Esiste una sola permutazione che ha le N inversioni; ne esistono $n-1$ che ne hanno $N-1$; ne esistono $\frac{(n+1)(n-2)}{2}$ che ne hanno $N-2$.

3, Esistono tante permutazioni di n elementi che hanno un certo numero λ d' inversioni, quante ne esistono che ne hanno $\frac{n(n-1)}{2} - \lambda$.

4. Verificare che delle 24 permutazioni di 4 elementi ve ne sono risp. 1, 3, 5, 6, 5, 3, 1 che hanno risp. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 inversioni.

5. Per sapere quante siano le permutazioni di n elementi che hanno λ inversioni, basta vedere in quanti modi si possono determinare $n-1$ numeri positivi $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{n-1}$ risp. non superiori ad $1, 2, 3, \ldots, n-1$ tali che si abbia sempre

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_{n-1} = \lambda.$$

6. Quante sono le permutazioni di n oggetti in cui ogni oggetto ha cambiato posto? Ovvero m dati oggetti hanno cambiato posto?

7. Riconoscere che il numero delle disposizioni di n oggetti sopra k posti ($n \gtreqless k$) è uguale al numero delle disposizioni di k oggetti sopra n posti (restando vacanti in ogni disposizione $n - k$ posti).

§ 2.° — Combinazioni semplici. — Potenza del binomio.

215. Si chiamano *combinazioni* di m oggetti n ad $n (n \lesseqgtr m)$ i diversi modi nei quali cogli m oggetti dati si può comporre un gruppo di soli n oggetti. Così, p. es., con tre elementi a_1, a_2, a_3 si possono formare soltanto tre gruppi ciascuno di due oggetti, cioè:

$$a_1 a_2 \ , \ a_1 a_3 \ , \ a_2 a_3 .$$

Avevamo visto invece (art. 208) potersi formare sei disposizioni di questi oggetti due a due, rappresentabili con:

$$a_1 a_2 \ , \ a_2 a_1 \ , \ a_1 a_3 \ , \ a_3 a_1 \ , \ a_2 a_3 \ , \ a_3 a_2 .$$

Si riconosce così che le due disposizioni distinte $a_1 a_2$ ed $a_2 a_1$ non contano che per una stessa combinazione.

In generale si vede che, per formare tutte le disposizioni degli m oggetti n ad n, si potrà cominciare dal formarne prima tutte le combinazioni; eseguendo quindi fra gli n oggetti di ciascuna combinazione le $P_n = \lfloor n$ permutazioni possibili, si otterranno appunto le disposizioni cercate.

Pertanto, se indichiamo con $C_{m,n}$ il numero delle combinazioni di m oggetti n ad n, si avrà evidentemente la relazione

$$D_{m,n} = C_{m,n} \cdot P_n$$

dalla quale si deduce (art. 208-209).

$$C_{m,n} = \frac{D_{m,n}}{P_n} = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{1.2.3\dots n}. \qquad (1)$$

216. La frazione $\frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1.2.3\dots n}$ si suole spesso indicare brevemente col simbolo $\binom{m}{n}$ che si legge *m sopra n*. Moltiplicandone il numeratore ed il denominatore per $\lfloor m-n$ la sua espressione può anche scriversi:

$$\binom{m}{n} = \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{\lfloor n} = \frac{\lfloor m}{\lfloor n \lfloor m-n}, \qquad (2)$$

Se ora nella formola

$$C_{m,n} = \frac{\lfloor m}{\lfloor n \lfloor m-n} \qquad (3)$$

cambiamo n in $m-n$, essa ci dà

$$C_{m,m-n} = \frac{\lfloor m}{\lfloor (m-n) \lfloor m-(m-n)} = \frac{\lfloor m}{\lfloor m-n \lfloor n},$$

onde

$$C_{m, m-n} = C_{m, n}$$

cioè: *il numero delle combinazioni di* m *oggetti* n *ad* n *è uguale al numero delle combinazioni degli stessi* m *oggetti* m — *n ad* m — n.

217. Le combinazioni k a k degli m elementi $a_1, a_2, \ldots, a_m$ possono opportunamente rappresentarsi come il prodotto di k fra questi elementi, considerati come numeri, in quanto il valore del prodotto è indipendente dall' ordine dei fattori, precisamente come nella combinazione si ha soltanto riguardo agli elementi che si sono scelti per comporla, senza dare alcun significato all' ordine con gli elementi scelti vengono scritti. Ed invero la costruzione effettiva di queste combinazioni è spontaneamente reclamata dal problema algebrico dello sviluppo del prodotto di m binomi:

$$(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \ldots (a_m + b_n). \tag{4}$$

Un termine qualunque dello sviluppo è della forma

$$a_\alpha a_\beta \ldots a_\delta b_\lambda b_\mu \ldots b_\rho. \tag{5}$$

Il numero complessivo dei fattori a e b che lo compongono, è evidentemente uguale ad m e gli m indici

$$\alpha, \beta, \ldots, \delta, \lambda, \mu, \ldots, \rho$$

coincidono nel loro insieme, cogli m indici $1, 2, \ldots, m$, giacchè il termine (5) deve contenere uno dei due elementi che compongono uno qualunque dei binomi $a_i + b_i$. Da quest' ultima proprietà segue che il termine (5) è perfettamente determinato, appenachè se ne conoscano i k fattori $a_\alpha, a_\beta, \ldots, a_\delta$, giacchè gli altri $m - k$ fattori si otterranno prendendo per $\lambda, \mu, \ldots, \rho$ i rimanenti $m - k$ indici, che non fanno parte del gruppo $\alpha, \beta, \ldots, \delta$. Dopo ciò è chiaro che *quei termini* (5) *che sono del grado* k *nelle* $a_1, a_2, \ldots, a_m$, *sono tanti quante le combinazioni di questi elementi* k *a* k, *cioè* $\binom{m}{k}$.

218. Se sia in particolare $b_1 = b_2 = \ldots b_m = b$, i termini (5) prendono la forma più semplice:

$$a_\alpha a_\beta \ldots a_\delta b^{m-k},$$

cosicchè la somma di quei termini dello sviluppo (4), che sono del grado k nelle $a_1, a_2, \ldots, a_m$, è data in questo caso da:

$$b^{m-k} \cdot \Sigma a_\alpha a_\beta \ldots a_\delta,$$

dove la sommatoria esprime la somma degli $\binom{m}{k}$ prodotti che si ottengono facendo le combinazioni k a k delle $a_1, a_2, \ldots, a_m$.

Si ha dunque il seguente sviluppo:

$$(a_1+b)(a_2+b)\ldots(a_m+b)=b^m+A_1 b^{m-1}+A_2 b^{m-2}+\ldots+A_m \tag{6}$$

dove:

$$A_1 = a_1 + a_2 + \ldots + a_m$$
$$A_2 = a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 + \ldots$$
$$A_3 = a_1a_2a_3 + a_2a_3a_4 + \ldots$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$A_m = a_1a_2a_3 \ldots a_m.$$

219. Se nella formola (6) poniamo poi $a_1 = a_2 \ldots = a_m = a$, è chiaro che gli $\binom{m}{k}$ prodotti di cui si compone A_k, si ridurranno tutti al valore comune a^k; cosicchè A_k prenderà il valore $\binom{m}{k}\cdot a^k$ e la (6) ci darà in tal caso lo sviluppo della potenza di un binomio:

$$(a+b)^m = b^m + \binom{m}{1}ab^{m-1} + \binom{m}{2}a^2b^{m-2} + \ldots + \binom{m}{m}a^m \tag{7}$$

il che si può anche scrivere:

$$(b+a)^m = b^m + \binom{m}{1}ab^{m-1} + \binom{m}{2}a^2b^{m-2} + \ldots$$
$$+ \binom{m}{2}a^{m-2}b^2 + \binom{m}{1}a^{m-1}b + a^m, \tag{8}$$

poichè, in virtù della formola

$$\binom{m}{n} = \binom{m}{m-k}$$

dimostrata all' art. 216, si vede che degli $m+1$ *coefficienti binomiali dell' ordine* m

$$\binom{m}{0} = 1,\ \binom{m}{1},\ \binom{m}{2}, \ldots, \binom{m}{m-1},\ \binom{m}{m}$$

sono eguali fra loro due a due quelli situati simmetricamente rispetto ai due estremi.

220. Applicheremo finalmente la formola binomiale alla ricerca del valore della somma:

$$1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k$$

che indicheremo brevemente con $\sigma_{k,n}$.

Se nell' identità:

$$(1+x)^{k+1} - x^{k+1} = 1 + \binom{k+1}{1}x + \binom{k+1}{2}x^2 + \ldots + \binom{k+1}{k}x^k$$

poniamo successivamente $x = 1, 2, 3, \ldots, n$ e sommiamo poi le uguaglianze ottenute membro a membro, troviamo:

$$(n+1)^{k+1} = n + 1 + \binom{k+1}{1}\sigma_{1,n} + \binom{k+1}{2}\sigma_{2,n} + \ldots \binom{k+1}{n}\sigma_{k,n}.$$

Questa formola permette di calcolare successivamente i numeri $\sigma_{1,n}, \sigma_{2,n}, \sigma_{3,n}, \ldots$, poichè per mezzo di essa (in cui si faccia successivamente $k = 1, 2, 3 \ldots$) ciascuno di questi numeri è espresso mediante i precedenti. Così si trova:

$$\sigma_{1,n} = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sigma_{2,n} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2 \cdot 3}$$

$$\sigma_{3,n} = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}, \text{ ecc.}$$

Note ed Esercizi.

1. Dedurre dallo sviluppo della potenza m^{esima} del binomio che:

$$\binom{m}{0} + \binom{m}{1} + \binom{m}{2} + \cdots + \binom{m}{m} = 2^m.$$

2. Verificare la formola:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

e dedurne che i coefficienti binomiali dei diversi ordini sono rappresentati dalle linee orizzontali del seguente quadro (*triangolo aritmetico di Tartaglia*):

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}$$

costruito colla legge che ogni elemento è uguale alla somma dei due che gli stanno scritti al di sopra.

Le diagonali di questo stesso quadro rappresentano poi i così detti *numeri figurati* dei diversi ordini. I numeri $1, 3, 6, \ldots$ rappresentati dalla terza diagonale si dicono numeri *triangolari*; i numeri $1, 4, 10, \ldots$ della quarta si dicono numeri piramidali; ecc.

3. Dimostrare la formola:

$$\binom{m+m'}{n} = \binom{m}{n} + \binom{m}{n-1}\binom{m'}{1} + \binom{m}{n-2}\binom{m'}{2} + \cdots + \binom{m'}{n}$$

e dedurne (facendo in essa $m = m' = n$) che *la somma dei quadrati dei coefficienti binomiali dell' ordine* n *è eguale a* $\binom{2n}{n}$.

§ 3.° — Combinazioni con ripetizione — Sviluppo della potenza di un polinomio — Numero dei termini delle espressioni polinomiali con più variabili.

221. Si chiamano combinazioni *con ripetizione* di m oggetti n ad n quelle nelle quali, in ogni gruppo di n oggetti, uno stesso può ripetersi una o più volte. Così, nel mentre che con tre oggetti a_1, a_2, a_3 si avevano soltanto le tre combinazioni semplici due a due:

$$a_1a_2\,,\quad a_1a_3\,,\quad a_2a_3\,,$$

si avranno invece sei combinazioni con ripetizione, cioè:

$$a_1a_2\,,\quad a_1a_3\,,\quad a_2a_3\,,\quad a_1a_1\,,\quad a_2a_2\,,\quad a_3a_3.$$

Noi indicheremo il numero delle combinazioni con ripetizione di m oggetti n ad n con $C'_{m,n}$, che sarà evidentemente in generale maggiore di $C_{m,n}$.

222. Per calcolare $C'_{m,n}$, immaginiamo scritte tutte le $C'_{m,n}$ combinazioni con ripetizione degli m oggetti $a_1, a_2, \ldots, a_m$ n ad n e vediamo quante volte nel complesso di tutte queste combinazioni si troverà scritto un dato elemento, p. es. a_1. Poichè ogni combinazione comprende n elementi, il numero totale degli elementi scritti sarà $n \cdot C'_{m,n}$; evidentemente, nel complesso di tutte le combinazioni, lo stesso numero di volte, uno stesso elemento, p. es. a_1, si troverà scritto $\frac{n \cdot C'_{m,n}}{m}$ volte.

D'altra parte possiamo avere un'altra espressione di questo stesso numero. Da tutte le combinazioni in cui si trova almeno una volta lo stesso elemento a_1, togliamo una volta questo elemento; verremo a toglierlo in tutto tante volte quant'è il numero delle combinazioni con ripetizione di m elementi $n-1$ ad $n-1$, cioè $C'_{m,n-1}$, volte, poichè le combinazioni che resteranno saranno proprio le $C'_{m,n-1}$ combinazioni con ripetizione degli m oggetti dati $n-1$ ad $n-1$. Applicando a queste rimanenti il ragionamento precedente troveremo che il numero di volte che si troverà ripetuto lo stesso elemento a_1 in tutte le $C'_{m,n-1}$ sarà $\frac{(n-1)C'_{m,n-1}}{m}$ e quindi il numero di volte che si trova ripetuto lo stesso elemento nelle $C'_{m,n}$ combinazioni primitive, sarà la somma di $\frac{(n-1)\,C'_{m,n-1}}{m}$ e di $C'_{m,n-1}$ che è il numero di volte che s'era tolto l'elemento a_1 da esse.

Eguagliando questa nuova espressione del numero di volte che si trova scritto a_1 con quella trovata precedentemente si ha:

$$\frac{n \cdot C'_{m,n}}{m} = \frac{(n-1)\,C'_{m,n-1}}{m} + C_{m,n-1}$$

d'onde moltiplicando per m:

$$nC'_{m,n} = (n-1+m)\,C'_{m,n-1}$$

e quindi

$$C'_{m,n} = \frac{m+n-1}{n} \cdot C'_{m,n-1}.$$

Analogamente si avrebbe, cambiando n in $n-1$,

$$C'_{m,n-1} = \frac{m+n-2}{n-1} \cdot C'_{m,n-2}$$

$$C'_{m,n-2} = \frac{m+n-3}{n-2} \cdot C'_{m,n-3}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$C'_{m,2} = \frac{m+1}{2} \cdot C'_{m,1}.$$

Da queste uguaglianze moltiplicate membro a membro, sopprimendo i fattori eguali del primo e secondo membro ed osservando che $C'_{m,1} = m$, si deduce

$$C'_{m,n} = \frac{(m+n-1)(m+n-2)\ldots(m+1)m}{n(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1} \qquad (1)$$

o anche

$$C'_{m,n} = \binom{m+n-1}{n} = C_{m+n-1,n}, \qquad (2)$$

cioè: *il numero delle combinazioni con ripetizione di* m *elementi* n *ad* n *è uguale al numero delle combinazioni semplici di* m + n − 1 *elementi* n *ad* n.

223. Se consideriamo gli elementi $a_1, a_2, \ldots, a_m$ come m numeri arbitrari dati, ad ogni combinazione con ripetizione di questi elementi n ad n, nella quale a_1 sia ripetuto p. es. α_1 volte, a_2 p. es. α_2 volte, ecc. si può far corrispondere un certo prodotto

$$a_1^{\alpha_1} . a_2^{\alpha_2} . a_3^{\alpha_3} \ldots a_m^{\alpha_m}$$

dove

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_m = n. \qquad (3)$$

Tutti questi diversi prodotti, i cui esponenti α soddisfano alla condizione (3), non sono altro evidentemente che i diversi *termini distinti* che si possono presentare nello sviluppo della potenza:

$$(a_1 + a_2 + a_3 \ldots + a_m)^n,$$

poichè ogni termine di questo sviluppo non potrà essere che il prodotto di n fattori da scegliersi, semplicemente o ripetutamente, fra le $a_1, a_2 \ldots, a_m$.

Pertanto: *il numero dei termini generalmente distinti che si presentano nello sviluppo della potenza* n^ma^ *di un polinomio di* m *termini, è dato da* $C'_{m,n}$.

224. È chiaro però che nello sviluppo della potenza $(a_1+a_2+\ldots+a_m)^n$ uno stesso termine $a_1^{\alpha_1} . a_2^{\alpha_2} \ldots a_m^{\alpha_m}$ potrà presentarsi più volte, onde si dovrà scrivere

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_m)^n = \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\ldots=n} A \cdot a_1^{\alpha_1} . a_2^{\alpha_2} \ldots a_m^{\alpha_m} \qquad (4)$$

dove la sommatoria va estesa a tutti i sistemi di valori degli esponenti α_1, α_2, ... che soddisfano all' eguaglianza (3) e dove per ogni sistema di esponenti α_1, α_2, ..., α_m si ha un certo coefficiente A, il quale sarà evidentemente un numero intero e positivo che indicherà quante volte il termine $a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \ldots a_m^{\alpha_m}$ si presenta nello sviluppo del prodotto di polinomi eguali:

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_m)^n = (a_1 + a_2 + \ldots + a_m)(a_1 + a_2 + \ldots + a_m) \ldots$$
$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_m). \qquad (5)$$

Per determinare il valore di A, osserviamo che, essendo gli α_1 fattori del prodotto (5) dai quali può scegliersi l'elemento a_1, una volta da ciascun fattore, completamente arbitrari, si potranno scegliere questi α_1 fattori in tanti modi diversi quanto è il numero delle combinazioni semplici di n oggetti α_1 ad α_1, cioè in $\binom{n}{\alpha_1}$ modi diversi.

Fissata una di queste combinazioni, dagli $n-\alpha_1$ fattori $(a_1+a_2+\ldots+a_m)$ che rimangono dobbiamo scegliere ora α_2 volte l' a_2 e ciò possiamo fare in tanti modi quant' è il numero $\binom{n-\alpha_1}{\alpha_2}$, ed allora il prodotto $\binom{n}{\alpha_1}\binom{n-\alpha_1}{\alpha_2}$ indicherà il numero dei modi distinti con cui si può fare la scelta di α_1 volte l' elemento a_1 e di α_2 volte l'elemento a_2.

Similmente si potrà poi scegliere l'a_3 un numero α_3 di volte in tanti modi quant' è $\binom{n-\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_3}$, ecc., fino a scegliere per ultimo l' a_m, α_m volte, in tanti modi quant' è il numero

$$\binom{n-\alpha_1-\alpha_2-\ldots-\alpha_{m-1}}{\alpha_m} = \binom{\alpha_m}{\alpha_m} = 1.$$

Si avrà dunque:

$$A = \binom{n}{\alpha_1}\binom{n-\alpha_1}{\alpha_2}\binom{n-\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_3} \ldots \binom{n-\alpha_1-\alpha_2-\ldots-\alpha_{m-1}}{\alpha_m}$$

o anche (art. 216):

$$A = \frac{\underline{|n}}{\underline{|\alpha_1}\,\underline{|n-\alpha_1}} \cdot \frac{\underline{|n-\alpha_1}}{\underline{|\alpha_2}\,\underline{|n-\alpha_1-\alpha_2}} \cdot \frac{\underline{|n-\alpha_1-\alpha_2}}{\underline{|\alpha_3}\,\underline{|n-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}} \ldots$$
$$\frac{\underline{|n-\alpha_1-\alpha_2\ldots\alpha_{m-1}}}{\underline{|\alpha_m}},$$

cioè, sopprimendo i fattori comuni ai numeratori e denominatori:

$$A = \frac{\underline{|n}}{\underline{|\alpha_1}\,\underline{|\alpha_2} \ldots \underline{|\alpha_m}}.$$

Sostituendo ciò in (4) otteniamo dunque come espressione generale dollo svilupppo della potenza n^{ma} di un polinomio di m termini:

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_m)^n = \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m=n} \frac{\underline{|n}}{\underline{|\alpha_1}\,\underline{|\alpha_2} \ldots \underline{|\alpha_m}} \cdot a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \ldots a_m^{\alpha_m}. \quad (6)$$

Per $m = 2$ questa formola si riduce a quella già trovata al § 2, per lo sviluppo della potenza n^{ma} di un binomio.

225. Se

$$\sum A \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_m^{\alpha_m} \quad (7)$$

è un polinomio (cfr. art. 66 e 67) con m variabili $x_1, x_2, \ldots, x_m$, si chiama *dimensione* di un suo termine qualunque

$$A \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_m^{\alpha_m}$$

la somma $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m$ degli esponenti a cui si trovano in esso elevate le variabili. Si chiama poi *grado* del polinomio la massima dimensione che si trova nei suoi termini. Finalmente il polinomio si dice *omogeneo,* rispetto alle variabili, se tutti i suoi termini hanno la stessa dimensione. Così il polinomio

$$3x_1^2 + 4x_1^3x_2x_3 + 2x_2^4$$

è un polinomio di 5° grado, non omogeneo, rispetto alle tre variabili x_1, x_2, x_3. Invece

$$2x_1^3x_2^2 + 4x_1^3x_2x_3 + 3x_2^5$$

è un polinomio del 5° grado ed omogeneo rispetto alle stesse tre variabili.

226. Ciò premesso, se il polinomio (7) é omogeneo e del grado n rispetto alle m variabili $x_1, x_2, \ldots, x_m$, gli esponenti α dovranno evidentemente soddisfare in ogni termine alla condizione:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m = n$$

onde si conclude, come all' art. 223, che *il numero dei termini distinti di un polinomio omogeneo e del grado* n *rispetto ad* **m** *variabili è dato in generale da* $\binom{m+n-1}{n} = C'_{m,n}$.

227. Se il polinomio (7) non è omogeneo, si avrà soltanto in ogni termine

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m \lesseqgtr n.$$

Ma se si scrive il polinomio stesso sotto la forma equivalente:

$$\sum A \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_m^{\alpha_m} \cdot 1^{\alpha_{m+1}},$$

si potrà sempre ancora ritenere

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m + \alpha_{m+1} = n,$$

onde si vede che *il numero dei termini distinti di un polinomio del grado* n *con* m *variabili è uguale al numero dei termini distinti di un polinomio omogeneo con* m+1 *variabili, cioè è uguale* (pel teorema precedente) *a*: $C'_{m+1,n} = \binom{m+n}{n}$.

Note ed Esercizi.

1. Fare lo sviluppo di $(x+y+z)^3$ e di $(x+2y+3z)^3$.
2. Calcolare il numero dei termini dello sviluppo di $(x+y+z)^7$ e calcolare i coefficienti dei termini x^4z^3 ed xy^3z^3.
3. Dimostrare che:

$$m^n = \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_m=n} \frac{\underline{|n}}{\underline{|\alpha_1}\,\underline{|\alpha_2}\ldots\underline{|\alpha_m}}$$

4. Un polinomio del grado n con m variabili contiene tanti termini quanti ne contiene un polinomio del grado m con n variabili.
5. Il massimo coefficiente nello sviluppo di $(x_1 + x_2 \ldots + x_m)^n$ è $\frac{\underline{|n}}{(\underline{|q})^m \underline{|r}}$, dove q è il quoziente ed r il resto della divisione di n per m.

§ 4.° — Delle sostituzioni fra n elementi Gruppi di sostituzioni.

228. Si chiama *sostituzione* l'operazione per cui da una certa permutazione di n elementi dati si passa ad un'altra permutazione degli stessi n elementi. Se le due permutazioni siano:

$$a_{i_1}a_{i_2}\ldots\ldots a_{i_n} \tag{1}$$

$$a_{j_1}a_{j_2}\ldots\ldots a_{j_n}, \tag{2}$$

la sostituzione per cui dalla (1) si passa alla (2) si designa col simbolo

$$S = \begin{pmatrix} a_{j_1}a_{j_2}\ldots\ldots a_{j_n} \\ a_{i_1}a_{i_2}\ldots\ldots a_{i_n} \end{pmatrix} \tag{3}$$

il quale esprime che all'elemento a_{i_1} deve sostituirsi a_{j_1}, ad a_{i_2}, a_{j_2}, ecc. È evidente che la sostituzione S non cambia se si

esegue simultaneamente una stessa permutazione fra gli elementi del suo *denominatore* e quelli corrispondenti del suo *numeratore*. Così per 4 elementi si avrà:

$$\begin{pmatrix} a_4 a_1 a_2 a_3 \\ a_2 a_3 a_4 a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_4 a_2 a_3 \\ a_3 a_2 a_4 a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_3 a_4 a_1 a_2 \\ a_1 a_2 a_3 a_4 \end{pmatrix}.$$

Per confrontare fra loro due sostituzioni, si comincerà dunque dal ridurle allo stesso denominatore, dopo di che, affinchè esse siano eguali, sarà necessario e sufficiente che i due numeratori siano formati da due permutazioni identiche fra loro.

Di qui segue che fra n elementi si hanno $\underline{|n}$ sostituzioni fra loro distinte, poichè si può sempre supporre che le sostituzioni abbiano tutte per denominatore la permutazione fondamentale $a_1 a_2 \dots a_n$, nel mentre che per il numeratore potrà prendersi una qualunque delle $\underline{|n}$ permutazioni degli n elementi.

229. Se S e T sono due sostituzioni fra gli stessi elementi, si chiama *prodotto* di S e di T, e si indica con ST, quella sostituzione che risulta dall'eseguire fra gli elementi prima la sostituzione S e poi la sostituzione T.

Così, se si abbia p. es.

$$S = \begin{pmatrix} a_2 a_4 a_3 a_1 a_6 a_5 a_8 a_7 \\ a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} a_3 a_8 a_1 a_4 a_2 a_5 a_6 a_7 \\ a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 \end{pmatrix},$$

si trova:

$$S \cdot T = \begin{pmatrix} a_8 a_4 a_1 a_3 a_5 a_2 a_7 a_6 \\ a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 \end{pmatrix}.$$

Se invece si eseguisca prima la sostituzione T e poi la sostituzione S, si trova:

$$T \cdot S = \begin{pmatrix} a_3 a_7 a_2 a_1 a_4 a_6 a_5 a_8 \\ a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 \end{pmatrix}$$

che è una sostituzione diversa da quella trovata poco fa. Si vede dunque che *il prodotto di più sostituzioni non è in generale indipendente dall'ordine dei fattori.*

Se, come caso particolare, si verifichi che $S \cdot T = T \cdot S$, le due sostituzioni S e T si dicono *permutabili* fra loro.

230. Se $S \cdot T = S \cdot Q$, ne segue che $T = Q$. Lo stesso dicasi se $T \cdot S = Q \cdot S$. Crediamo inutile trattenerci a dimostrare questa asserzione, la cui verità è una conseguenza immediata della definizione stessa di prodotto.

231. Se, dati k elementi $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_k$, al posto di α_1 si ponga α_2, al posto di α_2 si ponga α_3 e così di seguito finchè al posto di α_{k-1} si sostituisca α_k, e per ultimo al posto di α_k si ponga il primo elemento α_1, si dice che fra i k elementi $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k$ si è eseguita una sostituzione circolare, che s' indica anche col simbolo $(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k)$. Cioè:

$$(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k) = \begin{pmatrix} \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \dots \alpha_k \alpha_1 \\ \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_{k-1} \alpha_k \end{pmatrix}.$$

La ragione di questa denominazione sta in ciò che la sostituzione in parola si può eseguire dividendo la circonferenza in k

parti eguali, collocando nei k punti di divisione ordinatamente gli elementi a_1, a_2, ..., a_k e facendo quindi rotare la circonferenza intorno al centro di un angolo eguale alla k^{ma} parte di 4 angoli retti.

232. Se si indichi con σ questa sostituzione circolare, le potenze $\sigma^2, \sigma^3, \sigma^4, \ldots$ di σ, cioè i risultati che si ottengono eseguendo successivamente due volte di seguito, tre volte di seguito, ecc. la stessa σ, si otterranno evidentemente facendo rotare la circonferenza di un angolo rispettivamente doppio, triplo, ecc. del precedente. E poichè facendo rotare la circonferenza di un angolo eguale a k volte il precedente, cioè di 4 retti, ogni punto della circonferenza ripiglia la primitiva posizione, si vede che

$$\sigma^k = \begin{pmatrix} a_1 a_2 a_3 \ldots a_k \\ a_1 a_2 a_3 \ldots a_k \end{pmatrix} = 1,$$

poichè si suole chiamare sostituzione *unità* quella sostituzione che lascia al suo posto ciascun elemento.

Si vede pure che le sole potenze di σ uguali ad 1 son date da σ^k, σ^{2k}, σ^{3k} ..., cioè da σ elevato ad un multiplo di k.

233. *Una sostituzione qualunque, se non è circolare, si può sempre decomporre in un prodotto di sostituzioni circolari fra gruppi di elementi tutti distinti.*

Sia invero S una sostituzione qualunque fra gli n elementi a_1, a_2 ... a_n. Chiamando a_1 uno di questi n elementi, sia poi a_2 l'elemento che la sostituzione S fa succedere ad a_1, a_3 quello che essa sostituisce ad a_2, a_4 quello che sostituisce ad a_3 e così di seguito. Poichè il numero degli elementi è limitato, giungeremo, così proseguendo, certamente ad un elemento a_{k+1} che coincida con uno degli elementi (tutti distinti) a_1, a_2, ... a_{k-1}, a_k incontrati precedentemente. È facile riconoscere che l'elemento precedente con cui esso coinciderà sarà necessariamente il primo. Poichè, se si avesse per es. $a_{k+1} = a_3$, ciò significherebbe che la sostituzione S pone contemporaneamente al luogo di a_2 ed al luogo di a_k lo stesso elemento a_{k+1}. Quindi dovrebbe essere $a_2 = a_k$; ma allora non sarebbe più a_{k+1} il primo elemento che coincida con uno dei precedenti, ma bensì a_k contrariamente al supposto. Dovrà dunque a_{k+1} coincidere con a_1; e di qui segue che la sostituzione S equivale, per quanto riguarda gli elementi a_1, a_2, a_3 ... a_{k-1}, a_k, alla sostituzione circolare $(a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_k)$. Per quanto poi riguarda i rimanenti $n-k$ elementi, partendo da uno fra essi β_1, si formerà un nuovo *ciclo* $(\beta_1\, \beta_2 \ldots \beta_h)$ di elementi che da S verranno permutati fra loro circolarmente, e così poi, se avanzino ancora altri elementi, un terzo ciclo $(\gamma_1\, \gamma_2 \ldots \gamma_l)$ e così via fino ad esaurire tutti gli n elementi dati.

Adunque la sostituzione data è il risultato di sostituzioni circolari fra gruppi di elementi del tutto diversi, epperò è uguale al loro prodotto. Così si ha p. es.

$$\begin{pmatrix} a_5 a_3 a_2 a_7 a_1 a_9 a_8 a_4 a_{10} a_6 \\ a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9 a_{10} \end{pmatrix} = (a_1 a_5)(a_2 a_3)(a_4 a_7 a_8)(a_6 a_9 a_{10}).$$

234. Consideriamo le potenze successive

$$S^0, S, S^2, S^3, \dots \qquad (4)$$

di una data sostituzione S, la prima delle quali, esprimendo che S deve eseguirsi 0 volte, altro non significa che l'*unità*, cioè la sostituzione che lascia al loro posto tutti gli elementi. Poichè il numero delle sostituzioni fra gli n elementi dati è limitato ($= \lfloor n$), le infinite sostituzioni (4) non possono essere tutte distinte. Sia dunque la S^p la prima di esse che coincide con una delle precedenti; si avrà p. es.

$$S^p = S^r \;, \; r < p \qquad (5)$$

il che può anche scriversi:

$$S^r \cdot S^{p-r} = S^r \cdot S^0,$$

onde (art. 230):

$$S^{p-r} = S^0.$$

Di qui si vede che S^{p-r} coincide con una potenza di indice precedente. Ma per supposto la prima potenza che coincide con una delle precedenti è S^p; dev' essere dunque

$$p - r = p,$$

cioè

$$r = 0,$$

e la (5) ci dà allora

$$S^p = 1,$$

cioè: *la prima delle potenze successive di una sostituzione* S *che coincide con una delle precedenti*, *coincide necessariamente con l' unità.*

235. Il più piccolo numero intero p, per il quale si ha $S^p = 1$, si chiama l'*ordine* della sostituzione S. Esso esprime quante volte di seguito si deve eseguire una stessa sostituzione S fra gli elementi dati affinchè ciascuno di essi riprenda la posizione primitiva. Dall' art. 232 si vede in particolare che l'ordine di una sostituzione circolare fra k elementi è uguale precisamente a k.

Poichè $S^p = 1$, si avrà poi per le potenze di S successive ad S^p:

$$S^{p+1} = S^p \cdot S = S^1 \;, \; S^{p+2} = S^2 \;, \; S^{p+3} = S^3, \dots,$$

onde si vede che le potenze successive di S si riproducono periodicamente di p in p.

236. Se p è l'ordine della sostituzione S, la sostituzione S^{p-1} si indica anche brevemente con S^{-1} e si chiama l'*inversa* di S, poichè è la sostituzione che effettua fra gli elementi su cui opera S, lo scambio opposto a quello effettuato da S. Si ha infatti $SS^{-1} = SS^{p-1} = S^p = 1$; cioè, se dopo aver eseguita la sostituzione S, si esegua la S^{-1}, tutti gli elementi riprendono la posizione primitiva.

237. *L' ordine di una sostituzione qualunque* S *è uguale al mi-*

nimo multiplo dei numeri k , h , l , . . . *che esprimono quant elementi sono contenuti in ciascuno dei cicli nei quali essa si decompone.*

Siano infatti p. es. C_1 , C_2 , C_3 i cicli nei quali si decompone la sostituzione S, i quali contengano risp. k , h , l elementi. La potenza S^p si otterrà eseguendo p volte la sostituzione circolare C_1 fra gli elementi del primo ciclo, p volte la sostituzione C_2 fra quelli del secondo ciclo e così via; onde, se $S^p = 1$, è chiaro che dopo ciò gli elementi di ciascun ciclo saranno ritornati al posto primitivo, cioè che:

$$C_1{}^p = 1 \ , \ C_2{}^p = 1 \ , \ C_3{}^p = 1.$$

Ma, per aversi $C_1{}^p = 1$, è necessario (art. 232) che p sia un multiplo del numero k; similmente dovrà essere un multiplo di h e di l... Esso sarà dunque appunto il minimo comune multiplo di questi numeri.

238. Fra le sostituzioni circolari hanno speciale importanza quelle che si limitano allo scambio di due soli elementi, che si chiamano anche *trasposizioni*; poichè è manifesto che *il passaggio da una permutazione* P *ad un' altra qualunque* P' *si può effettuare eseguendo successivamente sopra gli elementi di* P *un numero finito di trasposizioni.* Così p. es.:

$$\begin{pmatrix} a_2a_4a_3a_1a_6a_5a_8a_7 \\ a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8 \end{pmatrix} = (a_1a_2)\ (a_1a_4)\ (a_5a_6)\ (a_7a_8).$$

239. La decomposizione di una stessa sostituzione in un prodotto di trasposizioni si può sempre fare in infiniti modi diversi. Però *il numero delle trasposizioni, al cui prodotto equivale la sostituzione data, sarà sempre pari o sempre dispari secondochè sia di classe pari o di classe dispari* (art. 212) *la permutazione in cui si cambia la permutazione fondamentale, per effetto di quella sostituzione.* Infatti, per ogni trasposizione che si eseguisca, si avrà (art. 213) un cambiamento di classe nella permutazione su cui si opera.

Le sostituzioni si scindono dunque, proprio come le permutazioni, in due categorie, secondochè equivalgono ad un numero pari ovvero ad un numero dispari di trasposizioni. Ed è evidente (articolo 214) che le sostituzioni di classe pari sono in egual numero di quelle di classe dispari.

240. Chiuderemo colla nozione dei così detti *gruppi* di sostituzioni, le cui proprietà sono di grande importanza in molte questioni di algebra superiore.

Un sistema di sostituzioni fra n elementi dati si dice formare un *gruppo* quando il prodotto di una qualunque di esse per sè stessa o per una qualunque delle rimanenti appartiene allo stesso sistema. Il numero delle sostituzioni distinte di cui si compone un cosiffatto sistema dicesi l'*ordine* del gruppo.

Ogni gruppo contiene sempre la sostituzione 1, poichè, come si

è visto sopra, ogni sostituzione moltiplicata per sè stessa un numero opportuno di volte riproduce 1.

Se un gruppo contiene una certa sostituzione S, esso contiene anche la sua inversa; poichè la sostituzione inversa di S non è (articolo 236) che una potenza di S.

Se le sostituzioni di un gruppo H sono tutte comprese fra quelle di un altro gruppo G, si dice che H è un *sotto-gruppo* di G ovvero un *gruppo parziale* di G, e si ha il seguente importante teorema.

241. *L' ordine di un gruppo qualunque è un multiplo dell' ordine di uno qualunque dei suoi gruppi parziali.*

Siano infatti m e μ risp. gli ordini di G e di un gruppo parziale H contenuto in G. Se

$$1 \equiv S_0 \,,\, S_1 \,,\, S_2 \,,\, \dots \,,\, S_{\mu-1} \tag{6}$$

sono le μ sostituzioni di cui si compone H, il gruppo G conterrà, oltre a queste sostituzioni, almeno un' altra sostituzione T_1 e quindi anche i prodotti

$$T_1 \,,\, T_1S_1 \,,\, T_1S_2 \,,\, \dots \, T_1S_{\mu-1} \tag{7}$$

che sono evidentemente tutti distinti fra loro, e sono anche tutti distinti dalle sostituzioni (6), poichè, se fosse p. es.

$$T_1S_i = S_j \,,$$

indicando con k l' ordine della sostituzione S_i, se ne dedurrebbe

$$T_1S_i \cdot S_i^{k-1} = S_jS_i^{k-1}$$

ossia, poichè

$$S_i \cdot S_i^{k-1} = S_i^k = 1 \,,$$

se ne dedurrebbe

$$T_1 = S_j \cdot S_i^{k-1} \,,$$

cioè la sostituzione T_1 farebbe parte del gruppo H contrariamente al supposto. Se il gruppo G non contiene altre sostituzioni oltre le (6) e (7), il suo ordine sarà 2μ, che è un multiplo di μ, ed il teorema sarà dimostrato. Se esso contiene qualche altra sostituzione T_2 diversa dalle (6) e dalle (7), esso conterrà anche i prodotti

$$T_2 \,,\, T_2S_1 \,,\, T_2S_2 \,,\, \dots \,,\, T_2S_{\mu-1} \tag{8}$$

che, al pari dei prodotti (7), saranno tutti distinti fra loro e tutti distinti dalle (6). Inoltre essi saranno anche tutti distinti dalle (7), poichè, se fosse

$$T_2S_i = T_1S_j \,,$$

ne seguirebbe (detto ancora k l'ordine di S_i):

$$T_2 = T_1S_jS_i^{k-1} = T_1S_t \,,$$

cioè la T_2 farebbe parte delle (7) contro il supposto.

Se ora G non contiene altre sostituzioni oltre le (6), (7), (8), il suo ordine sarà 3μ, che è un multiplo di μ. In caso contrario si

procederà nello stesso modo finchè siano esaurite tutte le sostituzioni di G. Se:

$$T_{r-1}\ ,\ T_{r-1}S_1\ ,\ T_{r-1}S_2\ ,\ \ldots\ ,\ T_{r-1}S_{\mu-1}$$

é l'ultimo sistema di prodotti ottenuto, il complesso di tutte le sostituzioni di S si troverà rappresentato dal quadro seguente:

$$\begin{array}{lllll} 1 & ,\ S_1 & ,\ S_2 & ,\ \ldots\ , & S_{\mu-1} \\ T_1 & ,\ T_1S_1 & ,\ T_1S_2 & ,\ \ldots\ , & T_1S_{\mu-1} \\ T_2 & ,\ T_2S_1 & ,\ T_2S_2 & ,\ \ldots\ , & T_2S_{\mu-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ T_{r-1} & ,\ T_{r-1}S_1 & ,\ T_{r-1}S_2 & ,\ \ldots\ , & T_{r-1}S_{\mu-1} \end{array} \qquad (9)$$

e l'ordine di G sarà espresso da $m=\mu r$, il che dimostra l'asserto.

242. Corollario. — *L'ordine di un gruppo qualunque di sostituzioni fra* n *elementi è un divisore del prodotto* 1.2.3...n.

Infatti tutte le $\lfloor n$ sostituzioni, che si possono effettuare fra n elementi, costituiscono un gruppo, che si chiama il gruppo *simmetrico*, il cui ordine è l'ordine massimo possibile, cioè $\lfloor n$.

Ogni altro gruppo fra gli stessi elementi, essendo necessariamente contenuto in questo, avrà dunque per ordine un divisore di $\lfloor n$.

Il quoto di $\lfloor n$ diviso per l'ordine di un gruppo G, di sostituzioni fra n lettere, si chiama l'*indice* del gruppo G.

243. In modo del tutto analogo a quello tenuto all' art. 241 si dimostrerebbe che *se* $1,\ S_1\ ,\ S_2\ ,\ \ldots\ ,\ S_{\mu-1}$ *sono le sostituzioni di un gruppo* H *contenuto in un gruppo* G, *le sostituzioni di* G *si possono rappresentare con un quadro della forma*:

$$\begin{array}{lllll} 1 & ,\ S_1 & ,\ S_2 & ,\ \ldots\ , & S_{\mu-1} \\ \Theta_1 & ,\ S_1\Theta_1 & ,\ S_2\Theta_1 & ,\ \ldots\ , & S_{\mu-1}\Theta_1 \\ \Theta_2 & ,\ S_1\Theta_2 & ,\ S_2\Theta_2 & ,\ \ldots\ , & S_{\mu-1}\Theta_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \Theta_{r-1} & ,\ S_1\Theta_{r-1} & ,\ S_2\Theta_{r-1} & ,\ \ldots\ , & S_{\mu-1}\Theta_{r-1} \end{array} \qquad (9)'$$

essendo appunto μr *l'ordine di* G.

Notiamo esplicitamente che le linee orizzontali del quadro (9)' non sono in generale quelle stesse che si presentano nel quadro (9).

244. È importante di notare che la distribuzione delle sostituzioni di un gruppo G in linee orizzontali del tipo (9), o, come anche diremo, in *periodi di 1ª specie*, è perfettamente determinata (a meno dell' ordine con cui sono scritte le orizzontali) appenachè sia data la prima orizzontale, cioè il primo periodo. Infatti, poichè le sostituzioni

$$1\ ,\ S_1\ ,\ S_2\ ,\ \ldots\ ,\ S_{\mu-1}$$

del primo periodo (a differenza di quelle di ogni altro periodo) formano un gruppo, le sostituzioni che se ne deducono moltiplicandole tutte a sinistra per una stessa sostituzione $T_h S_j$ di G, cioè:

$$T_h S_j \quad , \quad T_h S_j S_1 \quad , \quad T_h S_j S_2 \quad , \ldots , \quad T_h S_j S_{\mu-1} \, ,$$

non differiscono, fatta astrazione dall'ordine, dalle sostituzioni:

$$T_h \quad , \quad T_h S_1 \quad , \quad T_h S_2 \quad , \ldots , \quad T_h S_{\mu-1} \, ,$$

poichè, le

$$S_j \quad , \quad S_j S_1 \quad , \quad S_j S_2 \quad , \ldots , \quad S_j S_{\mu-1}$$

non differiscono, salvo l'ordine, come è facile vedere, dalle

$$1 \quad , \quad S_1 \quad , \quad S_2 \quad , \ldots , \quad S_{\mu-1} .$$

Per ragione affatto analoga anche la distribuzione delle sostituzioni di G in un quadro del tipo (9)' cioè, come anche diremo, in *periodi di* 2ª *specie*, non è possibile che in un modo unico, appena fissato il primo periodo.

245. Fra i vari gruppi contenuti nel gruppo simmetrico (articolo 242) costituito da tutte le sostituzioni fra n lettere, ve ne ha uno dell'ordine $\frac{\lfloor n}{2}$. Esso è composto da quelle sostituzioni che equivalgono (art. 239) ad un numero pari di trasposizioni e prende il nome di gruppo *alternato*.

È chiaro infatti che il prodotto di due sostituzioni, ciascuna delle quali equivalga ad un numero pari di trasposizioni, equivale pure ad un numero pari di trasposizioni.

246. Più generalmente: *Se le sostituzioni di un gruppo qualunque* G *non sono tutte di classe pari, le sostituzioni di classe pari contenute in* G *formano un sotto-gruppo il cui ordine sarà la metà dell'ordine di* G.

Infatti, se le sostituzioni di G non sono tutte di classe pari, siano

$$H_1 \, , \, H_2 \, , \, H_3 \, , \ldots , \, H_\mu$$

quelle di classe pari e

$$T_1 \, , \, T_2 \, , \ldots , \, T_\nu$$

quelle di classe dispari. Il gruppo G conterrà certamente le sostituzioni:

$$H_1 T_1 \, , \, H_2 T_1 \, , \ldots , \, H_\mu T_1$$

che sono tutte di classe dispari e tutte distinte fra loro. Sarà dunque $\nu \gtreqless \mu$. D'altra parte il gruppo G conterrà anche le sostituzion

$$T_1 T_1 \, , \, T_2 T_1 \, , \ldots , \, T_\nu T_1$$

che sono tutte di classe pari e tutte distinte fra loro. Sarà dunque $\mu \gtreqless \nu$. Si conclude pertanto $\mu = \nu$; come d. d.

Note ed Esercizi.

1. Dimostrare che il minimo numero di trasposizioni, a cui equivale una data sostituzione, si ottiene sottraendo dal numero degli elementi, su cui si opera, il numero dei cicli della sostituzione.
2. Costruire tutti i gruppi di sostituzioni possibili fra tre elementi.
3. Verificare che:

$$(abc) = (dea)(dec)(deb)(dea)^2)(dec)(dea)(dec)^2.$$

Osservando poi che $(ab)(cd) = (abc)(adc)$ ed $(ab)(ac) = (abc)$, dedurne che *ogni sostituzione di classe pari si può sempre decomporre in un prodotto di sostituzioni circolari fra tre elementi.*

4. *Tutte le sostituzioni fra le lettere* a, b, c, ..., d *possono generarsi come risultanti di due uniche sostituzioni, cioè delle due sostituzioni circolari*

$$(abc \ldots d) \;,\; (bc \ldots d)$$

(cfr. Giornale di Matematiche vol. XXV, 1897).

5. *Il gruppo alternato è il solo gruppo di ordine* $\frac{\underline{|n}}{2}$ *contenuto nel gruppo simmetrico delle sostituzioni fra* n *lettere.*

6. Per la dimostrazione di questo e degli altri teoremi sulle sostituzioni dei quali venisse dato in seguito il solo enunciato, rimandiamo alle opere:

E. Netto: Teoria delle sostituzioni e sua applicazione all'algebra (Versione dal tedesco di G. Battaglini. Torino 1885).

L. Bianchi: Lezioni sulla teoria dei gruppi di sostituzioni e delle equazioni algebriche secondo Galois (Pisa 1900).

§ 5.° — Transitività dei gruppi di sostituzioni.

247. Un gruppo di sostituzioni, fra gli elementi $a_1, a_2, \ldots, a_n$, si dice *transitivo*, se fra esse se ne possa trovare almeno una che ad un elemento qualunque a_i sostituisca un elemento qualunque a_j. In caso contrario si dice *intransitivo.*

248. Si riconosce subito che, affinchè un gruppo sia transitivo, è necessario e sufficiente che si trovino in esso delle sostituzioni che all' elemento a_1 facciano succedere risp. gli elementi $a_2, a_3, \ldots a_n$.

Infatti, se questa condizione, evidentemente necessaria, è soddisfatta, esisterà nel gruppo una sostituzione S che cambia a_1 in a_i ed un' altra T che cambia a_1 in a_j; onde esisterà anche la sostituzione:

$$S^{-1}T$$

che cambia appunto a_i in a_j.

249. *L' ordine di un gruppo transitivo fra* n *elementi è uguale ad* n *moltiplicato per l' ordine del sotto-gruppo composto da quelle sostituzioni che non ispostano un dato elemento.*

Siano infatti $S_1, S_2, \ldots, S_m$ le sostituzioni del gruppo transitivo G che lasciano fermo uno degli elementi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ su cui operano le sostituzioni di G, p. es. l'elemento a_1. Queste sostituzioni costituiscono evidentemente un gruppo.

Esisteranno per supposto $n-1$ sostituzioni $T_2, T_3, \ldots, T_{n-1}$ le quali all'elemento a_1 sostituiscono risp. gli elementi $a_2, a_3, \ldots, a_n$; e le sostituzioni

$$S_1T_i, S_2T_i, \ldots, S_mT_i \qquad (\alpha)$$

sostituiranno tutte, manifestamente, all'elemento a_1 l'elemento a_i. D'altra parte non possono esistere nel gruppo G, oltre le (α), altre sostituzioni che all'elemento a_1 facciano succedere a_i; poichè, se Q sia una siffatta sostituzione, dovrà il gruppo G contenere la sostituzione QT_i^{-1} la quale, lasciando evidentemente fermo l'elemento a_1, coincider deve con una delle $S_1, \ldots, S_m$; cosicchè si avrà:

$$QT_i^{-1} = S_h,$$

d'onde:

$$QT_i^{-1}T_i = S_hT_i,$$

cioè

$$Q = S_hT_i.$$

La Q è dunque appunto compresa fra le (α).

Il teorema enunciato si trova così dimostrato; poichè le sostituzioni di G si vengono così a distribuire in n sistemi ciascuno di m sostituzioni, a seconda della lettera che esse fanno succedere ad a_1.

250. *Se un gruppo di sostituzioni* G *non è transitivo, le lettere* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *su cui operano le sue sostituzioni, si possono distribuire in due o più sistemi* $A_1, A_2, \ldots, A_k$ *tali che le sostituzioni di* G *possono soltanto scambiare fra loro le lettere di uno stesso sistema; nel mentre che il gruppo* G *è poi transitivo rispetto alle lettere di ogni singolo sistema.*

Sia infatti A_1 l'insieme di tutte quelle lettere che possono essere sostituite ad a_1 per mezzo di sostituzioni di G. Si riconoscerà subito con ragionamento simile a quello dell'art. 248 che una lettera qualunque del sistema A_1 potrà essere cambiata in un' altra lettera qualunque dello stesso sistema A_1 mediante un'opportuna sostituzione di G; e che, invece, non esisterà in G alcuna sostituzione che cambi una lettera di A_1 in una lettera non contenuta in A_1. Possiamo dunque dire che il gruppo G è transitivo rispetto alle lettere del sistema A_1 e che il sistema A_1 è intransitivo rispetto alle lettere che non fanno parte di A_1.

Scelta ora a piacere un' altra lettera qualunque, p. es. a_2, fra quelle non contenute in A_1, si formerà un nuovo sistema A_2 riunendo insieme tutte quelle lettere che possono sostituirsi ad a_2 mediante sostituzioni di G. Le lettere di A_2 saranno evidentemente tutte distinte da quelle di A_1 e il sistema A_2 godrà delle stesse proprietà testè dimostrate pel sistema A_1. Così procedendo si verranno appunto a distribuire le n lettere $a_1, \ldots, a_n$ in certi sistemi $A_1, A_2, \ldots, A_k$ dotati delle proprietà indicate nell'enunciato.

251. I sistemi $A_1, A_2, \ldots, A_k$ nei quali si distribuiscono, secondo il precedente teorema, le lettere su cui operano le sostituzioni di un gruppo G, si chiamano i ***sistemi di intransitività*** del gruppo G.

Così, ad esempio, i sistemi di intransitività del gruppo formato dalle potenze di una stessa sostituzione S, altro non sono che gli stessi sistemi di lettere che compongono i singoli cicli di S decomposta (cfr. art. 233) in sostituzioni circolari. È chiaro infatti, p. es., che un' opportuna potenza della sostituzione:

$$S = (a\ b\ c\ d)\,(g\ h\ k\ e)\,(l\ m)\,(n\ r\ s)\,,$$

fra le tredici lettere distinte $a , b , c , \ldots , s$, potrà cambiare una qualunque delle lettere a , b , c , d in una qualunque delle stesse a , b , c , d, ma non potrebbe mai cambiare una delle a , b , c , d con una delle g , h , k , e.

Note ed Esercizi

1. *Se* A *è uno qualunque dei sistemi di intransitività di un gruppo* G, *il numero delle lettere di* A *è un divisore dell' ordine di* G.

Si dimostrerà infatti, con ragionamento identico a quello dell' art. 249, che il numero delle sostituzioni di G che lasciano ferma una data lettera di A è uguale al numero delle sostituzioni di G che a quella lettera fanno succedere un' altra lettera qualunque dello stesso sistema A.

2. Un gruppo G si può definire per mezzo di un certo numero delle sue sostituzioni $S_1 , S_2 , \ldots , S_\mu$ che si chiameranno le *generatrici* del gruppo, scrivendosi:

$$G = [S_1 , S_2 , \ldots , S_\mu].$$

Con ciò si vuol intendere che G è l'insieme di tutte quelle sostituzioni che si possono ottenere mediante sostituzioni scelte fra le $S_1 , S_2 , \ldots , S_\mu$. Così p. es., il gruppo

$$[S , T , Q]$$

conterrà le sostituzioni:

$$S , T , Q , S^2T^4 , S^2T^3S^4 , STSQ , \ldots ,$$

ed è chiaro che tutte le sostituzioni così ottenute formano un gruppo, poichè, p. es, il prodotto di S^2T^4 e di $S^2T^3S^4Q$, cioè $S^2T^4S^2T^3S^4Q$ è ancora una sostituzione dello stesso tipo.

3. Se

$$G = [S_1 , S_2 , \ldots , S_h , T_1 , T_2 , \ldots , T_k]$$

ed

$$[S_1 , S_2 , \ldots , S_h] = H \quad , \quad [T_1 , T_2 , \ldots , T_k] = K ,$$

si può anche scrivere:

$$G = [H , K]$$

con che si vuol intendere che G è l' insieme di tutte quelle sostituzioni che nascono dal combinare in un modo qualunque le sostituzioni del gruppo H fra loro e colle sostituzioni del gruppo K. Ciò è senz' altro manifesto.

4. Non è in generale cosa agevole determinare l'ordine del gruppo generato da certe date sostituzioni o gruppi di sostituzioni. É però invece cosa assai semplice determinarne i sistemi di intransitività. Dopo l'osservazione della nota precedente, basterà infatti mostrare come conoscendosi i sistemi di intransitività:

$$A_1 , A_2 , \ldots , A_\mu \tag{α}$$

di un certo gruppo H ed i sistemi di intransitività:

$$B_1 , B_2 , \ldots , B_\nu \tag{β}$$

di un certo gruppo K, si possano determinare facilmente i sistemi di intransitività del gruppo [H , K]. E precisamente basterà mostrare come si determini il sistema di intransitività Ω cui appartiene una certa lettera scelta a piacere fra quelle su cui operano le sostituzioni dei due gruppi, p. es. la lettera *a* scelta fra quelle del sistema A_1.

Se

$$B' , B'' , \ldots , B^{(\beta)} \qquad (\gamma)$$

sono quelli fra i sistemi (β) che contengono una o più lettere del sistema A_1, il sistema cercato Ω dovrà intanto contenere il sistema Ω_1 formato dalla riunione di $B' , B'' , \ldots . B^{(\beta)}$. Infatti, poichè è possibile cambiare *a*, mediante sostituzioni di G, in una qualunque delle lettere di A sarà in particolare possibile di cambiare *a* con una delle lettere che A_1 ha in comune con $B^{(i)}$, che sia p. es. a_i; e quindi, combinando la sostituzione di H che cambia *a* in a_i con una delle sostituzioni di K che cambiano a_i in una altra qualunque delle lettere di B_i, si avrà appunto una sostituzione che cambia *a* in una qualunque di quelle di $B^{(i)}$. Il sistema $B^{(i)}$ dovrà quindi far parte del sistema di intransitività Ω cui appartiene la lettera *a*.

Se ora $A_1 , A' , A'' , \ldots , A^{(\sigma-1)}$ sono quei sistemi (α) che hanno uno o più lettere in comune con Ω_1, si riconoscerà, con ragionamento simile al precedente, che il sistema cercato Ω dovrà contenere ciascuno dei sistemi $A_1 , A' , \ldots , A^{(\sigma-1)}$ e quindi anche la loro riunione che indicheremo con Ω_2. Per ragione analoga dovrà poi contenere anche la riunione Ω_3 di tutti quei sistemi (β) che hanno una o più lettere in comune con Ω_2, e così di seguito finchè, essendo il numero totale delle lettere finito, si giungerà ad un sistema Ω_λ che non potrà essere ulteriormente ampliato; tale cioè che $\Omega_{\lambda+1}$ coinciderebbe con Ω_λ. Il sistema Ω_λ, che sarà al tempo stesso l'aggregato di un certo numero di sistemi (α) e l'aggregato di un certo numero di sistemi (β), sarà evidentemente il sistema cercato Ω.

5. Riconoscere, mediante la decomposizione in cicli, che il gruppo generato dalle due sostituzioni:

$$S = \begin{pmatrix} d\,c\,h\,e\,f\,a\,g\,k\,b \\ a\,b\,c\,d\,e\,f\,g\,h\,k \end{pmatrix} , \quad T = \begin{pmatrix} g\,a\,h\,k\,c\,b\,e\,f\,d \\ a\,b\,c\,d\,e\,f\,g\,h\,k \end{pmatrix}$$

è transitivo.

6. Quali sono i sistemi di intransitività del gruppo generato dalle tre sostituzioni:

$$(a\,b\,c) \quad , \quad (g\,h) \quad , \quad (a\,b\,c\,d)(e\,g\,h)\,?$$

§ 6.° — Permutabilità delle sostituzioni — Trasformazione.

252. Due sostituzioni o gruppi di sostituzioni, o anche due semplici sistemi di sostituzioni, si dicono fra loro *simili,* quando non differiscono l' uno dall' altro che per la denominazione degli elementi su cui operano. Così per esempio le due sostituzioni:

$$S = (abc)(def)(gh) \quad , \quad S' = (dcb)(ghf)(ae)$$

sono simili, perchè la S diviene la S' se sulle lettere *a, b, c, d, e, f, g, h* si esegue la sostituzione:

$$T = (adg)(eh)(bc).$$

253. Quest'operazione di sostituzione eseguita sui simboli che rappresentano gli elementi si chiama *trasformazione,* la sostituzione eseguita si chiama la *trasformante* e la nuova sostituzione (o gruppo di sostituzioni) così dedotta dalla sostituzione primitiva (o dal gruppo primitivo) si chiama la sostituzione (o il gruppo)

trasformato. Così, nell' esempio di dianzi, S è la sostituzione primitiva, S' è la trasformata e T è la sostituzione trasformante.

254. *Se* S' *è la trasformata di una sostituzione* S *ottenuta mercè la trasformante* T, *si ha l'uguaglianza* ST = TS'.

Infatti, se a è una qualunque delle lettere su cui opera la S, sia:

$$S = \begin{pmatrix} \dots b \dots \\ \dots a \dots \end{pmatrix}$$

e

$$T = \begin{pmatrix} \dots a' \dots b' \dots \\ \dots a \dots b \dots \end{pmatrix},$$

cosicchè:

$$S' = \begin{pmatrix} \dots b' \dots \\ \dots a' \dots \end{pmatrix}.$$

Si trova subito, eseguendo i prodotti indicati, che:

$$ST = \begin{pmatrix} \dots b \dots \\ \dots a \dots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dots a' \dots b' \dots \\ \dots a \dots b \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots b' \dots \\ \dots a \dots \end{pmatrix}$$

e

$$TS' = \begin{pmatrix} \dots a' \dots b' \dots \\ \dots a \dots b \dots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dots b' \dots \\ \dots a' \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots b' \dots \\ \dots a \dots \end{pmatrix}.$$

Le sostituzioni ST e TS' sono dunque uguali, perchè ad una lettera qualunque a fanno succedere la stessa lettera b'; c. d. d.

255. Corollario I. — *Se una sostituzione* S *si trasforma mercè una sostituzione* T, *la trasformata* S' *è data da*:

$$S' = T^{-1}ST.$$

Ciò risulta infatti dall'uguaglianza TS' = ST, moltiplicandone i due membri a sinistra per T^{-1}.

256. Corollario II.—*Se due sostituzioni* S *ed* S' *sono simili, esiste almeno una sostituzione* T *per la quale è* ST = TS'.

Infatti, se S' è simile ad S, essa si può ottenere trasformando il simbolo di S mediante una certa sostituzione T.

257. Corollario III. — *Affinchè una sostituzione* S *sia permutabile ad una sostituzione* T, *è necessario e sufficiente che la sostituzione* T, *eseguita nei cicli di* S, *non alteri il significato di* S.

L' eguaglianza:

$$TS = ST$$

equivale infatti (come si vede moltiplicandone i due membri a sinistra per T^{-1}) all' eguaglianza:

$$S = T^{-1}ST$$

la quale ci dice appunto (cfr. Cor. I) che la trasformata di S, mercè la sostituzione T, è ancora la stessa sostituzione S.

258. Questo teorema fornisce un modo assai semplice per co-

struire tutte le sostituzioni T permutabili ad una data sostituzione S.

Sia data, per esempio, la sostituzione:

$$S = (abc)(de)(gh). \qquad (\alpha)$$

Affinchè una sostituzione:

$$T = \begin{pmatrix} a'b'c'd'e'g'h' \\ a\,b\,c\,d\,e\,g\,h \end{pmatrix}$$

sia permutabile ad S, sarà necessario e sufficiente che sia:

$$(a'b'c')(d'e')(g'h') = (abc)(de)(gh).$$

Sarà dunque necessario e sufficiente che i tre cicli (abc), (de), (gh) differiscano dai tre cicli $(a'b'c')$, $(d'e')$, $(g'h')$ soltanto per l'ordine di successione dei cicli stessi, ovvero per uno spostamento circolare delle lettere di ciascun ciclo; giacchè, p. es., il significato del ciclo (abc) è identico a quello del ciclo (bca) ed a quello del ciclo (cab).

Basterà dunque, per esempio, che i cicli:

$$(a'b'c') \ , \ (d'e') \ , \ (g'h')$$

coincidano rispettivamente coi cicli:

$$(cab) \ , \ (gh) \ , \ (ed),$$

cosicchè la sostituzione:

$$T = \begin{pmatrix} c\,a\,b\,g\,h\,e\,d \\ a\,b\,c\,d\,e\,g\,h \end{pmatrix} = (acb)(dgeh)$$

sarà permutabile alla (α).

259. Se un sistema di sostituzioni S_1, S_2, ..., S_λ è ***trasformato in se stesso*** dalla sostituzione T, cioè se le trasformate delle S_1, S_2, ... S_λ per mezzo di T coincidono, fatta astrazione dall'ordine colle stesse S_1, S_2, ..., S_λ, il sistema:

$$S_1T \ , \ S_2T \ , \ldots , \ S_\lambda T \qquad (1)$$

coincide, fatta astrazione dall'ordine, col sistema:

$$TS_1 \ , \ TS_2 \ , \ldots , \ TS_\lambda \qquad (2)$$

e reciprocamente:

Infatti, se il sistema:

$$T^{-1}S_1T \ , \ T^{-1}S_2T \ , \ldots , \ T^{-1}S_\lambda T \qquad (3)$$

coincide col sistema:

$$S_1 \ , \ S_2 \ , \ldots , \ S_\lambda \qquad (4)$$

le (3) moltiplicate a sinistra per T, cioè appunto le (1), coincideranno colle (4) moltiplicate a sinistra per la stessa T, cioè appunto colle (2). Reciprocamente, se le (1) coincidono colle (2), moltiplicando le une e le altre a sinistra per T^{-1}, se ne dedurrà la coincidenza delle (3) colle (4).

260. *Se* H *è un sottogruppo di un gruppo* G, *il quale è trasformato in se stesso da tutte le sostituzioni di* G, *i periodi di 1ª specie nei quali si distribuiscono le sostituzioni di* G *quando si assume come primo periodo il gruppo* H (cfr. art. 244), *coincidono coi periodi di 2ª specie; e reciprocamente.*

È questa una conseguenza della proposizione del precedente articolo; poichè, se 1, S_1, S_2, ..., $S_{\mu-1}$ sono le sostituzioni di H, uno qualunque dei periodi di 1ª specie sarà della forma:

$$T\ ,\ TS_1\ ,\ TS_2\ ,\ \ldots\ ,\ TS_{\mu-1} \qquad (5)$$

essendo T una sostituzione qualunque di G, e quindi, se H è trasformato in se stesso da T, coinciderà col sistema:

$$T\ ,\ S_1T\ ,\ S_2\ ,\ \ldots\ ,\ S_{\mu-1}T \qquad (6)$$

cioè con un periodo di 2ª specie. Reciprocamente, se il periodo (5) coincide con un periodo di 2ª specie, esso dovrà necessariamente coincidere col periodo (6) col quale ha già in comune la sostituzione T; epperò H sarà trasformato in se stesso da T.

261. Se il sistema delle λ sostituzioni S_1, S_2, ..., S_λ si indichi brevemente con $\bar{S}$, la coincidenza dell'aggregato:

$$S_1T\ ,\ S_2T\ ,\ \ldots\ ,\ S_\lambda T$$

coll' aggregato:

$$TS_1\ ,\ TS_2\ ,\ \ldots\ ,\ TS_\lambda$$

si può esprimere brevemente (Cap. I, art. 28) coll'eguaglianza:

$$\bar{S}T = T\bar{S}.$$

Pertanto, in luogo di dire che il sistema $\bar{S}$ è trasformato in se stesso dalla sostituzione T, si potrà, volendo, anche dire che *il sistema* $\bar{S}$ *è permutabile colla sostituzione* T.

262. In luogo di dire che un sistema $\bar{S}$ di sostituzioni è trasformato in se stesso dalla sostituzione T, si suol anche dire che esso è *invariante* rispetto alla sostituzione T.

In particolare, in luogo di dire che un sotto-gruppo di G è trasformato in se stesso da tutte le sostituzioni di G, si dice anche brevemente che esso è un *sotto-gruppo invariante di* G.

Un gruppo che non ammette alcun sotto-gruppo invariante, si dice *semplice;* in caso contrario si dice che è *composto.* Vedremo fra breve l'importanza di tale distinzione.

Note ed Esercizi.

1. Trasformare la sostituzione $\begin{pmatrix} d\,a\,b\,e\,g\,h\,c \\ a\,b\,c\,d\,e\,g\,h \end{pmatrix}$ mediante la sostituzione $(abcdegh)$.

2. Riconoscere che le sostituzioni permutabili con $(abc)(de)(gh)$ sono 24 e quelle permutabili con $(abc)(deg)(hr)(st)$ sono 144.

3. Riconoscere, in base alle convenzioni del Capitolo I (art. 28) che,

se $\bar{S}$ è un certo sistema di sostituzioni, per esprimere che esso è trasformato in se stesso dalla sostituzione T, basta scrivere:

$$T^{-1}ST = S.$$

4. Riconoscere che le sostituzioni trasformanti in se stesso un certo sistema di sostituzioni costituiscono un gruppo.

5. *Se due gruppi di sostituzioni sono tali che ognuno di essi è trasformato in se stesso da tutte le sostituzioni dell'altro, e se inoltre i due gruppi non hanno in comune alcuna sostituzione all' infuori dell' unità, dovrà necessariamente ogni singola sostituzione dell'uno essere permutabile con ogni singola sostituzione dell'altro.*

6. Due gruppi G e Γ si dicono *permutabili fra loro* se, presa ad arbitrio in G una sostituzione g ed in Γ una sostituzione γ, esistono risp. in G e Γ due sostituzioni g' e γ' tali da aversi:

$$g\gamma = \gamma' g'.$$

Ciò premesso: *se due gruppi* G *e* Γ *sono permutabili fra loro e non hanno in comune alcuna sostituzione all'infuori dell'unità, l'ordine del gruppo* (G, Γ) *generato* (cfr. le Note del § precedente) da G e da Γ *è uguale al prodotto dei loro rispettivi ordini.*

Per la dimostrazione di questo teorema e del precedente, si vegga il capitolo III dell' opera: *A. Capelli e G. Garbieri, Corso di analisi algebrica* (Padova, 1886).

7. *Il gruppo alternato fra* n *lettere* (art. 245) *è un gruppo semplice per* $n > 4$. Per la dimostrazione si vegga p. es. l'opera ora citata (p. 208).

§ 7.° — Gruppi di sostituzioni fra due, tre e quattro elementi.

263. Con soli due elementi a e b non si possono formare evidentemente che due gruppi di sostituzioni, rispettivamente degli ordini 1 e 2. Il primo è costituito dalla sostituzione identica 1. Il secondo dalle due sostituzioni 1 ed (ab).

264. Fra 3 lettere a, b, c, oltre al gruppo simmetrico formato dalle 6 sostituzioni fra tre lettere:

$$1 \ , \ (a\,b\,c) \ , \ (a\,c\,b) \ , \ (a\,b) \ , \ (b\,c) \ , \ (c\,a), \qquad (\alpha)$$

si ha primieramente il gruppo alternato formato dalle tre sostituzioni di classe pari:

$$1 \ , \ (a\,b\,c) \ , \ (a\,c\,b), \qquad (\beta)$$

ed è manifesto che non possono esistere altri gruppi formati con sole sostituzioni di classe pari, all' infuori del gruppo costituito dall' unica sostituzione 1.

Ci resta solo a vedere se esiste qualche sotto-gruppo di (α) le cui sostituzioni non siano tutte di classe pari. Il suo ordine dovendo essere un divisore di 6 e al tempo stesso (cfr. art. 246) un numero pari, non può essere che uguale a 2. Esso non può dunque contenere oltre all' unità che un' unica sostituzione di classe dispari e di second' ordine, cioè una delle tre sostituzioni $(a\,b)$, $(b\,c)$, $(c\,a)$.

Concludiamo dunque che il gruppo simmetrico (α) non contiene, oltre il gruppo unitario e il gruppo ottenuto (β), che i tre gruppi

intransitivi di 2º ordine:

$$1 \ , (a\ b)\ ; \qquad 1 \ , (b\ c)\ ; \qquad 1 \ , (c\ a) \qquad (\gamma)$$

265. Fra le 24 sostituzioni del gruppo simmetrico Γ, tra quattro elementi a , b , c , d , ve ne sono 12 di classe pari, cioè le quattro di ordini 1 e 2:

$$1 \ , (a\ b)(c\ d) \ , (a\ c)(b\ d) \ , (a\ d)(b\ c) \qquad (I)$$

il cui insieme costituisce già, come subito si riconosce, un gruppo che indicheremo con H, e le otto di ordine 3:

$$\left.\begin{matrix} (a\ b\ c) \ , (a\ d\ b) \ , (a\ c\ d) \ , (b\ c\ d) \\ (a\ c\ b) \ , (a\ b\ d) \ , (a\ d\ c) \ , (b\ d\ c) \end{matrix}\right\}. \qquad (II)$$

L'insieme delle (I) e (II) costituisce il gruppo alternato; che indicheremo con Q.

Delle 12 sostituzioni di classe dispari, ve ne sono poi sei di ordine 2, cioè:

$$(a\ b) \ , (a\ c) \ , (a\ d) \ , (b\ c) \ , (b\ d) \ , (c)\ d \qquad (III)$$

e sei di ordine 4, cioè:

$$\left.\begin{matrix} (a\ b\ c\ d) \ , (a\ c\ b\ d) \ , (a\ b\ d\ c) \\ (a\ d\ c\ b) \ , (a\ d\ b\ c) \ , (a\ c\ d\ b) \end{matrix}\right\}. \qquad (IV)$$

266. Passiamo a vedere se esistono, oltre quelli già segnalati, altri sotto-gruppi transitivi del gruppo Γ; e supponiamo dapprima che esista in Γ un sotto-gruppo G composto di sole sostituzioni di classe pari. Dico, che se G contiene una sostituzione circolare di tre lettere, cioè una qualunque delle sostituzioni del tipo (II), esso coinciderà necessariamente col gruppo alternato. Supponiamo infatti che esso contenga $(a\ b\ c)$. Poichè esso è transitivo, dovrà contenere almeno una sostituzione S che cambia a in d e quindi dovrà contenere la sostituzione:

$$S^{-1}(a\ b\ c)\ S\ ,$$

che sarà una sostituzione circolare di tre lettere contenente la lettera d. Sia questa per esempio $(a\ b\ d)$. Oltre a queste due sostituzioni circolari ed ai loro quadrati, cioè $(a\ c\ b)$ ed $(a\ d\ b)$, conterrà allora il gruppo G anche le altre quattro sostituzioni del tipo (II), poichè:

$$(a\ b\ c)(a\ d\ b) = (b\ c\ d) \ , \ (a\ d\ b)(a\ b\ c) = (a\ d\ c)$$
$$(a\ c\ b)(a\ b\ d) = (a\ c\ d) \ , \ (a\ b\ d)(a\ c\ b) = (b\ d\ c).$$

Inoltre conterrà anche le sostituzioni del tipo (I), poichè per esempio:

$$(a\ b)(c\ d) = (a\ d\ c)(a\ d\ b).$$

Se il gruppo G non coincide col gruppo alternato, esso non po-

trà dunque contenere che sostituzioni del tipo (I); e poichè esso è per supposto transitivo, le dovrà contenere tutte e quattro, cioè coinciderà col gruppo H.

267. Supponiamo ora in secondo luogo che il sotto-gruppo G contenga sostituzioni di classe pari e sostituzioni di classe dispari. Le sostituzioni di classe pari formeranno un gruppo K e se K è transitivo, dovrà coincidere, per quanto si è visto all' art. precedente col gruppo H. In questa ipotesi il gruppo G sarà dunque generato, dal gruppo H combinato con una sostituzione S di classe dispari. In effetto prendendo per S una sostituzione del tipo (III), per esempio $(a\ b)$, si ha il gruppo di ordine 8, che indicheremo con R_1, costituito dalle sostituzioni:

$$\left.\begin{matrix} 1\ ,\ (a\ b)(c\ d)\ ,\ (a\ d)(b\ c)\ ,\ (a\ c)(b\ d) \\ (a\ b)\ ,\ (c\ d)\ ,\ (a\ d\ b\ c)\ ,\ (a\ c\ b\ d) \end{matrix}\right\} R_1$$

cioè dalle sostituzioni di H e dalle sostituzioni di H moltiplicate a sinistra per $(a\ b)$. Che queste 8 sostituzioni formino un gruppo, risulta dal fatto evidente che il gruppo H è trasformato in se stesso da ogni sostituzione di Γ, ed in particolare dalla $(a\ b)$; cosicchè (cfr. art. 259) le sostituzioni di H moltiplicate per $(a\ b)$ a sinistra non differiscono, fatta astrazione dall' ordine, dalle sostituzioni di H moltiplicate per $(a\ b)$ a destra. Dalla forma di R_1 è poi manifesto che, se per S si prenda una sostituzione del tipo (IV), per esempio $(a\ d\ b\ c)$, si ricade sempre in un gruppo dello stesso tipo di R_1.

Di gruppi del tipo R_1 ve ne sono evidentemente altri due, che indicheremo con R_2 ed R_3, che si deducono da R_1 scambiando dappertutto a con c ovvero a con d.

268. Se poi K è intransitivo, si riconosce subito che esso è di 2° ordine e del tipo:

$$1\ ,\ (a\ b)(c\ d) \qquad (K_1)$$

ovvero di 3° ordine del tipo:

$$1\ ,\ (a\ b\ c)\ ,\ (a\ c\ b); \qquad (K_2)$$

cosicchè G sarà generato combinando uno di questi due tipi di gruppi con una sostituzione di classe dispari, S, che lo trasforma in se stesso.

Ora, delle sostituzioni del tipo (III), le sole che trasformino K_1 in se stesso, sono (ab) e (cd) che combinate con K_1 danno origine al gruppo intransitivo:

$$1\ ,\ (ab)\ ,\ (cd)\ ,\ (ab)(cd)$$

e, del tipo IV, le sole che trasformino K_1 in se stesso, sono $(acbd)$ ed $(adbc)$ che combinate con K_1 danno origine al gruppo *ciclico*, che indicheremo con S_1:

$$1\ ,\ (acbd)\ ,\ (acbd)^2 = (ab)(cd)\ ,\ (acbd)^3 = (adbc).$$

Quanto alle sostituzioni del tipo (III) che trasformano in se stesso K_2, vi sono le sole (ab), (ac), (bc) che combinate con K_2 generano il gruppo intransitivo di 6° ordine:

$$1 \,,\, (abc) \,,\, (acb) \,,\, (ab) \,,\, (ac) \,,\, (bc)$$

cioè il gruppo simmetrico (cfr. art. 264) fra tre sole lettere. Finalmente di sostituzioni del tipo (IV) che trasformino in se stesso K_2, non ve ne ha alcuna.

Concludiamo dunque che *di sotto-gruppi transitivi contenuti in* Γ *si hanno, oltre il gruppo unitario, solo i seguenti*:

1°) *il gruppo alternato* Q *di ordine* 12.

2°) *i tre gruppi simili* R_1, R_2, R *di ordine* 8.

3°) *il gruppo di ordine* 4 *formato dalle* (I).

4°) *tre gruppi ciclici simili* S_1, S_2, S_3 *formati rispettivamente dalle potenze di* (abcd), (acbd), (abdc).

Note.

1. Al gruppo:

$$1 \,,\, (ab)(cd) \,,\, (ac)(bd) \,,\, (ad)(bc)$$

è opportuno dare il nome di gruppo *anarmonico,* poichè, se *a*, *b*, *c*, *d* rappresentano dei numeri arbitrari, le sue sostituzioni lasciano inalterato il così detto *rapporto anarmonico*:

$$\frac{a-c}{b-c} : \frac{a-d}{b-d}$$

di cui avremo occasione di occuparci in seguito.

2. Quanto ai gruppi intransitivi contenuti nel gruppo simmetrico fra 4 lettere, il lettore riconoscerà immediatamente che, oltre ai tre tipi (α), (β), (γ) dell'art. 264, non può esistere che il tipo di ordine 4:

$$1 \,,\, (ab) \,,\, (cd) \,,\, (ab)(cd).$$

§ 8.° — Isomorfismo dei gruppi di sostituzioni

269. Dati due aggregati A_1, A_2, A_3, . . . e B_1, B_2, B_3, . . . di oggetti ben distinti, supponiamo sia stato fissato un certo criterio in virtù del quale tutte le coppie $A_i\,B_j$ che si possono formare combinando un elemento qualunque del primo aggregato con un elemento qualunque del secondo si trovino distinte in due classi ben determinate. Si potrà allora dire, per brevità di linguaggio, che i due elementi A_i e B_j sono *corrispondenti* fra loro se la coppia $A_i\,B_j$ appartiene alla prima classe; si dirà invece che *non sono corrispondenti* se la detta coppia non appartiene alla prima classe, cioè appartiene alla seconda.

È chiaro che la *corrispondenza fra i due aggregati* dati si potrà stabilire in differenti modo variando la *legge di corrispondenza,* cioè il criterio determinante le due classi.

In una stessa corrispondenza, un elemento qualunque A_i potrà avere per corrispondenti nel secondo aggregato più elementi, ovvero un solo elemento; nè si esclude che qualche elemento A_i possa anche non avere alcun corrispondente.

Quando ogni elemento di un aggregato $\bar{A}$ ha un unico corrispondente nell' aggregato $\bar{B}$, si dice che la corrispondenza è univoca rispetto all' aggregato $\bar{A}$. Se poi la corrispondenza è univoca rispetto ad entrambi gli aggregati, se, cioè, ad ogni elemento di $\bar{A}$ corrisponde un unico elemento di $\bar{B}$ e ad ogni elemento di $\bar{B}$ un unico elemento di $\bar{A}$, si dice che la corrispondenza è *biunivoca* (o univoca assolutamente).

270. Dette ora $g_1 = 1$, g_2, g_3, ..., g_m le sostituzioni di un gruppo G e $\gamma_1 = 1$, γ_2, γ_3, ..., γ_μ quelle di un altro gruppo Γ, supponiamo che fra le sostituzioni dei due gruppi abbia luogo una corrispondenza tale che se g_i è corrispondente di γ_h e g_j di γ_k, sia anche sempre $g_i g_j$ corrispondente di $\gamma_h \gamma_k$, comunque si siano scelte le due coppie di elementi corrispondenti. In tal caso i due gruppi G e Γ si dicono *isomorfi*, e la corrispondenza fra essi stabilita si dirà una corrispondenza di *isomorfismo.*

Ci è sempre lecito di ritenere che ad ogni sostituzione di G corrisponda almeno una sostituzione di Γ e reciprocamente. Infatti, ove così non fosse, quelle sostituzioni di G alle quali corrispondessero in Γ una o più sostituzioni, formerebbero un sotto-gruppo G′ e similmente le sostituzioni di Γ aventi almeno una corrispondente in G formerebbero un sotto-gruppo Γ′ di Γ; diguisachè la corrispondenza fra G e Γ si ridurrebbe in sostanza ad una corrispondenza fra G′ e Γ′.

271. Ciò premesso, non è difficile di riconoscere che *ogni sostituzione di* G *ha in* Γ *lo stesso numero di corrispondenti.*

Supponiamo infatti che ad una sostituzione g di G corrispondano in Γ le ρ sostituzioni

$$\sigma_1 , \sigma_2 , \ldots , \sigma_\rho$$

e che ad un' altra sostituzione g' di G ne corrispondano ρ', delle quali una a piacere sia indicata con σ'. Sia poi τ una delle sostituzioni di Γ che corrispondono alla g^{-1} di G. Dall' essere:

$$\begin{array}{lll} g & \text{corrispondente di} & \sigma_i \\ g^{-1} & \quad\text{»} \qquad\qquad \text{»} & \tau \\ g' & \quad\text{»} \qquad\qquad \text{»} & \sigma' \end{array}$$

segue che $gg^{-1}g'$ sarà corrispondente di $\sigma_i \, \tau \, \sigma'$, cioè saranno corrispondenti:

$$g' \qquad \text{e} \qquad \sigma_i \tau \sigma' \qquad (i = 1 , 2 , \ldots , \rho)$$

Alla sostituzione g' corrispondono dunque in Γ almeno ρ sostituzioni distinte. È dunque $\rho' \geqq \rho$; onde, poichè si proverebbe similmente che $\rho \geqq \rho'$, si conclude appunto $\rho = \rho'$.

272. Sia ora O_1 l' insieme di tutte quelle sostituzioni di G che hanno per corrispondente in Γ la sostituzione 1; Ω_1 l' insieme di tutte quelle sostituzioni di Γ che sono corrispondenti della sostituzione 1 di G. Dico che *le sostituzioni di* O_1 *formano un gruppo e così quelle di* Ω_1.

Infatti, poichè a due sostituzioni qualunque di O_1 corrisponde in Γ l'unità, al loro prodotto corrisponderà 1×1, cioè ancora l'unità. Il prodotto di due sostituzioni qualunque di O_1 è dunque una sostituzione di O_1; c. d. d.

273. Corollario. — *Le sostituzioni* $g_1 = 1$ e $\gamma_1 = 1$ *sono sempre corrispondenti.* Infatti O_1 ed Ω_1, essendo gruppi, contener debbono la sostituzione identica.

274. Una sostituzione qualunque s di O_1 ed una qualunque di Ω_1 sono corrispondenti. Infatti, poichè alle sostituzioni 1 ed s di G corrispondono risp. le sostituzioni σ ed 1 di Γ, al prodotto 1×1, cioè s, corrisponderà $\sigma \times 1$, cioè σ.

Inoltre una sostituzione qualunque di O_1 non può avere per corrispondente in Γ una sostituzione che non appartenga ad Ω_1. Supponiamo, infatti, che alla sostituzione s di Ω_1 corrisponda in Γ una sostituzione γ. Poichè s è corrispondente di γ ed è anche corrispondente di 1, sarà s^2 corrispondente di γ e quindi anche s^3 corrispondente di γ, e così via; cosicchè, se ν è l'ordine di s, sarà anche s^ν corrispondente di γ, cioè 1 corrispondente di γ; onde γ dovrà appunto far parte di Ω_1.

275. Sia ora g una qualsiasi sostituzione di G non contenuta in O_1 e γ una qualunque delle sue corrispondenti (che, per quanto si è già visto, non potrà essere contenuta in Ω_1). È facile riconoscere che una qualunque delle sostituzioni contenute nel periodo O_1g ed una qualunque di quelle di $\Omega_1\gamma$ saranno fra loro corrispondenti. Invero, se s sia una qualunque delle sostituzioni di O_1 e σ una qualunque di quelle di Ω_1, poichè s è corrispondente di σ e g di γ, sarà appunto sg corrispondente di $\sigma\gamma$.

Inoltre una qualunque delle sostituzioni contenute in O_1g non può avere per corrispondenti che sostituzioni contenute in Ω_1g, poichè altrimenti il numero delle sostituzioni ad essa corrispondenti sarebbe superiore al numero delle sostituzioni di Ω_1, cioè al numero delle sostituzioni corrispondenti alla sostituzione 1 di G, contrariamente a quanto si è già stabilito (art. 271).

276. Abbiamo dimostrato che tutte le sostituzioni di Γ corrispondenti a g sono le sostituzioni di $\Omega_1\gamma$; ma, in modo del tutto simile, si sarebbe potuto dimostrare che sono quelle di $\gamma\Omega_1$. Pertanto le sostituzioni contenute in $\Omega_1\gamma$ coincider debbono con quelle contenute in $\gamma\Omega_1$; in altri termini il gruppo Ω_1 è permutabile a γ. Dunque: *nell'isomorfismo fra due gruppi* G *e* Γ, *il sotto-gruppo formato da quelle sostituzioni di* G *alle quali corrisponde in* Γ *l'unità, è un sotto-gruppo invariante di* G. (cfr. art. 262).

277. Da quanto si è dimostrato conchiudiamo poi che, se

$$O_1 \,,\; O_1g_2 \,;\; O_1g_3 \,, \ldots ,\; O_1g_n$$

sono i periodi nei quali si distribuiscono le sostituzioni del gruppo G, quando si prenda per primo periodo il sotto-gruppo O_1, e se $\gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_n$ sono delle sostituzioni di Γ scelte a piacere fra

quelle che corrispondono risp. alle $g_2, g_3, \ldots, g_n$, le sostituzioni di Γ si distribuiranno alla lor volta nei periodi

$$\Omega_1 \,, \; \Omega_1\gamma_2 \,, \; \Omega_1\gamma_3 \,, \ldots , \Omega_1\gamma_n \,,$$

corrispondendo ad ogni sostituzione del periodo $O_1 g_i$ tutte e solc quelle del periodo $\Omega_1\gamma_i$.

278. Se poniamo per brevità: $O_1 g_i = O_i$, $\Omega_1\gamma_i = \Omega_i$, vediamo dunque che l' isomorfismo fra G e Γ si riduce in sostanza a far corrispondere ai periodi $O_1, O_2, \ldots, O_n$ di G ordinatamente i periodi $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$ di Γ.

Se r è l'ordine di O_1 e ρ quello di Ω_1, si dirà che *fra i due gruppi* G *e* Γ *ha luogo un isomorfismo* $[r, \rho]$; in quanto, cioè, ad ogni sostituzione di G corrispondono ρ sostituzioni di Γ e ad ogni sostituzione di Γ ne corrispondono r in G.

Se $r = \rho = 1$, l' isomorfismo si chiama *oloedrico.*

Se uno dei due numeri r e ρ, p. es. ρ, è diverso da 1 nel mentre che l'altro è uguale ad 1, l'isomorfismo si dice *meriedrico* (rispetto al gruppo Γ).

279. È utile di notare che, *qualunque sia l'isomorfismo fra* G *e* Γ, *se* g *e* γ *sono due sostituzioni che si corrispondono, anche le inverse* g^{-1} *e* γ^{-1} *sono fra loro corrispondenti.*

Supponiamo infatti che, essendo γ corrispondente di g, sia γ' una corrispondente di g^{-1}. Poichè al prodotto gg^{-1}, cioè ad 1, corrisponde il prodotto $\gamma\gamma'$, sarà $\gamma\gamma' = \sigma$, essendo σ una sostituzione di Ω_1 e si potrà scrivere $\gamma' = \gamma^{-1}\sigma$. Dall' essere g^{-1} corrispondente di $\gamma^{-1}\sigma$ e dall' essere 1 corrispondente di σ^{-1} (per il fatto che, essendo σ contenuta nel gruppo Ω_1, vi è contenuta anche σ^{-1}) si deduce ora che $\gamma^{-1} \times 1$ è corrispondente di $\gamma^{-1}\sigma\sigma^{-1}$, cioè appunto che g^{-1} è corrispondente di γ^{-1}.

280. Si noti che, se G e Γ sono isomorfi, ad ogni sotto-gruppo di G corrisponde un sotto-gruppo di Γ; se poi l'isomorfismo è meriedrico $[1, \rho]$, ad ogni sotto-gruppo di G corrisponde un sotto-gruppo di Γ il cui ordine è multiplo del primo secondo il fattore fisso ρ.

281. Supponiamo ora, reciprocamente, che un gruppo G contenga un sotto-gruppo invariante H_1. I periodi:

$$H_1 \,, H_2 \,, \ldots , H_n$$

nei quali si distribuiscono tutte le sostituzioni di G, non fanno che permutarsi fra loro (art. 260) quando si moltiplichino tutti a destra (o a sinistra) per una qualsiasi sostituzione g di G. Ad ogni sostituzione g corrisponde dunque una sostituzione:

$$\gamma = \begin{pmatrix} H_1 g & H_2 g & & H_n g \\ H_1 & H_2 & \ldots & H_n \end{pmatrix}$$

fra gli elementi $H_1, H_2, \ldots, H_n$, e tutte le sostituzioni γ così ottenute formeranno un gruppo Γ isomorfo meriedricamente a G,

poichè:

$$\begin{pmatrix} H_1gg' & H_2gg' & \dots \\ H_1 & H_2 & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_1g & H_2g & \dots \\ H_1 & H_2 & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_1gg' & H_2gg' & \dots \\ H_1g & H_2g & \dots \end{pmatrix} = \gamma\gamma'.$$

Ad ogni sostituzione di G che fa parte di H_1, corrisponde in Γ l'unità, poichè se h sia una sostituzione di H, dall' essere H invariante rispetto a G segue:

$$H_ih = H_1g_ih = H_1h'g_i = H_1g_i = H_1 ,$$

essendo h' una certa sostituzione di H_1. Reciprocamente, se a g corrisponde in Γ l'unità, dovrà g far parte di H, poichè dovrà essere $H_1g = H_1$.

282. Nelle cose fin quì dimostrate è contenuto il seguente teorema: *ogni isomorfismo* $[r , \rho]$ *si può considerare come il risultato di un isomorfismo* $[r , 1]$ *cui si faccia succedere un isomorfismo* $[1 , \rho]$.

Siano infatti nell' isomorfismo $[r , \rho]$ fra G e Γ:

$$O_1 , O_2 , \dots , O_n$$

ed

$$\Omega_1 , \Omega_2 , \dots , \Omega_n$$

i periodi corrispondenti, cosicchè ad ogni O_i, che contiene r sostituzioni, corrisponde Ω_i che ne contiene ρ.

Per l' articolo precedente, esiste un gruppo T di n sostituzioni $t_1 , t_2 , \dots , t_n$ che è con G in isomorfismo meriedrico, corrispondendo ad O_i la sostituzione t_i. Ora è chiaro che, in virtù di questo isomorfismo $[r , 1]$ fra G e T e dell' isomorfismo preesistente fra G e Γ, deve sussistere poi un isomorfismo $[1 , \rho]$ fra T e Γ, che alla sostituzione t_i di O_i fa corrispondere il periodo Ω_i di Γ.

Questo teorema è assai importante, perchè fa vedere come lo studio di qualsiasi isomorfismo si possa ricondurre a quello dei soli isomorfismi oloedrici e meriedrici.

§ 9.º — Applicazioni dell' isomorfismo — Limite inferiore dell' indice di un gruppo.

283. Sia G un gruppo di sostituzioni di ordine n ed H un suo sotto-gruppo di ordine h. Se $n = hi$, le sostituzioni di G si possono rappresentare (art.   ) mediante i periodi:

$$H , Ht_2 , Ht_3 , \dots , Ht_i. \qquad (1)$$

Ad ogni sostituzione g di G corrisponde (analogamente a quanto si è visto all' art. 279) una sostituzione

$$\gamma = \begin{pmatrix} Hg & Ht_2g & \dots & Ht_ig \\ H & Ht_2 & \dots & Ht_i \end{pmatrix}$$

fra i periodi (1), e tutte le sostituzioni γ così ottenute costituiscono un gruppo Γ isomorfo al gruppo G. Questo isomorfismo sarà in

generale meriedrico rispetto a G. Sia dunque ρ il numero delle sostituzioni di G che danno origine ad una stessa sostituzione di Γ.

Per avere ρ, bisognerà ricercare quante sono le sostituzioni di G che hanno per corrispondente in Γ l'unità. Se ora g è una siffatta sostituzione, si dovrà avere:

$$Hg = H\ ,\ \ Ht_2g = Ht_2\ ,\dots ,\ \ Ht_ig = Ht_i$$

il che equivale a dire che g si dovrà trovare in ognuno dei gruppi

$$H\ ,\ t_2^{-1}Ht_2\ ,\ \dots\ ,\ t_i^{-1}Ht_i. \tag{2}$$

Il numero ρ *è dunque l'ordine del gruppo* K, *sottogruppo invariante di* G, *formato da tutte le sostituzioni che appartengono simultaneamente ad ognuno dei gruppi* (2).

284. *Il gruppo* Γ, *che opera fra gli* i *elementi* (1), *è transitivo.*

Infatti, si troverà sempre una sostituzione γ che sostituisce ad H un altro periodo qualunque Ht_ρ. Basterà, evidentemente, a tale oggetto, di prendere per γ la corrispondente della sostituzione t_ρ di G.

285. Se ν è l'ordine di Γ, si ha, in virtù dell'isomorfismo fra e G Γ:

$$\nu = \frac{n}{\rho}$$

e quindi, poichè Γ opera fra i lettere:

$$\frac{n}{\rho} \lesseqqgtr \lfloor i ,$$

d' onde, poichè

$$n = hi ,$$

si deduce

$$h \lesseqqgtr \rho \,\lfloor i-1 \tag{3}$$

286. *Se* G *è un gruppo semplice qualunque* (art. 262), *ed* H *un suo sotto-gruppo di ordine* h *e di indice* i *rispetto a* G (cfr. art. 242), *si ha* $h \lesseqqgtr \lfloor i-1$.

È questo un corollario della (3); poichè, se G è semplice, si ha $\rho = 1$.

287. Applichiamo la (3) prendendo per H un gruppo qualunque di sostituzioni, tutte di classe pari, fra m lettere, e, per G il gruppo alternato (art. 245) relativo alle stesse lettere, il quale è un gruppo semplice (cfr. Note del § 6.º). La (3) prende (cfr. articolo 286) la forma:

$$h \lesseqqgtr \lfloor i-1 , \tag{4}$$

dove i è l' indice dl H rispetto al gruppo alternato; cosicchè l'indice assoluto di H cioè il suo indice rispetto all' intero gruppo

simmetrico, è $j = 2i$. Poichè

$$h = \frac{\lfloor m}{j} = \frac{\lfloor m}{2i}$$

sostituendo questa espressione di h in (4), otteniamo:

$$\lfloor m = 2 \lfloor i \, ,$$

onde sarà evidentemente $i \gtreqless m$, cioè $j \gtreqless 2m$.

Dunque: *l'indice di un gruppo di sostituzioni tutte di classe pari, fra* m *lettere* (*che non sia il gruppo alternato*) *non può essere inferiore a* 2 m (per m > 4).

Questo teorema cade in difetto per $m = 4$, poichè infatti fra quattro lettere a, b, c, d si ha (art. 265) il gruppo

$$1 \;,\; (a\,b)(c\,d) \;,\; (a\,d)(b\,c) \;,\; (a\,c)(b\,d)$$

il cui indice, 6, è inferiore ad 8.

288. Sia ora H un gruppo di sostituzioni, non tutte di classe pari, fra m lettere ($m > 4$) di indice assoluto j. Come sappiamo (art. 246), le sue sostituzioni saranno metà di classe dispari e metà di classe pari e quest' ultime formeranno un gruppo H' di indice $2j$. Per il teorema precedente si avrà dunque $2j \gtreqless 2m$, cioè: *l'indice di un gruppo di sostituzioni non tutte di classe pari fra* m *lettere* (m > 4) *non può essere inferiore ad* m.

Dall' insieme dei due casi trattati risulta che *con* m *lettere* (m > 4) *non si possono formare gruppi di sostituzioni il cui indice sia inferiore ad* m.

289. Prima di chiudere questo §, ci sarà utile rilevare un caso particolare importanti del teorema dell' art. 279.

Se si prende per H il sotto-gruppo formato dall' unità; i periodi H , H_1 , H_2 , . . . si riducono alle stesse sostituzioni

$$1 \;,\; g_2 \;,\; g_3 \;,\; \ldots \;,\; g_n$$

di G, cosicchè il gruppo isomorfo Γ opererà, transitivamente (articolo 284), su n elementi. Dallo stesso articolo segue poi che l'isomorfismo sarà oloedrico, giacchè il numero ρ, dovendo essere l'ordine di un sotto-gruppo di H, sarà evidentemente uguale ad 1.

Vediamo dunque che *un gruppo qualunque di ordine* n *è isomorfo oloedricamente ad un gruppo transitivo di ordine* n *fra* n *lettere.*

Note ed Esercizi.

1. Rilevare nella dimostrazione dell'art. 283 il teorema: *le sostituzioni di* G *alle quali nell' isomorfismo fra* G *e* Γ *corrispondono sostituzioni* γ *che lasciano fermo un dato periodo* Ht, *altro non sono che le sostituzioni del gruppo* t^{-1}Ht.

2. Si dimostri, in aggiunta all' art. 284, che Γ non può essere due volte transitivo, se $h < i - 1$.

3. A proposito del teorema dell' art. 288, si noti che, effettivamente,

nel gruppo simmetrico fra m lettere, esiste almeno un sotto-gruppo di indice m, che è il gruppo H formato da tutte quelle sostituzioni che lasciano ferma una lettera.

Supponiamo che esista anche un altro sotto-gruppo K che sia pure di indice m. Le sostituzioni del gruppo simmetrico G danno luogo, nel modo già spiegato (art. 288) alle corrispondenti sostituzioni di un gruppo isomorfo Γ fra gli m periodi:

$$K \ , \ Kt_2 \ , \ Kt_3 \ , \ . \ . \ . \ , \ Kt_m .$$

In questo caso si ha $\rho = 1$, poichè ρ era l'ordine di un sotto-gruppo di K invariante rispetto a G. Ora G non contiene altri sotto-gruppi invarianti, all'infuori del gruppo alternato; poichè, se ne contenesse uno, le sostituzioni comuni ad esso e al gruppo alternato formerebbero un sotto-gruppo invariante rispetto al gruppo alternato che è invece un gruppo semplice. D'altra parte il gruppo alternato non può essere contenuto in K che è di indice m. L'isomorfismo fra G e Γ è dunque oloedrico e per conseguenza al gruppo K corrisponderà in Γ un gruppo dello stesso ordine K' le cui sostituzioni lasciano evidentemente fermo il primo periodo K. Esso non è dunque altro che il gruppo simmetrico fra $n-1$ periodi

$$Kt_2 \ , \ Kt_3 \ , \ . \ . \ . \ , \ Kt_m \ ,$$

cosicchè denominando questi periodi colle stesse lettere b , c , d , . . . su cui opera il gruppo H, il gruppo K' ricade nello stesso gruppo H. Pertanto si conclude che K è isomorfo oloedricamente ad H. Cioè: *i gruppi di ordine* $\underline{|m-1}$ *contenuti nel gruppo simmetrico fra* m *lettere, sono tutti isomorfi fra loro.*

4. Con ciò non si vuole intendere che essi siano anche tutti simili fra loro (cfr. art. 252). In effetto, fra sei lettere, si ha oltre ai gruppi intransitivi che lasciano ferma una data lettera, anche un gruppo transitivo dello stesso ordine 120.

§ 10.° — Teoremi di Cauchy e di Sylow.

290. Essendo $n = p^\alpha q^\beta r^\gamma \ldots$ l'ordine di un gruppo Γ decomposto nei suoi fattori primi distinti p , q , r , . . . , ci proponiamo dimostrare che esso contiene sempre dei sotto-gruppi di ordine p^α, di ordine q^β e così via (*).

Senza recare alcun danno alla generalità della questione, ci è lecito di ammettere (cfr. art. 289) che il gruppo Γ sia anche transitivo e del *grado* n, cioè che operi sopra n lettere:

$$x_1 \ , \ x_2 \ , \ . \ . \ . \ , \ x_n . \qquad (1)$$

291. Se poniamo $p^{\alpha-1} q^\beta r^\gamma \ldots = v$, d'onde $n = pv$, possiamo in un modo qualunque distribuire le n lettere (1) in v sistemi ciascuno di p lettere:

$$x'_1 , x'_2 , \ldots , x'_p \ ; \ x''_1 , x''_2 , \ldots , x''_p ; \ldots ; x_1^{(v)}, x_2^{(v)}, \ldots , x_p^{(v)} \qquad (2)$$

(*) Questo teorema è stato stabilito da *Sylow* (vedi *Mathematische Annalen* Vol. V. 1872) appoggiandosi sul teorema di *Cauchy* che: *ogni gruppo il cui ordine sia divisibile pel numero primo* p, *contiene almeno una sostituzione di ordine* p. La dimostrazione qui riportata è di *Capelli* (vedi la memoria: *Sopra l'isomorfismo dei gruppi di sostituzioni* nel Giornale di Matematiche di Battaglini, Vol. XVI, 1878). Una terza dimostrazione è stata poi data da *Frobenius* (vedi: *Journal für Mathematik* Vol. 100, 1886).

e considerare tutte le forme distinte $f, f_1, f_2, \ldots$ che può prendere l'espressione:

$$x'_1 x'_2 \ldots x'_p + x''_1 x''_2 \ldots x''_p + \ldots + x_1^{(v)} x_2^{(v)} \ldots x_p^{(v)} \tag{3}$$

per le varie sostituzioni di Γ. È evidente che una qualunque delle sostituzioni di Γ eseguita fra le lettere (1), da cui dipendono le $f, f_1, f_2, \ldots$, avrà per effetto di permutare fra loro le espressioni $f, f_1, f_2, \ldots$ Tuttavia può darsi il caso che taluna di queste espressioni non sia alterata da alcuna delle sostituzioni di Γ. Se questo caso ha luogo, ci è sempre lecito di prendere per f una appunto di siffatte espressioni; ed allora le sostituzioni di Γ, non dovendo alterare l'espressione (3), dovranno ridursi a delle permutazioni fra i v prodotti:

$$y_1 = x'_1 x'_2 \ldots x'_p, \; y_2 = x''_1 x''_2 \ldots x''_p, \ldots, y_v = x_1^{(v)} x_2^{(v)} \ldots x_p^{(v)} \tag{4}$$

cosicchè ad ogni sostituzione γ di Γ fra le $x_1, \ldots, x_n$ corrisponderà una sostituzione γ' fra le $y_1, y_2, \ldots, y_v$. Tutte queste nuove sostituzioni costituiranno un nuovo gruppo Γ', evidentemente isomorfo a Γ, il quale sarà del pari transitivo, poichè lo era Γ.

292. Ciò posto, operiamo con Γ' analogamente a quanto si è fatto con Γ. Cioè, poichè Γ' opera fra le v lettere

$$y_1, y_2, \ldots, y_v, \tag{1)'$$

poniamo (se $\alpha > 1$): $v' = p^{\alpha-2} q^\beta r^\gamma \ldots$ e distribuiamo in un modo qualunque le lettere (1)' in v' sistemi ciascuno di p lettere:

$$y'_1, y'_2, \ldots, y'_p; \; y''_1, y''_2, \ldots, y''_p; \ldots; \; y_1^{(v')}, y_2^{(v')}, \ldots, y^{(v')}. \tag{2)'$$

Siano $f', f'_1, f'_2, \ldots$ le forme distinte che può prendere l'espressione

$$y'_1 y'_2 \ldots y'_p + y''_1 y''_2 \ldots y''_p + \ldots + y_1^{(v')} y_2^{(v')} \ldots y_p^{(v')} \tag{3)'$$

per mezzo di tutte le sostituzioni, di Γ', fra le $y_1, y_2, \ldots y_v$ (da considerarsi, si noti bene, come lettere arbitrarie fra loro distinte). Se di bel nuovo si presenti il caso che taluna delle espressioni $f', f'_1, f'_2 \ldots$ rimanga inalterata da tutte le sostituzioni di Γ', potremo sempre supporre che essa sia la stessa f', dimodochè allora le sostituzioni di Γ', non potendo alterare l'espressione (3)', non faranno che permutare fra loro i v' prodotti:

$$z_1 = y'_1 y'_2 \ldots y'_p, \; z_2 = y''_1 y_2'' \ldots y''_p, \ldots, z_{v'} = y_1^{(v')} y_2^{(v')} \ldots y_p^{(v')}. \tag{4)'$$

In tal modo alle sostituzioni di Γ' fra le lettere (1)' corrisponderanno delle sostituzioni fra le lettere $z_1, z_2, \ldots, z_v$; esse costituiranno un nuovo gruppo Γ'' isomorfo a Γ', che sarà transitivo, poichè Γ' era esso stesso transitivo.

Ed ora nello stesso modo come da Γ' siamo passati a Γ'', passeremo, se la cosa è possibile, dal gruppo Γ'' ad un nuovo gruppo Γ''' isomorfo a Γ'' e transitivo, ed operante sopra $p^{\alpha-3} q^\beta r^\gamma \ldots$ lettere; e così di seguito finchè sarà possibile andare innanzi. Nel caso più eccezionale potremo così giungere fino ad un gruppo transitivo $\Gamma^{(\alpha)}$ il quale non operi più che sopra $q^\beta . r^\gamma \ldots$ lettere.

293. E bene, per maggior chiarezza, di trattare questo caso separatamente. Se si consideri che nella serie di gruppi $\Gamma, \Gamma', \ldots, \Gamma^{(\alpha)}$ ciascuno di essi è isomorfo al precedente, si vede che l'ultimo di essi è isomorfo al primo, corrispondendo ad ogni sostituzione di Γ un'unica sostituzione di Γ'. Per conseguenza l'ordine di $\Gamma^{(\alpha)}$, che indicheremo con $n^{(\alpha)}$, sarà (art. 280) un divisore dell'ordine n di Γ; onde potremo scrivere:

$$n = \rho \cdot n^{(\alpha)}. \tag{5}$$

Inoltre, essendo $\Gamma^{(\alpha)}$ un gruppo transitivo fra $q^\beta r^\gamma \ldots$ lettere, il suo ordine sarà dato (art. 249) da

$$n^{(\alpha)} = \lambda^{(\alpha)} \cdot q^\beta r^\gamma \ldots, \tag{6}$$

dove $\lambda^{(\alpha)}$ è l'ordine del sotto-gruppo $\Lambda^{(\alpha)}$ formato da tutte quelle sostituzioni di $\Gamma^{(\alpha)}$ che non ispostano una certa lettera fissata a piacere. Sia ora Λ il gruppo formato da tutte quelle sostituzioni di Γ alle quali, nel nostro isomorfismo, corrispondono le sostituzioni di $\Lambda^{(\alpha)}$. Come l'ordine di Γ è uguale per la (5) all'ordine di $\Gamma^{(\alpha)}$ moltiplicato per ρ, così l'ordine di Λ sarà eguale a quello di $\Lambda^{(\alpha)}$ moltiplicato per lo stesso numero. L'ordine di Λ è dunque dato da

$$\lambda = \rho \cdot \lambda^{(\alpha)}.$$

Da questa eguaglianza, eliminandone ρ e $\lambda^{(\alpha)}$ per mezzo delle (5) e (6), si ricava:

$$\lambda = \frac{n}{q^\beta r^\gamma \ldots} = p^\alpha.$$

Nel caso eccezionale che abbiamo considerato, resta così senz'altro già dimostrata l'esistenza di un gruppo parziale Λ di ordine p^α contenuto in Γ.

294. In generale, però, dovremo arrestarci ad un gruppo $\Gamma^{(\alpha-k)}$, $(k<\alpha)$, il quale opera sopra $p^k q^\beta r^\gamma \ldots$ lettere e, al pari di tutti quelli che lo precedevano, è transitivo ed isomorfo a Γ. Siano $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$ gli elementi su cui opera $\Gamma^{(\alpha-k)}$. Essi possono distribuirsi in $w = p^{k-1} q^\beta r^\gamma \ldots$ sistemi, ciascuno di p lettere:

$$\xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi'_p\,;\; \xi''_1, \xi''_2, \ldots, \xi''_p\,; \ldots;\; \xi_1^{(w)}, \xi_2^{(w)}, \ldots, \xi_p^{(w)}$$

che danno luogo all'espressione:

$$\varphi_1 = \xi'_1\,\xi'_2 \ldots \xi'_p + \xi''_1\,\xi''_2 \ldots \xi''_p + \ldots + \xi_1^{(w)}\,\xi_2^{(w)} \ldots \xi_p^{(w)}. \tag{7}$$

Questa volta, fra le espressioni distinte $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu$ che possono nascere dalla (7) mediante tutte le sostituzioni fra le lettere $\xi_1, \xi_2, \ldots$, non ve ne ha neppur una che sia lasciata inalterata da tutte le sostituzioni di $\Gamma^{(\alpha-k)}$, poichè altrimenti si potrebbe passare da questo gruppo ad un nuovo gruppo $\Gamma^{(\alpha-k+1)}$, il che è contro le ipotesi fatte.

Ciò posto, il numero delle espressioni distinte è dato da

$$\nu = \frac{\underline{|pw}}{(\underline{|p})^w \cdot \underline{|w}}. \tag{8}$$

Infatti, il numero delle sostituzioni possibili fra le $p \cdot w$ lettere $\xi_1, \xi_2, \ldots$ è $|\underline{pw}$; ma dalla forma della espressione (7) appare manifestamente che esistono sempre $(|\underline{p})^w |\underline{w}$ sostituzioni che lasciano inalterata ogni espressione φ_i.

Il numero ν gode della proprietà, per noi importante, di non essere divisibile per il numero primo p. Ed invero i soli fattori contenuti in $|\underline{p \cdot w}$, che siano divisibili per p sono:

$$p\,,\, 2p\,,\, 3p\,,\, \ldots,\, wp\,,$$

ed il loro prodotto $p^w\, (|\underline{w})$ entra evidentemente come fattore nel denominatore dell'espressione.

295. Le sostituzioni di $\Gamma^{(\alpha-k)}$ non potendo che scambiare fra loro le espressioni $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu$, queste si distribuiranno, rispetto alle sostituzioni di $\Gamma^{(\alpha-k)}$, in certi sistemi di intransitività (251) composti risp. di $h_1, h_2, h_3, \ldots$, espressioni; cosicchè, per esempio, le h_i espressioni φ che compongono l'i^{esimo} sistema, verranno semplicemente scambiate fra loro dalle sostituzioni di $\Gamma^{(\alpha-k)}$. Poichè

$$h_1 + h_2 + h_3 + \ldots = \nu$$

e ν si è dimostrato essere primo con p, è chiaro che almeno uno di questi numeri, per esempio h_i, sarà primo con p. Inoltre sarà sempre h_i diverso dall'unità, poichè altrimenti esisterebbe un'espressione φ la quale verrebbe scambiata soltanto in se stessa, cioè resterebbe inalterata da tutte le sostituzioni di Γ.

Possiamo dunque ammettere l'esistenza di un sistema di espressioni

$$\varphi'_1\,,\, \varphi''_1\,,\, \varphi'''_1\,,\, \ldots,\, \varphi_1^{(h)} \tag{9}$$

che godono della proprietà di essere permutate fra loro transitivamente dalle sostituzioni di $\Gamma^{(\alpha-k)}$, essendo il numero h delle espressioni stesse maggiore di 1 e primo con p.

È chiaro che ad ogni sostituzione γ di $\Gamma^{(\alpha-h)}$ corrisponderà una sostituzione θ fra le (9) e che tutte queste sostituzioni costituiranno un gruppo Θ isomorfo a $\Gamma^{(\alpha-k)}$, e quindi anche a Γ, e transitivo. Detto n' l'ordine di Θ, si avrà, come sappiamo:

$$n' = h \cdot m', \tag{10}$$

essendo m' l'ordine del sotto-gruppo Λ' formato da quelle sostituzioni di Θ che non alterano una delle espressioni (9). A questo sotto-gruppo corrisponderà, nell'isomorfismo fra Γ e Θ, un certo sotto-gruppo Λ di Γ, di ordine m; e per le proprietà dell'isomorfismo gli ordini n ed m di Γ e di Λ esser dovranno equimultipli degli ordini n' ed m' di Θ e di Λ', cosicchè potremo scrivere:

$$n = \rho n' \quad , \quad m = \rho m'. \tag{11}$$

Dalle tre uguaglianze (10) ed (11) segue ora facilmente

$$m = \frac{n}{h}.$$

Quest' espressione di m, che è l' ordine di un certo sotto-gruppo Λ di Γ, tenendo presente che h è maggiore di 1 e primo con p, ci dice che m è inferiore ad n, eppure ancor divisibile per p^α.

Concludiamo dunque che: *se* p^α *è la più alta potenza del fattore primo* p, *che divide l'ordine di un gruppo qualunque* G, *esiste sempre in* G *un sotto-gruppo di ordine inferiore (determinabile col metodo indicato) il cui ordine è ancora divisibile per* p^α.

296. Se ora G' sia questo gruppo, si avrà, applicando a G' lo stesso teorema, che anche in G' è contenuto un sotto-gruppo di ordine inferiore ancora divisibile per p^α. Così procedendo si giungerà necessariamente ad un sotto-gruppo di ordine p^α, del quale resta così dimostrata l'esistenza.

Note.

1. Al teorema dimostrato vanno uniti alcuni complementi importanti, che da esso si deducono facilmente, e sono anche conosciuti, nel loro insieme, sotto il nome di secondo teorema di *Sylow*. Ci limiteremo, per brevità, ai soli enunciati.

Sia p^α la più alta potenza del numero p che divide l' ordine n del gruppo Γ. Detto P uno dei sotto-gruppi di Γ di ordine p^α dei quali si è dimostrata l'esistenza, sia R il gruppo formato da quelle sostituzioni di Γ che trasformano in se stesso il gruppo P. Se r è l' indice di P rispetto ad R ed j l' indice di R rispetto a Γ, cosicchè

$$n = p^\alpha . r . j ,$$

i numeri r ed j sono evidentemente primi con p; ma per il numero j si dimostra inoltre che esso, diviso per p, dà per resto 1.

Si dimostra poi che, di sotto-gruppi di ordine p^α contenuti in Γ, ve ne sono precisamente j. Essi sono tutti simili fra loro; anzi si ottengono da uno qualunque di essi, per esempio P, trasformandolo mediante sostituzioni dello stesso gruppo Γ. E precisamente, se le sostituzioni di Γ si rappresentano, prendendo come primo periodo R (cfr. art. 243), coi periodi:

$$R , Rg_1 , Rg_2 , \ldots , Rg_{j-1} ,$$

i sotto-gruppi di Γ di ordine p^α sono:

$$P , g_1^{-1} P g_1 , g_2^{-1} P g_2 , \ldots , g_{j-1}^{-1} P g_j . \qquad (1)$$

Aggiungiamo finalmente che ogni sotto-gruppo di G il cui ordine sia una potenza del numero primo p, è necessariamente contenuto in uno degli j gruppi (1).

2. I gruppi il cui ordine è una potenza di un numero primo godono di una particolarità notevolissima. Se sia, cioè, P un gruppo di ordine p^α e Q un suo sotto-gruppo di ordine p^β ($\beta < \alpha$), esiste in P un sotto-gruppo di ordine $p^{\beta+1}$ le cui sostituzioni trasformano in se stesso il gruppo Q. Di qui segue manifestamente che il sotto-gruppo Q fa parte di una successione di sotto-gruppi:

$$1 , P_1 , P_2 , \ldots , P_{\alpha-1} , P$$

ognuno dei quali è sotto-gruppo invariante (art. 262) di quello che lo segue. I loro ordini sono risp. $1 , \alpha , \alpha^2 , \alpha^3 , \ldots , \alpha^p$.

CAPITOLO IV.

OPERAZIONI CON NUMERI RAZIONALI

§ 1.° — Genesi combinatoria del concetto di valore.

297. Siano A, B, C, . . . tutti gli oggetti, generalmente parlando in numero infinito, che possono essere presi in considerazione in un dato ordine di idee. Il loro insieme si indicherà con $\overline{U}$; nel mentre che indicheremo con $\overline{\Omega}_1$, $\overline{\Omega}_2$, ... gli aggregati finiti contenuti in $\overline{U}$, cioè gli aggregati formati dalla riunione di un numero finito di oggetti scelti a piacere fra gli oggetti A, B, C, . . . di $\overline{U}$.

Si dirà che due aggregati qualunque $\overline{\Omega}_i$ ed $\overline{\Omega}_j$ hanno la stessa importanza, o, meglio, lo stesso *valore*, o anche che sono *equivalenti* fra loro nell'ordine di idee prestabilito, se sia lecito (finchè si resta nel detto ordine di idee) di sostituire l'uno all'altro, tutte le volte che occorra servirsi dell'uno di essi.

Così, ad esempio, nell'ordine di idee monetario in cui $\overline{U}$ è l'insieme di tutti i pezzi monetati A, B, C,... che si trovano in circolazione, ed $\overline{\Omega}_1$, $\overline{\Omega}_2$, . . . i diversi gruppi di monete che con essi si possono formare, l'aggregato formato da una doppia lira e da venti soldi (la cui *numerosità* è rappresentata da 21) ha lo stesso valore dell'aggregato di tre pezzi da una lira (benchè quest'ultimo abbia una numerosità differente, cioè 3).

298. La *legge dei valori*, cioè quella legge che stabilisce in modo perfettamente determinato quali aggregati siano fra loro equivalenti e quali non lo siano, non è però accettabile se non soddisfa ad alcune proprietà fondamentali, delle quali la prima si è che *due aggregati equivalenti ad un terzo siano equivalenti fra loro.*

Ciò non è però ancora sufficiente ad assicurare che la legge dei valori non sia contraddittoria; ad assicurare, cioè, che tutte le volte che, nelle *operazioni* consentite dall'ordine di idee prestabilito, si sostituisca, ad un aggregato, un aggregato equivalente, i risultati siano ancora equivalenti.

A questo riguardo noi ci dobbiamo limitare alle due operazioni combinatorie fondamentali di *aggregazione* e di *composizione* nelle quali abbiamo già visto doversi ricercare le prime origini dell'aritmetica dei numeri naturali.

299. Affinchè una legge di valori sia legittima rispetto all'operazione di aggregazione, è necessario che, se un aggregato $\overline{\Omega}$ ven-

ga dichiarato equivalente ad un aggregato $\overline{\Omega}'$, anche l'aggregato $(\overline{\Omega}, \overline{H})$ riunione di $\overline{\Omega}$ e di un altro aggregato qualunque $\overline{H}$, venga dichiarato equivalente all'aggregato $(\overline{\Omega}', \overline{H})$ e reciprocamente.

Se una legge di valori soddisfa a queste condizioni, noi diremo, per brevità, che essa gode della *proprietà aggregativa.*

300. Si può inoltre pretendere che la legge dei valori sia legittima anche rispetto ad una certa legge L di composizione degli elementi A, B, C,... Affinchè ciò sia, è necessario che, essendo $\overline{\Omega}$ ed $\overline{\Omega}'$ due aggregati equivalenti ed $\overline{H}$ un aggregato qualsivoglia, il composto $\overline{\Omega}\overline{H}$ dei due aggregati $\overline{\Omega}$ ed $\overline{H}$ (cfr. Cap-I, § 4) sia un aggregato equivalente al composto $\overline{\Omega}'\overline{H}$.

. Se queste condizioni sono soddisfatte, diremo brevemente che la legge dei valori gode della *proprietà compositiva* rispetto alla legge di composizione L.

È bene notare che, in virtù della legge L, gli elementi A, B, C,... di $\overline{U}$ si devono considerare come costituenti un *gruppo,* attribuendo quì alla parola *gruppo* un significato analogo a quello della teoria delle sostituzioni; giacchè, in virtù di tale legge, ogni composto AB di due elementi qualunque di U è ancora un elemento ben determinato di U, cioè si troverà essere uno degli stessi elementi A, B, C,...

§ 2.° — Legge razionale dei valori.

301. Noi distingueremo gli *elementi* od *unità* di U (cioè quegli oggetti che servir devono a formare gli aggregati da sottoporsi poi ad una opportuna legge di valori) in unità *positive* (o di *senso* o *segno* positivo) ed unità *negative* (o di senso o segno negativo) e, così quelle come queste, in unità di prima *specie*, di seconda *specie,* di terza *specie,* ecc., convenendo che le unità A_n, B_n, C_n, ... di una stessa specie (n^{esima}) positiva verranno dichiarate equivalenti e similmente verranno dichiarate equivalenti quelle A'_n, B'_n, C'_n, ... di una stessa specie negativa; e convenendo inoltre fin d'ora:

1°) che l'aggregato di n unità positive di n^{esima} specie verrà dichiarato equivalente ad una (e quindi ad ogni) unità positiva di prima specie.

2°) che l'aggregato di n unità negative di n^{esima} specie verrà dichiarato equivalente ad ogni unità negativa di prima specie.

3°) che l'aggregato A_n, A'_n, formato dalla riunione di una qualsiasi unità positiva di n^{esima} specie e di una qualsiasi negativa della stessa specie, verrà dichiarato equivalente all'*aggregato nullo,* cioè all'aggregato fittizio che non contiene alcun oggetto.

Le unità di prima specie (positive o negative) le chiameremo anche unità *fondamentali,* le altre, unità *aliquote.*

Innanzi di procedere alla determinazione completa della legge dei valori, è necessario premettere alcune definizioni.

302. Due aggregati qualisivogliano formati con oggetti di $\overline{U}$, cioè colle unità positive o negative considerate, si diranno *simili* se,

di ogni specie (positiva o negativa) di unità ne contengono lo stesso numero. Così, ad esempio, secondo le notazioni testè adottate, saranno simili l'aggregato:

$$A_1 , B_1 , B_2 , C_2 , D_2 , B_3 , C_3 , A'_2 , C'_2$$

e l'aggregato:

$$B_1 , C_1 , C_2 , D_2 , C_3 , E_2 , B'_2 , C'_2 , D_3.$$

303. Un aggregato $\overline{\Omega'}$ si dirà *multiplo* di un aggregato $\overline{\Omega}$, secondo il numero n, se esso è la riunione di n aggregati tutti simili ad $\overline{\Omega}$. Così, ad esempio, l'aggregato:

$$A_1 , A'_1 , B_2 , C_2 , D_5 , B_1 , B'_1 , D_2 , E_2 , A_5 , C_1 , C'_1 , A_2 , G_2 , B_5$$
$$= (A_1 , A'_1 , B_2 , C_2 , D_5) , (B_1 , B'_1 , D_2 , E_2 , A_5) , (C_1 , C'_1 , A_2 , G_2 , B_5)$$

è multiplo, secondo il numero 3, dell'aggregato:

$$A_1 , A'_1 , B_2 , C_2 , D_5.$$

Se $\overline{\Omega}$ ed $\overline{H}$ sono due aggregati qualunque, ed $\overline{\Omega'}$, $\overline{H'}$ siano rispettivamente multipli di $\overline{\Omega}$ ed $\overline{H}$ secondo lo stesso numero n, si dirà che $\overline{\Omega'}$ ed $\overline{H'}$ sono *equimultipli* di $\overline{\Omega}$ ed $\overline{H}$ rispettivamente.

304. Ciò premesso, la determinazione completa dell'equivalenza o non-equivalenza di due aggregati comunque formati con le unità delle diverse specie, positive e negative, sopra considerate si darà come segue.

Due aggregati sono equivalenti se esistono due aggregati equimultipli di essi, i quali si possano dedurre l'uno dall'altro mediante un numero finito di operazioni dei seguenti due tipi:

a) *sostituzione di un'unità fondamentale (positiva o negativa) con* n *unità (rispettivamente positive o negative) di specie* n^{esima}*; oppure l'operazione inversa;*

b) *soppressione di un'unità positiva di specie* n *e di un'unità negativa della stessa specie; oppure l'operazione inversa, cioè aggiunzione all'aggregato di un'* A_n *e di un'* A'_n.

A schiarimento di questa definizione aggiungiamo alcuni esempi, mantenendo le convenzioni già addottate per la designazione delle diverse specie di unità positive o negative.

305. Esempio 1.° — L'aggregato A_1 , B_1 , A_2 , B_2 è equivalente all'aggregato:

$$A_3 , B_3 , C_3 , D_3 , E_3 , G_3 , A_6 , B_6 , C_6 , D_6 , E_6 , G_6 ,$$

giacchè il secondo si deduce direttamente dal primo sostituendo A_1 con A_3 , B_3 , C_3, poi B_1 con D_3 , E_3 , G_3, poi A_2 , B_2 con C_1 e questo a sua volta con $A_6 , B_6 , C_6 , D_6 , E_6 , G_6$.

306. Esempio 2.° — L'aggregato formato dall'unico oggetto A_2 è equivalente all'aggregato formato dai tre oggetti A_6 , B_6 , C_6. Infatti gli aggregati A_2 , B_2 ed $A_6 , B_6 , C_6 , D_6 , E_6 , G_6$ che sono

equimultipli dei due precedenti (secondo il numero 2) si deducono l'uno dall'altro ponendo nel primo di essi A_1 in luogo di A_2, B_2 e poi nel risultato A_6, B_6, C_6, D_6, E_6, G_6 in luogo di A_1.

307. Esempio 3.° — L'aggregato A_2, A_3, B_3 è equivalente all'aggregato A_1, A_6. Infatti, prendendo di questi due aggregati gli equimultipli secondo il numero 6, si ottengono rispettivamente i due aggregati:

$$(A_2, B_2), (C_2, D_2), (E_2, G_2), (A_3, B_3, C_3), (D_3, E_3, G_3),$$
$$(I_3, L_3, M_3), (N_3, P_3, Q_3)$$

ed

$$A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, G_1, (A_6, B_6, C_6, D_6, G_6, E_6)$$

che manifestamente si deducono l'uno dall'altro con operazioni del tipo *a*).

308. Esempio 4.°—I due aggregati A_6, A'_2 ed A'_6, B'_6 sono equivalenti. Infatti, i loro equimultipli, secondo il numero 6, si possono scrivere:

$$(A_6, B_6, C_6, D_6, E_6, G_6), (A'_2, B'_2), (C'_2, E'_2), (D'_2, G'_2)$$

ed

$$(A'_6, B'_6, C'_6, D'_6, E'_6, G'_6), (L'_6, M'_6, N'_6, P'_6, Q'_6, R'_6)$$

o anche, con operazioni del tipo *a*):

$$A_1, A'_1, B'_1, C'_1$$

ed

$$E'_1, G'_1$$

e dal primo di questi due ultimi aggregati si passa al secondo con un'operazione del tipo *b*), cioè sopprimendo nel primo i due oggetti A_1 ed A'_1.

309. Diremo per brevità che due aggregati sono *direttamente equivalenti*, quando si può passare direttamente dall'uno di essi all'altro mediante operazioni dei tipi *a*) e *b*).

È senz'altro manifesto che: *se due aggregati sono direttamente equivalenti, sono anche direttamente equivalenti i loro equimultipli secondo un numero qualsivoglia.*

È poi anche evidente che: *se due aggregati sono direttamente equivalenti ad un terzo, essi sono anche direttamente equivalenti fra loro.*

310. *Due aggregati equivalenti ad un terzo sono equivalenti fra loro.*

Siano infatti $\overline{H}$ e $\overline{K}$ due aggregati equivalenti ad uno stesso aggregato $\overline{\Omega}$. In virtù di quest'ipotesi, esisteranno due numeri naturali μ, ν tali che ogni multiplo di $\overline{H}$ secondo μ sia direttamente equivalente ad ogni multiplo di $\overline{\Omega}$ secondo μ ed ogni multiplo di $\overline{K}$ secondo ν sia direttamente equivalente ad ogni multiplo di $\overline{\Omega}$ secondo ν. Ma, se un aggregato H' multiplo di $\overline{H}$ secondo μ è direttamente

equivalente ad un aggregato $\overline{\Omega}'$ multiplo di $\overline{\Omega}$ secondo μ, ogni multiplo di $\overline{H}'$ secondo ν sarà direttamente equivalente ad ogni multiplo di $\overline{\Omega}'$ secondo ν, cioè ogni multiplo di $\overline{H}$ secondo $\mu\nu$ sarà direttamente equivalente ad ogni multiplo di $\overline{\Omega}$ secondo $\mu\nu$. Similmente si vede che ogni multiplo di $\overline{K}$ secondo $\nu\mu$ sarà direttamente equivalente ad ogni multiplo di $\overline{\Omega}$ secondo $\nu\mu$. Esisteranno dunque un multiplo di $\overline{H}$ secondo $\mu\nu$ ed un multiplo di $\overline{K}$ secondo $\mu\nu$ direttamente equivalenti ad uno stesso multiplo di $\overline{\Omega}$ e quindi (cfr. articolo 309) direttamente equivalenti fra loro; c. d. d.

311. La legge di valori da noi definita in questo §, oltrechè godere della proprietà fondamentale testè dimostrata, gode anche, come vedremo nei prossimi §§, della proprietà aggregativa (articolo 229), e della proprietà compositiva (art. 300) rispetto ad una legge di composizione opportunamente scelta. Noi designeremo brevemente questa legge dei valori col nome di legge *razionale*, per distinguerla da ogni altra legge che potesse per avventura escogitarsi e perchè essa ci condurrà, in modo del tutto naturale, come vedremo, alla teoria dei numeri così detti *razionali*, oggetto del presente scritto.

§ 3.° — Il concetto di valore considerato come un' estensione del concetto di numero.

312. Sia $\overline{U}$ l'insieme di tutti quegli oggetti, che nel precedente § abbiamo denominato unità positive o negative, fondamentali od aliquote, delle diverse specie. Noi chiameremo *valore* di un aggregato qualunque e di tutti i suoi equivalenti comunque formati cogli oggetti di $\overline{U}$, ogni simbolo che serva a riconoscerli come tali, cioè a distinguerli da tutti gli altri aggregati ad essi non equivalenti.

313. Noi dimostreremo fra poco che *due aggregati di unità fondamentali positive, allora e soltanto allora sono equivalenti, quando essi si compongono dello stesso numero di oggetti.*

Ammesso ciò, è chiaro che ogni simbolo che già sia stato adottato per rappresentare la *numerosità* di un aggregato di unità fondamentali positive, potrà anche essere simultaneamente adottato per rappresentarne il *valore*. Per gli aggregati non equivalenti ad aggregati di sole unità positive di prima specie, dovremo invece adottare, per rappresentarne il valore, altri simboli.

Nulla però ci impedirà di dare, anche a questi nuovi simboli, il nome di numeri; ben inteso che essi dovranno considerarsi come numeri differenti dai numeri *naturali* fin qui considerati. Ogni aggregato darà quindi origine, generalmente parlando, a due numeri, cioè ad un numero naturale rappresentante la numerosità dell'aggregato e ad un numero della nuova specie rappresentante il suo valore. Soltanto per gli aggregati di unità fondamentali positive vi sarà coincidenza fra i due numeri. Essi saranno rappresentati, tanto nella numerosità come nel valore, da numeri naturali.

I numeri naturali ed i nuovi numeri così introdotti si chiameranno complessivamente numeri *razionali* (o *commensurabili*). I numeri razionali si distingueranno dunque in numeri *razionali naturali* (atti a rappresentare simultaneamente delle numerosità e dei valori) ed in numeri *razionali non naturali* (ai quali spetterà soltanto l'ufficio di rappresentare dei valori).

Passiamo ora a dimostrare il teorema che abbiamo testè presupposto.

314. Siano $\overline{\Omega}$ ed $\overline{\Omega}'$ i due aggregati di unità fondamentali positive, dei quali si presuppone l'equivalenza. Noi ammetteremo dapprima che essi siano anche *direttamente* equivalenti. Ciò posto, designamo con $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$ i numeri naturali, distinti fra loro, che rappresentano le specie delle unità a cui si riferiscono le varie operazioni, dei tipi definiti nel § prec., mediante le quali si passa dall'aggregato $\overline{\Omega}$ all'aggregato $\overline{\Omega}'$. Se μ_1 è superiore ad 1, è facile vedere che due aggregati $\overline{Q}$ e $\overline{Q}'$ equimultipli (art. 303) risp. di $\overline{\Omega}$ ed $\overline{\Omega}'$ secondo il numero μ_1 non solo saranno ancora fra loro direttamente equivalenti (cfr. art. 309); ma si potrà inoltre passare dall'uno all'altro con operazioni che si riferiscono soltanto ad unità delle specie $1, \mu_2, \mu_3, \ldots \mu_r$. Infatti, in luogo di ogni unità A_{μ_1} (od A'_{μ_1}) si avrà dappertutto (cioè negli equimultipli, secondo μ_1, di tutti gli aggregati che si deducono successivamente da $\overline{\Omega}$ per passare ad $\overline{\Omega}'$) un aggregato di μ_1 unità:

$$A_{\mu_1}, B_{\mu_1}, \ldots, \quad (\text{ovvero } A'_{\mu_1}, B'_{\mu_1}, \ldots)$$

che potrà surrogarsi con un'unità di prima specie. Per identica ragione, se in luogo di $\overline{Q}, \overline{Q}'$ si prendano ora due equimultipli di essi secondo il numero μ_2 cioè due equimultipli di $\overline{\Omega}, \overline{\Omega}'$ secondo $\mu_1\mu_2$, essi saranno direttamente equivalenti, e si potrà passare dall'uno all'altro con operazioni che riguardano soltanto unità delle specie $1, \mu_3, \mu_4, \ldots, \mu_r$. Così procedendo si concluderà che due aggregati $\overline{\Theta}, \overline{\Theta}'$ equimultipli di $\overline{\Omega}, \overline{\Omega}'$ secondo il numero μ, essendo:

$$\mu = \mu_1\mu_2 \ldots \mu_r,$$

sono pure fra loro direttamente equivalenti, e si può passare dall'uno all'altro con operazioni relative a sole unità fondamentali.

Delle due operazioni relative ad unità fondamentali, indichiamo ora con T quelle che consistono nell'aggiungere simultaneamente un'unità fondamentale positiva ed una negativa e con T' quelle del tipo inverso.

Se θ e θ' sono risp. i numeri di unità fondamentali (che sono tutte positive secondo l'ipotesi fatta) contenute in $\overline{\Theta}, \overline{\Theta}'$ e t, t' indichino risp. il numero di operazioni del tipo T e del tipo T' eseguite nel passare da $\overline{\Theta}$ a $\overline{\Theta}'$, è chiaro che, dopo eseguite tutte le operazioni, l'aggregato $\overline{\Theta}$ avrà acquistato $t-t'$ unità positive e $t-t'$ unità negative; cosicchè, dovendo esso, dopo tali acquisti, coinci-

dere con $\overline{\Theta}'$, sussisteranno le relazioni:

$$\theta + t - t' = \theta' \quad , \quad t - t' = 0$$

dalle quali segue: $\theta = \theta'$.

I due aggregati $\overline{\Theta}$ e $\overline{\Theta}'$, e quindi anche i loro sottomultipli $\overline{\Omega}$ e $\overline{\Omega}'$, debbono dunque contenere lo stesso numero di unità; come si doveva dimostrare.

315. Supponiamo ora, in secondo luogo, che $\overline{\Omega}$ ed $\overline{\Omega}'$ non siano direttamente equivalenti. Esisteranno, per la definizione stessa di equivalenza (§ 2, art. 4) due aggregati $\overline{Q}$ e $\overline{Q}'$ equimultipli di $\overline{\Omega}$ ed $\overline{\Omega}'$ i quali siano fra loro direttamente equivalenti. Poichè ora $\overline{Q}$ e $\overline{Q}'$ si compongono di sole unità fondamentali positive come $\overline{\Omega}$ ed $\overline{\Omega}'$, il numero di tali unità sarà lo stesso, per quanto si è dimostrato nel precedente articolo, così in $\overline{Q}$ come in $\overline{Q}'$. Anche i loro sottomultipli $\overline{\Omega}$, $\overline{\Omega}'$ conterranno dunque lo stesso numero di elementi; c. d. d.

§ 4.° — Proprietà aggregativa della legge razionale dei valori. Somma di due numeri razionali.

316. *Se l'aggregato $\overline{\Omega}$ è equivalente, secondo la legge razionale dei valori, all'aggregato $\overline{\Omega}'$, e l'aggregato $\overline{H}$ all'aggregato $\overline{H}'$, anche l'aggregato $(\overline{\Omega}, \overline{H})$, riunione di $\overline{\Omega}$ e di $\overline{H}$, è equivalente all'aggregato $(\overline{\Omega}', \overline{H}')$.*

Per supposto, esistono due numeri naturali μ, ν tali che gli equimultipli di $\overline{\Omega}$ ed $\overline{\Omega}'$ secondo μ sono fra loro direttamente equivalenti, e così pure sono fra loro direttamente equivalenti gli equimultipli secondo ν di $\overline{H}$ ed $\overline{H}'$. Ma dall'essere gli equimultipli di $\overline{\Omega}$ ed $\overline{\Omega}'$, secondo μ, fra loro direttamente equivalenti, segue (cfr. art. 309) che i loro equimultipli secondo ν, cioè due equimultipli di $\overline{\Omega}$ ed $\overline{\Omega}'$ secondo $\mu\nu$, che indicheremo con $(\overline{\Omega})$ ed $(\overline{\Omega}')$, sono del pari fra loro direttamente equivalenti. Si vede similmente che, se $(\overline{H})$ ed $(\overline{H}')$ sono due equimultipli di $\overline{H}$ ed $\overline{H}'$ secondo $\nu\mu$, essi sono pure fra loro direttamente equivalenti.

Poichè ora $(\overline{\Omega})$ è direttamente equivalente ad $(\overline{\Omega}')$ ed $(\overline{H})$ ad $(\overline{H}')$, è senz'altro manifesto che l'aggregato $((\overline{\Omega}), (\overline{H}))$ è direttamente equivalente ad $((\overline{\Omega}'), (\overline{H}'))$. Ma gli aggregati $((\overline{\Omega}), (\overline{H}))$ ed $((\overline{\Omega}'), (\overline{H}'))$ sono equimultipli risp., secondo $\mu\nu$, degli aggregati $(\overline{\Omega}, \overline{H})$ ed $(\overline{\Omega}', \overline{H}')$. Questi ultimi hanno dunque due loro equimultipli che sono direttamente equivalenti; epperò essi sono fra loro equivalenti; c. d. d.

317. Dopo quanto si è ora dimostrato ci è lecito di porre senz'altro la definizione di somma di due numeri razionali α e β come segue: *somma di α e β è quel numero razionale (che si rappresenterà con $\alpha + \beta$) che rappresenta il valore dell'aggregato*

$(\overline{A}, \overline{B})$, *essendo* $\overline{A}$ *uno qualunque degli aggregati di valore* α *e* $\overline{B}$ *uno qualunque di quelli di valore* β.

Infatti, comunque si varii la scelta di $\overline{A}$ e $\overline{B}$, gli aggregati $(\overline{A}, \overline{B})$ saranno fra loro tutti equivalenti, e saranno quindi rappresentati dallo stesso numero razionale.

Oltre a ciò, se α e β sono numeri naturali, il numero $\alpha + \beta$ ottenuto mediante questa definizione è quello stesso numero naturale che viene fornito dalla definizione, da noi già data (cfr. Cap. I, § 7) di somma di due numeri naturali. In questo caso si potrà infatti scegliere per $\overline{A}$ un aggregato di α unità fondamentali positive, e similmente per B.

318. La somma di tre numeri razionali α, β, γ si definirà ora come la somma di $\alpha + \beta$ e di γ. La somma di α, β, γ, δ come la somma di $\alpha + \beta + \gamma$ e di δ, e così via.

Il lettore riconoscerà subito che la somma, così definita, di un numero qualunque di numeri razionali gode della proprietà commutativa ed associativa. A tale oggetto gli basterà di osservare che queste proprietà altro non sono che il riflesso delle corrispondenti proprietà della riunione degli aggregati di cui quei numeri rappresentano il valore, precisamente come per la somma dei numeri naturali (cfr. Cap. I, § 8.).

319. Prima di chiudere questo §, osserviamo ancora che dalla proprietà aggregativa dimostrata all'art. 316, discende come corollario il teorema seguente, che ci sarà utile più in là: *se due aggregati sono fra loro equivalenti, anche i loro equimultipli, secondo un numero qualunque, sono equivalenti, e reciprocamente.*

Infatti, se $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, ... sono aggregati simili fra loro, e così pure $\overline{A}_1$, $\overline{B}_1$, $\overline{C}_1$, ..., dall'essere $\overline{A}$ equivalente ad $\overline{A}_1$, segue, per l'art. 316, che la riunione $(\overline{A}, \overline{B})$ è equivalente alla riunione $(\overline{A}_1, \overline{B}_1)$ e quindi poi anche che la riunione $(\overline{A}, \overline{B}, \overline{C})$ è equivalente alla riunione $(\overline{A}_1, \overline{B}_1, \overline{C}_1)$, e così di seguito.

§ 5.° — Riduzione degli aggregati—Valori positivi e negativi; valori interi e valori frazionarii.

320. Noi diremo che un aggregato è *omogeneo*, se contiene soltanto unità della stessa specie (tutte positive o tutte negative). È facile riconoscere che ogni aggregato ha sempre, fra i suoi equivalenti, un aggregato omogeneo.

A tale oggetto giova premettere il lemma: *un'unità positiva (o negativa) di specie* n *equivale all'aggregato di* m *unità positive (o negative) di specie* mn.

Invero, se dell'aggregato:

$$A_{mn}, B_{mn}, C_{mn}, \ldots$$

di m unità di specie mn e dell'aggregato costituito dall'unica unità di specie n:

$$A_n$$

si prendono gli equimultipli secondo *mn*, si ottengono, in entrambi i casi, *m* unità di 1ª specie; poichè, in luogo di *mn* unità simili ad A_{mn}, si può porre un'unità di prima specie e le *mn* unità simili ad A_n aggruppate *n* ad *n* danno luogo ad *m* gruppi, ciascuno dei quali si potrà del pari sostituire con un'unità di prima specie.

321. Sia ora Ω un aggregato qualsivoglia, e siano μ, ν, ρ, ... i numeri naturali che rappresentano le diverse specie di unità in esso contenute. Detto M il minimo comun multiplo di μ, ν, ρ, ..., si potrà per il lemma premesso, sostituire ogni unità di specie μ con $\frac{M}{\mu}$ unità di specie M, similmente ogni unità di specie ν con $\frac{M}{\nu}$ unità di specie M e così di seguito finchè l'aggregato si troverà a contenere sole unità positive o negative di specie M. Fatto ciò, si potranno sopprimere a due a due un'unità positiva ed una negativa, finchè restino sole unità positive, ovvero sole unità negative. L'aggregato Ω si troverà così ridotto a forma omogenea.

322. *Un aggregato di unità tutte positive non può essere equivalente all'aggregato nullo.*

Infatti, un aggregato di unità tutte positive equivale, secondo l'art. prec., ad un aggregato di unità tutte positive, della stessa specie *m*; e, se quest'ultimo fosse equivalente all'aggregato nullo, anche il suo multiplo secondo il numero *m*, che equivale evidentemente ad un aggregato di unità positive di 1ª specie, sarebbe (art. 319) equivalente all'aggregato nullo, il che è assurdo (art. 313).

323. *Un aggregato di unità tutte positive non può essere equivalente ad un aggregato di unità tutte negative.*

Infatti, se un aggregato Ω, contenente soltanto unità positive, fosse equivalente ad un aggregato di unità negative A'_λ, B'_μ, C'_ν, ... aggiungendo ad entrambi un aggregato simile a quello formato dalle unità positive: A_λ, B_μ, C_ν, ..., l'aggregato Ω si cangierebbe in un altro aggregato formato di unità tutte positive ed equivalente all'aggregato nullo, il che contraddice all'art. precedente.

324. In base a ciò ci è ora lecito di distinguere tutti i numeri razionali in *positivi* e *negativi*. Chiameremo positivi quei numeri razionali che rappresentano almeno un aggregato composto di unità tutte positive, negativi quelli che hanno, fra gli aggregati da essi rappresentati, almeno un aggregato formato di sole unità negative.

Questa distinzione è legittima, perchè, fra gli aggregati rappresentati da uno stesso numero razionale, ve ne ha sempre almeno uno (art. 320) contenente sole unità positive o sole unità negative; e perchè, d'altra parte, un aggregato di unità tutte positive ed un aggregato di unità tutte negative non sono mai rappresentati dallo stesso numero razionale (art. 323).

325. I numeri razionali si distinguono poi anche in *interi* e *fra-*

zionarii. Un numero razionale si dice intero, se, fra gli aggregati equivalenti da esso rappresentati, ve ne sia qualcuno formato di sole unità fondamentali. In caso contrario esso si dirà frazionario.

326. Per riconoscere se un numero razionale α sia intero o frazionario, si esamini uno degli aggregati omogenei da esso rappresentati, il quale consterà di m unità (tutte positive o tutte negative) di specie n. Dico che *il numero in questione sarà intero o frazionario, secondochè* m *sia o non sia multiplo di* n.

Supponiamo infatti, per fissare le idee, che l' aggregato esaminato si componga di m unità tutte positive:

$$A_n\ ,\ B_n\ ,\ C_n\ ,\ \ldots \qquad (1)$$

Affinchè il numero α sia intero, è necessario e sufficiente che questo aggregato sia equivalente ad un aggregato di i unità fondamentali (tutte positive; cfr. art. 323):

$$A_1\ ,\ B_1\ ,\ C_1\ ,\ \ldots \qquad (2)$$

e quindi anche (art. 319) che un multiplo di (1) secondo n sia equivalente ad un multiplo di (2) secondo lo stesso numero n. Ma un multiplo di (1) secondo n equivale evidentemente ad un aggregato di m unità fondamentali positive, ed un multiplo di (2) secondo n ad un aggregato di ni unità fondamentali positive. Dovrà dunque essere (art. 313):

$$m = in,$$

c. d. d.

327. Rileviamo ancora il seguente teorema, che ci sarà utile fra breve: *affinchè un aggregato di* m *unità positive (o negative) di specie* n *sia equivalente ad un aggregato di* m' *unità positive (o negative) di specie* n', *è necessario e sufficiente che sia* mn'=m'n.

È chiaro infatti che gli aggregati equimultipli dei due sopraddetti, secondo il numero nn', sono rispettivamente equivalenti ad un aggregato di mn' e di $m'n$ unità fondamentali positive (o negative).

§ 6.° — Sistema di simboli atti a raffigurare tutti i numeri razionali — Riduzione di una frazione alla sua più semplice espressione.

328. Se in un aggregato $\bar{\Omega}$ si ponga, in luogo di ogni unità, un'unità della stessa specie, ma di segno contrario, si verrà a formare un nuovo aggregato $\bar{\Omega}'$ che si dirà *contrario* di $\bar{\Omega}$.

È evidente che un aggregato contrario ad un contrario di $\bar{\Omega}$ è simile ad $\bar{\Omega}$.

329. *Se un aggregato $\bar{\Omega}$ è equivalente all'aggregato $\bar{H}$, è anche il contrario di $\bar{\Omega}$ equivalente al contrario di $\bar{H}$.*

Infatti, se gli equimultipli di $\bar{\Omega}$ ed $\bar{H}$, secondo un certo numero

μ, sono direttamente equivalenti, lo saranno evidentemente anche gli equimultipli, secondo lo stesso numero μ, dei loro contrarii $\bar{\Omega}'$ ed $\bar{H}'$.

330. Segue di quì che gli aggregati rispettivamente contrarii agli aggregati, tutti fra loro equivalenti, rappresentati da uno stesso numero razionale α, sono anch'essi rappresentati da uno stesso numero razionale, che si dirà essere il numero razionale *contrario* ad α.

Il numero razionale contrario ad α si designa col simbolo $-\alpha$; cioè collo stesso simbolo α preceduto dal segno $-$.

È pure manifesto, per la definizione di somma, che *la somma di un numero razionale e del suo contrario è uguale a zero.* Cioè si può scrivere:

$$\alpha + (-\alpha) = 0.$$

331. Si conviene inoltre, per una ragione che apparirà in seguito (quando ci occuperemo del prodotto di due numeri razionali), che il numero razionale rappresentato da ùn simbolo α sia anche rappresentato dal simbolo $+\alpha$, cioè da quello stesso simbolo preceduto dal segno $+$.

Si hanno così le uguaglianze:

$$+(+\alpha) = \alpha$$
$$+(-\alpha) = -\alpha$$
$$-(+\alpha) = -\alpha$$
$$-(-\alpha) = \alpha$$

il cui insieme è conosciuto col nome di *legge di composizione dei segni.*

332. Si chiama valore *assoluto* di un numero α quel numero positivo che preso col segno $+$ o $-$ dà il numero α. Quindi:

a) un numero positivo ha per valore assoluto se stesso;

b) due numeri contrarii hanno lo stesso valore assoluto.

333. Il numero contrario di un numero positivo è manifestamente (art. 324) un numero negativo.

Volendo dunque costruire un sistema di simboli atti a rappresentare tutti i numeri razionali, basterà occuparsi dei soli numeri positivi; perchè gli stessi simboli che si addotteranno per rappresentare i numeri positivi, ci rappresenteranno anche tutti i numeri negativi, appenachè venga ad essi preposto il segno $-$.

Il segno $-$ si chiama perciò *segno negativo*, nel mentre si chiama *segno positivo* il segno $+$.

334. Ciò posto, bastando, per individuare un numero razionale positivo α, di far conoscere uno degli aggregati omogenei da esso rappresentati, è chiaro che α sarà completamente determinato dai due numeri naturali m ed n che indicano risp. il numero e la specie delle unità componenti l'aggregato omogeneo da esso rappresentato.

Noi rappresenteremo pertanto il numero α col simbolo $\frac{m}{n}$ e scriveremo quindi:

$$\alpha = \frac{m}{n}. \tag{1}$$

Questa notazione ci è consigliata dal fatto che essa ha già un significato (cfr. Cap. II, art. 115) nel caso in cui m sia un multiplo di n:

$$m = kn \tag{2}$$

e che in questo caso essa esprimeva il numero naturale k, il quale rappresenta appunto, come appare dalla (2), il valore dell'aggregato di m unità di specie n.

Oltre a ciò, dalla (1) possiamo *sempre* dedurre, come nel caso particolare ora menzionato, l'uguaglianza:

$$m = \alpha n$$

intendendo con αn (secondo la convenzione da stabilirsi quando daremo la definizione generale di prodotto) la somma di n addendi tutti eguali ad α. Questa somma rappresenta infatti (cfr. § 4.°) la riunione di n aggregati, ciascuno dei quali si compone di m unità di specie n; e questa riunione equivale evidentemente ad un aggregato di m unità fondamentali.

335. Il simbolo $\frac{m}{n}$ si chiama *frazione*, il numero razionale da esso rappresentato può però essere intero (cfr. § 5.°).

Si è visto infatti (art. 326) che: *affinchè l'aggregato di* m *unità positive di specie* n *equivalga ad un aggregato di sole unità di prima specie*, *è necessario e sufficiente che sia* m *multiplo di* n. Quindi: *affinchè la frazione* $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}}$ *rappresenti un numero intero, è necessario e sufficiente che* m *sia multiplo di* n.

336. *Affinchè il numero* $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}}$ *sia uguale al numero* $\frac{\mathrm{m}'}{\mathrm{n}'}$, *è necessario e sufficiente che sia* $\mathrm{mn}' = \mathrm{m}'\mathrm{n}$.

È questa una conseguenza dell'articolo 327, poichè dire che $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$, equivale a dire che un aggregato di m unità positive di specie n equivale ad un aggregato di m' unità positive di specie n'.

337. I numeri m ed n (termini della frazione) si chiamano risp. il *numeratore* e il *denominatore* della frazione $\frac{m}{n}$, per una ragione che emerge dalla stessa definizione (art. 334) del simbolo $\frac{m}{n}$.

Possiamo così enunciare, come conseguenza del precedente articolo, che: *il valore di una frazione non si altera moltiplican-*

done il numeratore e denominatore per uno stesso numero naturale, poichè: $m \cdot nk = mk \cdot n$.

338. Reciprocamente, se il numeratore e il denominatore di una frazione hanno un fattore comune, esso potrà sopprimersi in entrambi senza alterare il valore della frazione. Ogni frazione potrà così ridursi ad una frazione, di ugual valore, col numeratore e denominatore primi fra loro. La frazione si dirà allora ridotta *ai minimi termini* o alla sua *più semplice espressione.*

339. *Se la frazione* $\frac{m}{n}$ *è ridotta alla sua più semplice espressione, e la frazione* $\frac{m'}{n'}$ *è uguale ad* $\frac{m}{n}$, *i numeri* m' *ed* n' *saranno equimultipli di* m *ed* n.

Dovrà infatti (art. 336) sussistere l'uguaglianza:

$$mn' = m'n. \tag{3}$$

Il numero n dovrà dunque essere un divisore del prodotto mn'. Ma esso è primo con m; quindi dovrà essere (art. 170) divisore di n'. Sarà dunque $n' = nk$, essendo k un certo numero naturale, cosicchè la (3) si può scrivere:

$$mnk = m'n,$$

d' onde:

$$mk = m'.$$

I numeri m' ed n' sono dunque risp. equimultipli di m ed n secondo il numero k; c. d. d.

§ 7.° — Differenza di due numeri razionali — Trasporto di termini dal primo al secondo membro di un'eguaglianza.

340. Se a e b sono due numeri razionali qualisivogliano, esiste sempre un unico numero x che sommato con b dà per risultato a. Esso si chiama la *differenza* di a e b e si rappresenta col simbolo $a - b$.

Invero, dovendo x soddisfare l'uguaglianza:

$$b + x = a, \tag{1}$$

dovrà anche essere:

$$b + x + (-b) = a + (-b)$$

ossia (art. 330):

$$x = a + (-b). \tag{2}$$

Reciprocamente, il numero x così definito come somma di a e del contrario di b, soddisfa all'uguaglianza (1), poichè:

$$b + [a + (-b)] = b + a + (-b) = a.$$

341. Se dei numeri razionali qualisivogliano a, b, c, ... si scrivono l'uno dopo l'altro collegandoli in un modo qualunque coi segni + o —, l' espressione:

$$a \pm b \pm c \pm d \pm \ldots \tag{3}$$

così ottenuta, significherà quel numero razionale che si otterrebbe facendo prima la somma (oppure la differenza) di a e di b, poi la somma (oppure la differenza) del risultato così ottenuto e di c, e così di seguito.

La scrittura (3) non è dunque che un'abbreviazione della scrittura:

$$\Big(\big((a \pm b) \pm c\big) \pm d\Big) \pm \ldots$$

il cui significato è senz' altro manifesto.

342. Del resto la scrittura (3) si può anche riguardare come una somma (anzichè come una successione di somme e differenze) basandosi sulla proprietà, già espressa dall' uguaglianza (2) dell' articolo 340, che *la differenza di due numeri* a *e* b *altro non è che la somma di* a *e del contrario di* b, cioè:

$$a - b = a + (-b).$$

È chiaro infatti che, applicando più volte di seguito questa proprietà, si potrà scrivere:

$$a \pm b \pm c \pm d \pm \ldots = a + (\pm b) + (\pm c) + (\pm d) + \ldots$$

Così, ad esempio, si potrà scrivere:

$$a + b - c + d - e = a + b + (-c) + d + (-e),$$

e così via.

343. È questa la ragione per la quale, nella pratica del linguaggio algebrico, si chiamano somme anche le espressioni formate da simboli collegati da segni che non siano tutti positivi. In ogni somma:

$$\pm a \pm b \pm c \pm d \pm \ldots$$

le singole parti $\pm a$, $\pm b$, $\pm c$, $\pm d$, ... si chiamano poi i *termini* della somma stessa.

Così, ad esempio, la somma algebrica:

$$a + b - c + d - e$$

si compone dei cinque termini a, b, $-c$, d, $-e$.

344. *In ogni eguaglianza, i cui due membri siano dati sotto forma di somma algebrica, è lecito trasportare un termine qualunque dal primo al secondo membro, o viceversa, purchè se ne cangi il segno.*

Sia infatti $\pm \alpha$ un termine qualunque del primo membro. L'eguaglianza non cesserà di sussistere se ad entrambi i membri si aggiunga $\mp \alpha$. Ma, fatto ciò, i due termini $\pm \alpha$ e $\mp \alpha$ del primo membro si potranno sopprimere, essendo la loro somma eguale a zero, e l' uguaglianza che resterà, sarà quella appunto che si sarebbe ottenuta trasportando il termine $\pm \alpha$ al secondo membro e cangiandolo al tempo stesso di segno, cioè cangiandolo in $\mp \alpha$; c.d.d.

345. Se il primo membro consta di un solo termine $\pm \alpha$, esso si potrà sempre considerare come somma dei due termini 0 e $\pm \alpha$, scrivendolo, cioè, sotto la forma $0 \pm \alpha$. Si potrà dunque anche in questo caso trasportare il termine $\pm \alpha$ al secondo membro, sostituendo però il primo membro con uno zero. Così, ad esempio, dall'uguaglianza:

$$-a = b - c + d$$

si può dedurre:

$$0 = a + b - c + d.$$

346. Dopo quanto si è detto, è chiaro come i termini di un'eguaglianza si possano *portare tutti nel primo membro*, ovvero tutti nel secondo membro.

Quest'operazione è così comune nella pratica del calcolo algebrico, che le *equazioni* si scrivono, o si riducono, quasi sempre sotto la forma di una somma algebrica eguagliata allo zero.

Così, ad esempio, all'equazione:

$$3x - 2(x + y)^2 = 3(x^2 - y^2) - 2xy + 3$$

si darà la forma:

$$3x - 2(x + y)^2 - 3(x^2 - y^2) + 2xy - 3 = 0. \qquad (4)$$

347. ***Se il secondo membro di un'eguaglianza è lo zero, è lecito di cangiare il segno a tutti i termini del primo membro.***

Infatti, se nell'uguaglianza (4) si passano tutti i termini al secondo membro, essa prende la forma:

$$0 = -3x + 2(x + y)^2 + 3(x^2 - y^2) - 2xy + 3$$

o anche, che è la stessa cosa:

$$-3x + 2(x + y)^2 + 3(x^2 - y^2) - 2xy + 3 = 0.$$

348. ***Per cambiare il segno di una somma algebrica, basta cambiare il segno di tutti i suoi termini.***

È infatti evidente che la somma del numero:

$$\pm a \pm b \pm c \pm \ldots$$

e del numero:

$$\mp a \mp b \mp c \mp \ldots$$

dà per risultato zero. Il secondo numero è dunque il contrario del primo, cioè:

$$\mp a \mp b \mp c \mp \ldots = -(\pm a \pm b \pm c \pm \ldots).$$

349. Chiuderemo questo § coll'estensione ai numeri razionali della nozione di *maggiore* e *minore* già data (Cap. I, § 10) pei numeri naturali.

Di due numeri α e β si dirà che α è maggiore ovvero minore di β, secondochè la differenza $\alpha - \beta$ sia positiva ovvero negativa.

Si vede facilmente che dall'essere $\alpha < \beta$ e $\beta < \gamma$ segue $\alpha < \gamma$. Infatti, poichè $\gamma - \beta$ e $\beta - \alpha$ sono numeri positivi, anche la loro

somma:

$$(\gamma-\beta)+(\beta-\alpha)=\gamma+(-\beta)+\beta+(-\alpha)=\gamma+(-\alpha)=\gamma-\alpha$$

esser dovrà evidentemente un numero positivo.

Fra gl' infiniti numeri razionali si viene così a stabilire, come già pei numeri naturali, un ordine di successione perfettamente determinato, che si chiamerà la *successione naturale* dei numeri razionali.

350. *Se* $a<b$ *ed* $\alpha \leqq \beta$ *è anche* $a+\alpha<b+\beta$.

Infatti, per le prime due diseguaglianze, si può porre:

$$b=a+h \quad , \quad \beta=\alpha+k$$

essendo h e k numeri positivi (h diverso da zero); e di qui segue ora:

$$b+\beta=(a+\alpha)+(h+k),$$

onde appunto:

$$b+\beta>a+\alpha.$$

§ 8.° — Riduzione di una somma di numeri razionali alla più semplice espressione.

351. *La somma di più numeri razionali positivi* $\frac{m_1}{n}, \frac{m_2}{n}, \ldots, \frac{m_i}{n}$, *espressi da frazioni aventi lo stesso denominatore* n, *è data dalla frazione*:

$$\frac{m_1+m_2+\ldots+m_i}{n}.$$

Invero, se un aggregato di m_1 unità di specie n ed un altro di m_2 unità della stessa specie n ed un terzo di m_3 unità pure di specie n, e così via, si riuniscono in un unico aggregato, si verrà evidentemente a formare un aggregato di $m_1+m_2+m_3+\ldots$ unità di specie n. Sarà dunque appunto (§ 4.°, articoli 17 e 18):

$$\frac{m_1}{n}+\frac{m_2}{n}+\ldots+\frac{m_i}{n}=\frac{m_1+m_2+\ldots+m_i}{n}.$$

352. Se le frazioni $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \ldots$ non hanno lo stesso denominatore, esse si potranno ridurre ad avere lo stesso denominatore moltiplicando il numeratore e il denominatore di ogni frazione (cfr. art. 337) per un numero intero positivo opportunamente scelto. Basterà, p. es., di moltiplicare il numeratore e il denominatore di ogni frazione per il prodotto dei denominatori di tutte le altre. Le frazioni $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \ldots$ verranno così ad avere il denominatore comune $n_1 n_2 n_3 \ldots n_i$.

Si potrà però avere, in generale, un denominatore comune più

piccolo, eguale al minimo comune multiplo M (art. 176) dei numeri $n_1, n_2, \ldots, n_i$, moltiplicando la frazione $\frac{m_i}{n_i}$ per il numero M_i quoziente della divisione di M per n_i. Si avrà così:

$$\frac{m_i}{n_i} = \frac{m_i M_i}{n_i M_i} = \frac{m_i M_i}{M};$$

e tutte le frazioni avranno per comune denominatore M.

Sarà pertanto, secondo l'art. precedente:

$$\frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} + \ldots + \frac{m_i}{n_i} = \frac{m_1 M_1}{M} + \ldots + \frac{m_i M_i}{M} = \frac{m_1 M_1 + \ldots + m_i M_i}{M}.$$

353. Dovendosi finalmente fare la somma di più numeri razionali positivi o negativi, si potrà far dapprima la somma di tutti i positivi, poi quella di tutti i negativi, ed aggiungere i risultati. Alla somma proposta si potrà dunque dare la forma:

$$\left(\frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} + \ldots + \frac{m_r}{n_r}\right) + \left(-\frac{\mu_1}{\nu_1} - \frac{\mu_2}{\nu_2} - \ldots - \frac{\mu_s}{\nu_s}\right) \qquad (1)$$

significando le m, n, μ, ν dei numeri naturali, cioè interi e positivi.

Ma per l'art. 348) si ha:

$$-\frac{\mu_1}{\nu_2} - \frac{\mu_2}{\nu_2} - \ldots - \frac{\mu_s}{\nu_s} = -\left(\frac{\mu_1}{\nu_1} + \frac{\mu_2}{\nu_2} + \ldots + \frac{\mu_s}{\nu_s}\right).$$

Quindi la (1) si può anche scrivere:

$$\left(\frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} + \ldots + \frac{m_r}{n_r}\right) - \left(\frac{\mu_1}{\nu_1} + \frac{\mu_2}{\nu_2} + \ldots + \frac{\mu_s}{\nu_s}\right);$$

cosicchè, fatta la riduzione di tutte le frazioni al comune denominatore M, si otterrà un'espressione della forma:

$$\frac{a}{M} - \frac{b}{M}.$$

Se ora sia $a \geqq b$ si verifica subito (servendosi dell'art. 351) che:

$$\frac{a}{M} - \frac{b}{M} = \frac{a-b}{M}.$$

In caso contrario, si potrà scrivere:

$$\frac{a}{M} - \frac{b}{M} = -\left(\frac{b}{M} - \frac{a}{M}\right) = -\frac{b-a}{M}.$$

§ 9.° — Proprietà compositiva della legge razionale dei valori. Prodotto di due numeri razionali.

354. Se P e Q sono due oggetti od unità qualisivogliano appartenenti al nostro insieme $\overline{U}$, cui abbiamo riferita la legge razionale dei valori, col simbolo composto PQ intenderemo rappresentata un'unità di $\overline{U}$ la cui specie sia il prodotto delle specie di P e di Q e il cui segno sia il composto dei segni di P e Q, secondo la *legge di composizione dei segni* da noi già incontrata (art. 331) espressa dalle scritture:

$$+(+)=+\ ,\ +(-)=-\ ,\ -(+)=-\ ,\ -(-)=+.$$

L'unità rappresentata da PQ si dirà essere il *composto* dell'unità P e dell'unità Q.

355. È chiaro che i simboli composti PQ e QP rappresenteranno unità fra loro equivalenti, cioè della stessa specie e dello stesso segno; poichè, se m, m' siano rispettivamente le specie di P e Q ed ε, ε' i loro segni, si ha:

$$mm' = m'm\ ,\ \varepsilon(\varepsilon') = \varepsilon'(\varepsilon).$$

356. Ciò premesso, passiamo ad occuparci del composto $\overline{\Omega}\overline{H}$ di due aggregati $\overline{\Omega}$ ed $\overline{H}$ di oggetti, od unità che voglia dirsi, appartenenti all'insieme $\overline{U}$. Esso si definisce (cfr. cap. I, art. 28) come l'aggregato di tutte le unità che si ottengono componendo, secondo la legge di composizione delle unità testè enunciata, ogni unità di $\overline{\Omega}$ con ogni unità di $\overline{H}$.

Da questa definizione emerge senz'altro, in virtù dell'art. prec., che se $\overline{\Omega}$ ed $\overline{H}$ sono due aggregati qualisivogliano, *il composto* $\overline{\Omega}\overline{H}$ *è equivalente al composto* $\overline{H}\overline{\Omega}$.

357. Stabilita così la legge di composizione delle unità e degli aggregati, dobbiamo ora dimostrare che la legge razionale dei valori gode, rispetto a questa legge di composizione (art. 300) della proprietà compositiva, cioè che: *se* $\overline{\Omega}$ *ed* $\overline{H}$ *sono due aggregati qualisivogliano ed* $\overline{\Omega}'$, $\overline{H}'$ *due aggregati risp. equivalenti ad* $\overline{\Omega}$ *ed* $\overline{H}$, *anche il composto* $\overline{\Omega}'\overline{H}'$ *è equivalente al composto* $\overline{\Omega}\overline{H}$.

Per dimostrare ciò, basterà dimostrare il seguente enunciato più semplice: *se* $\overline{\Omega}$ *ed* $\overline{\Omega}'$ *sono due aggregati equivalenti ed* A *è un oggetto qualunque, il composto* $\overline{\Omega}$A *è equivalente al composto* $\overline{\Omega}'$A.

Supponiamo infatti, per un momento, che ciò sia già stato dimostrato; e sia ora $\overline{H}$ un aggregato qualunque i cui elementi siano A_1, A_2, ..., A_n. Sarà $\overline{\Omega}A_1$ equivalente ad $\overline{\Omega}'A_1$, $\overline{\Omega}A_2$ equivalente ad $\overline{\Omega}'A_2$, e così via. Quindi (art. 316) sarà anche l'aggregato ($\overline{\Omega}A_1$, $\overline{\Omega}A_2$, ..., $\overline{\Omega}A_n$), riunione degli aggregati $\overline{\Omega}A_1$, $\overline{\Omega}A_2$, ..., $\overline{\Omega}$ A_n,

equivalente all'aggregato $(\overline{\Omega}'A_1, \overline{\Omega}'A_2, \ldots, \overline{\Omega}'A_n)$, cioè il composto $\overline{\Omega}\overline{H}$ equivalente al composto $\overline{\Omega}'\overline{H}$.

Se ora $\overline{H}'$ è un aggregato equivalente ad $\overline{H}$, sarà similmente il composto $\overline{H}\overline{\Omega}'$ equivalente al composto $\overline{H}'\overline{\Omega}'$, ovvero, che è la stessa cosa,(art.356),il composto $\overline{\Omega}'\overline{H}$ equivalente ad $\overline{\Omega}'\overline{H}'$. Essendo dunque $\overline{\Omega}\overline{H}$ equivalente ad $\overline{\Omega}'\overline{H}$ ed $\overline{\Omega}'\overline{H}$ equivalente ad $\overline{\Omega}'\overline{H}'$, resterà dimostrato (art. 310) che $\overline{\Omega}\overline{H}$ è equivalente ad $\overline{\Omega}'\overline{H}'$.

358. Cominciamo dal supporre che l'aggregato $\overline{\Omega}'$ differisca dall'aggregato Ω soltanto per questo che in luogo di certe μ unità di specie μ contenute fra gli elementi di $\overline{\Omega}$ siasi posto un' unica unità di prima specie. Sia cioè:

$$\overline{\Omega} = C'_\mu, C''_\mu, \ldots, C^{(\mu)}_\mu, \overline{H}, \qquad \overline{\Omega}' = C_1, \overline{H},$$

dove $C'_\mu, C''_\mu, \ldots$ sono i μ oggetti di μ^{esima} specie e C_1 è un oggetto di prima specie. Poichè:

$$\overline{\Omega}A = C'_\mu A, C''_\mu A, \ldots, C^{(\mu)}_\mu A, \overline{H}A; \quad \overline{\Omega}'A = C_1 A, \overline{H}A,$$

basterà (art. 316), per dimostrare l'equivalenza di $\overline{\Omega}\overline{A}$ ed $\overline{\Omega}'A$, di dimostrare l'equivalenza dei due aggregati:

$$C'_\mu A, C''_\mu A, \ldots, C^{(\mu)}_\mu A \quad \text{e} \quad C_1 A,$$

cioè, se indichiamo con ν la specie dell'unico oggetto A, che l'aggregato di μ unità di egual segno e di specie $\mu\nu$ è equivalente ad un'unità, dello stesso segno, di specie ν. Ed infatti, ciò riesce evidente se, in luogo dei due aggregati, si considerano i loro equimultipli secondo il numero ν.

Supponiamo, in secondo luogo, che l' aggregato $\overline{\Omega}'$ differisca da $\overline{\Omega}$ per ciò che due elementi C_μ, C'_μ, l'uno positivo e l'altro negativo, di specie μ, contenuti in Ω siano stati soppressi simultaneamente. Per dimostrare l' equivalenza di $\overline{\Omega}A$ e di $\overline{\Omega}'A$, basterà dimostrare che l'aggregato di due elementi:

$$C_\mu A \;,\; C'_\mu A$$

equivale all'aggregato nullo. Ora ciò è senz'altro chiaro, poichè, se ν è la specie dell' elemento A, i due elementi in parola sono due unità della stessa specie $\mu\nu$ e di segno contrario.

Possiamo dunque concludere che se i due aggregati $\overline{\Omega}$, $\overline{\Omega}'$ sono fra loro direttamente equivalenti, il composto $\overline{\Omega}\overline{A}$ è equivalente al composto $\overline{\Omega}'\overline{A}$. Infatti il passaggio da $\overline{\Omega}$ ad $\overline{\Omega}'$ si potrà effettuare mediante successivi cambiamenti appartenenti all'uno od all'altro dei due tipi or ora considerati.

359. Veniamo ora a dimostrare quanto si era detto all'art. 357; cioè che, essendo $\overline{\Omega}$ ed $\overline{\Omega}'$ due aggregati comunque equivalenti ed A un unico oggetto, di specie ν, il composto $\overline{\Omega}\overline{A}$ è equivalente ad $\overline{\Omega}'A$. Per supposto esiste un numero naturale n tale che gli equi-

multipli $\overline{\Omega}_n$, $\overline{\Omega}'_n$ di $\overline{\Omega}$ ed $\overline{\Omega}'$ secondo n siano direttamente equivalenti; cosicchè saranno equivalenti, per l' art. prec., i due composti $\overline{\Omega}_n$A ed $\overline{\Omega}'_n$A. Ma questi due composti non sono che gli equimultipli, secondo n, dei due composti $\overline{\Omega}$A ed $\overline{\Omega}'$A. Questi ultimi sono dunque (art. 319) fra loro equivalenti; c. d. d.

360. Il teorema ora stabilito ci permette di dare del prodotto di due numeri razionali qualisivogliano la seguente definizione: *per prodotto di due numeri razionali* h, k *s'intenderà quel numero razionale che rappresenta il valore del composto* $\overline{H}\overline{K}$, *essendo* $\overline{H}$ *uno qualunque degli aggregati di valore* h *e* $\overline{K}$ *uno qualunque degli aggregati di valore* k.

Il prodotto, così definito, di h e k si rappresenterà col simbolo hk.

È appena necessario di osservare che, nel caso di h, k interi positivi, questa definizione ricade in quella già data (Cap.° I.°, §° 4) per il prodotto di due numeri naturali; poichè in questo caso si potranno scegliere per $\overline{H}$ e $\overline{K}$ due aggregati costituiti risp da h e k unità fondamentali.

8. Poichè il composto $\overline{H}\overline{K}$ è equivalente (art. 356) al composto $\overline{K}\overline{H}$, è chiaro che il prodotto, testè definito, di due numeri razionali h, k è indipendente dall' ordine dei fattori; cioè che $hk = kh$.

Potremmo altresì dimostrare come, in base alla definizione in parola, il prodotto successivo di più numeri razionali goda della proprietà commutativa ed associativa. Ma ciò risulterà più semplicemente, in modo affatto intuitivo, dall'espressione stessa, che ora daremo, del prodotto di più numeri razionali sotto forma di un'unica frazione; poichè dalla forma stessa dell' espressione appariranno le dette due proprietà come conseguenza immediata delle proprietà stesse, in quanto sono già state stabilite pel caso del prodotto di più numeri naturali.

362. *Il prodotto di più numeri razionali positivi ridotti, come è sempre possibile* (art. 334), *alla forma* $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \ldots, \frac{m_i}{n_i}$ *è dato dalla frazione*:

$$\frac{m_1 m_2 \ldots m_i}{n_1 n_2 \ldots n_i}.$$

Infatti, essendo $\frac{m_1}{n_1}$ il valore di un aggregato:

$$A_{n_1}, B_{n_1}, C_{n_1}, \ldots$$

di m_1 unità positive di specie n_1 ed $\frac{m_2}{n_2}$ il valore di un aggregato:

$$P_{n_2}, Q_{n_2}, R_{n_2}, \ldots$$

di m_2 unità positive di specie m_2, il prodotto $\frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2}$ sarà il va-

lore del composto:

$$(A_{n_1}, B_{n_1}, C_{n_1}, \ldots)(P_{n_2}, Q_{n_2}, R_{n_2}, \ldots),$$

cioè il valore dell'aggregato:

$$A_{n_1}P_{n_2}, A_{n_1}Q_{n_2}, \ldots$$

di $m_1 n_2$ unità fondamentali di specie $n_1 n_2$. Ora il valore di questi aggregati è appunto espresso, come sappiamo (art. 334) dalla frazione $\frac{m_1 m_2}{n_1 n_2}$.

363. Il prodotto di più numeri razionali positivi o negativi, è un numero razionale che ha per valore assoluto (art. 332) il prodotto dei valori assoluti dei fattori, ed è poi positivo o negativo *secondochè il numero dei fattori negativi è pari o dispari.*

La dimostrazione si fa come all'art. prec., dopo aver richiamata la definizione data all'art. 354 del segno del composto di due unità; notando inoltre che dalla legge di composizione dei segni (articolo 331) segue che *il composto di più segni è + o —, secondochè fra i segni da comporsi vi sia un numero pari, ovvero un numero dispari di segni negativi.*

In particolare il prodotto di un numero positivo e di un negativo è un negativo, il prodotto di due positivi ovvero di due negativi è un negativo.

364. *Affinchè il prodotto di due numeri razionali sia uguale a zero, è necessario sia zero uno dei due fattori.*

Infatti il prodotto di due numeri diversi da zero è diverso da zero (cfr. art. 362).

365. *Il prodotto di un numero razionale* k *per* 1 *è uguale a* k, *nel mentre che il prodotto di* k *per* -1 *è uguale a* $-$k.

La dimostrazione è affatto ovvia.

366. *Se* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *sono dei numeri razionali qualisivogliano, positivi o negativi, il prodotto* $(-\alpha_1)(-\alpha_2)\ldots(-\alpha_n)$ *è uguale allo stesso prodotto* $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$, *ovvero al numero ad esso contrario, secondochè* n *sia pari o dispari.*

Si ha infatti, secondo l'art. precedente:

$$(-\alpha_1)(-\alpha_2)\ldots(-\alpha_n) = [(-1)\alpha_1][(-1)\alpha_2]\ldots[(-1)\alpha_n]$$
$$= (-1)(-1)\ldots(-1)\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n = (-1)^n\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n.$$

Note.

1. È importante di dimostrare come la legge di composizione delle unità delle diverse specie e segni, data in questo § (art. 354), sia la sola legge rispetto alla quale la legge razionale dei valori goda della proprietà compositiva.

Ammettiamo naturalmente come postulato che il composto di un'unità positiva di 1ª specie con un'altra unità positiva di 1ª specie esser debba

un'unità positiva di 1ª specie. Se, dopo ciò, sussiste la proprietà compositiva, il composto di un aggregato di m unità positive di specie m e dell'aggregato di n unità positive di specie n esser dovrà equivalente ad un' unità di 1ª specie (giacchè ognuno di quei due aggregati equivale ad un' unità di 1ª specie). Cioè, un aggregato di mn unità positive di specie x (se x è la specie dell' unità positiva che nasce dal composto di un' unità di specie m ed una di specie n) esser dovrà equivalente all'unità di prima specie. Di qui segue necessariamente (art. 327) che $x = mn$; cioè appunto che un'unità positiva di specie m composta con un'unità positiva di specie n deve generare un'unità positiva di specie mn.

Ammettiamo in secondo luogo come postulato che il composto dell'aggregato nullo per un'unità positiva di 1ª specie esser debba equivalente all'aggregato nullo. Poichè l'aggregato nullo è equivalente all'aggregato di un'unità positiva A_i, di specie i, e della sua contraria A'_i, il composto dell' aggregato A_i, A'_i e dell' aggregato di m unità positive di specie m (che equivale alla unità positiva di specie 1) esser dovrà equivalente all'aggregato nullo. Cioè, se x è la specie dell'unità D_x che nasce dal composto di A'_i con l'unità positiva di specie m, l'aggregato di m unità positive di specie mi riunito all'aggregato di m unità equivalenti a D_x dovrà riuscire equivalente all'aggregato nullo. Di qui segue primieramente (art. 322) che D_x dev' essere negativo; onde l' aggregato di m unità positive di specie mi esser dovrà equivalente all'aggregato di m unità negative di specie x. Sarà dunque (art. 327) $x = mi$, cioè: il composto di un'unità positiva di specie m e di una negativa di specie i esser dovrà un'unità negativa di specie ni.

Se ammettiamo finalmente come terzo postulato che il composto dell'aggregato nullo con se stesso sia ancora equivalente all'aggregato nullo, il composto:

$$(A_i, A'_i)(B_m, B'_m)$$

dovrà equivalere all'aggregato nullo. Di qui segue facilmente pei risultati già ottenuti circa i composti A_iB_m, $A_iB'_m$, A'_iB_m che il composto $A'_iB'_m$ esser deve equivalente al composto A_iB_m; cioè che il composto di due unità negative di specie i ed m risp., esser deve un' unità positiva di specie im.

Le definizioni date all'art. 354 si trovano così tutte giustificate.

2. La definizione di composto di due unità α e β, data all'art. 354, si può anche enunciare sotto questa forma: *il composto $\alpha\beta$ è un'unità dedotta dall'unità α nello stesso modo col quale dall'unità fondamentale positiva è stata dedotta l'unità β*. Infatti $\alpha\beta$ è un'unità di segno eguale o contrario a quello di α secondochè β è di segno eguale o contrario a quello dell'unità fondamentale positiva. E se un' unità fondamentale equivale all' aggregato di n unità simili a β (che sia cioè di specie n), anche l' unità α (che sia di specie m) equivale, fatta astrazione dal segno, all'aggregato di n unità simili al composto $\alpha\beta$ che è di specie mn (cfr. art. 320).

Si può facilmente riconoscere come anche il prodotto di due aggregati obbedisca a questo stesso concetto (cfr. la 1ª delle note fatte da *Cauchy* al suo: *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, Paris, 1821).

§ 10.° — Proprietà distributiva della moltiplicazione dei numeri razionali.

367. La proprietà distributiva della moltiplicazione di numeri naturali rappresentata dall' uguaglianza:

$$(a + b)c = ac + bc \qquad (1)$$

(cfr. Cap. I, § 9.°) sussiste anche se a, b, c siano dei numeri razionali qualisivogliano, interi o frazionarii, positivi o negativi.

Infatti, se $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ siano aggregati (di unità fondamentali od aliquote, positive o negative) rappresentati risp. dai numeri a, b, c, basterà, per dimostrare la (1), di dimostrare che l' aggregato $(\bar{A}, \bar{B})\bar{C}$ è equivalente all' aggregato $(\bar{A}\bar{C}, \bar{B}\bar{C})$; giacchè l' aggregato $(\bar{A}, \bar{B})$ formato dalla riunione di $\bar{A}$ e $\bar{B}$ è rappresentato (art. 317) dal numero $a+b$, ecc. Ora è manifesto (cfr. art. 28) che il composto dell' aggregato $(\bar{A}, \bar{B})$ e dell' aggregato $\bar{C}$ è, non solamente equivalente, ma addirittura identico alla riunione dell'aggregato composto $\bar{A}\bar{C}$ e dell' aggregato composto $\bar{B}\bar{C}$.

368. La proprietà distributiva ora dimostrata ha per conseguenza, precisamente come si è visto pei numeri naturali, che *il prodotto di due somme di numeri razionali è uguale alla somma di tutti i prodotti che si possono formare moltiplicando un termine qualunque della prima somma per un termine qualunque della seconda.*

Si ha così, ad esempio:

$$(a-3b+2c)(d-3h)=$$

$$=ad+(-3b)d+2cd+a(-3h)+(-3b)(-3h)+(2c)(-3h)$$

ossia (cfr. art. 366):

$$(a-3b+2c)(d-3h)=ad-3bd+2cd-3ah+9bh-6ch.$$

369. È del pari manifesto che quanto si è detto nel primo Capitolo circa le espressioni *monomie* e *polinomie* o, più generalmente, circa le *espressioni intere* dedotte da certi numeri $a, b, c,\ldots$ segue a sussistere anche se $a, b, c,\ldots$ siano numeri qualisivogliano.

Soltanto noteremo che si dovranno ora considerare come espressioni monomie (cfr. Cap. I, § 6.º) non solamente quelle della forma:

$$a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots d^\delta,$$

ma anche quelle della forma:

$$-a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots d^\delta,$$

giacchè si può scrivere:

$$-a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots d^\delta = (-1)a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots d^\delta.$$

E per la stessa ragione potranno considerarsi come espressioni polinomie (cfr. Cap. I, § 8.º) tutte quelle della forma:

$$\pm a^\alpha b^\beta \ldots d^\delta \pm a^{\alpha'} b^{\beta'} \ldots d^{\delta'} \pm \ldots \pm a^{\alpha^{(n)}} b^{\beta^{(n)}} \ldots d^{\delta^{(n)}}.$$

370. Finalmente notiamo che le espressioni *intere*, cioè (cfr. Cap. I, art. 106) le espressioni dedotte dai numeri $a, b, c, \ldots, d$ mediante le tre operazioni di moltiplicazione, addizione e sottrazione, hanno ora un senso perfettamente determinato qualunque siano i valori che si attribuiranno ad $a, b, c, \ldots, d$. Non ha, cioè, più ragione di essere la restrizione che eravamo costretti a fare

finchè dovevamo restare nel campo dei soli numeri naturali, giacchè *nel campo dei numeri razionali la sottrazione è sempre possibile.*

Note ed Esercizi.

1. *Se i numeri razionali positivi* a, α, b, β *soddisfano alle diseguaglianze* :

$$a < b \quad , \quad \alpha \gtreqless \beta$$

è anche :

$$a\alpha < \alpha\beta.$$

Si dimostrerà ciò osservando che dev'essere $b = a + h$ e $\beta = \alpha + k$, con h e k positivi (ed h diverso da zero).

2. Essendo a e b due numeri razionali qualisivogliano, si riconosca che il numero $\frac{a+b}{2}$ è sempre compreso fra a e b; e se ne deduca poi che *fra due numeri razionali qualunque sono sempre compresi infiniti altri numeri razionali.*

3. Dati due numeri razionali qualunque a e b $(a < b)$, dimostrare come si possa determinare il numero naturale n in modo che $a + \frac{1}{n}$ sia compreso fra a e b.

§ 11.º — Quoto di due numeri razionali.

371. Dati due numeri naturali m ed n, non esiste (ad eccezione del caso particolare in cui m sia multiplo di n) un numero naturale x che moltiplicato per n produca m.

Questo problema diventa però risolubile nel campo dei numeri razionali; giacchè esso è soddisfatto dal numero razionale:

$$x = \frac{m}{n}.$$

Da questa eguaglianza, moltiplicandone entrambi i membri per n, segue infatti (art. 362):

$$nx = \frac{m}{n} \cdot n = \frac{m}{n} \cdot \frac{n}{1} = \frac{mn}{n} = m.$$

372. Più generalmente: *se* α *e* β *sono due numeri razionali e* β *sia diverso da zero, esiste un unico numero razionale* x *che moltiplicato per* β *produce* α.

La restrizione che β sia diverso da zero, è necessaria; poichè, se $\beta = 0$, l'uguaglianza:

$$\beta x = \alpha \qquad (1)$$

non può evidentemente essere soddisfatta, se non quando sia $\alpha = 0$. E se anche α è uguale a zero, l'eguaglianza (1) sarà manifestamente soddisfatta da qualunque numero razionale x.

Supponiamo ora dapprima che α e β siano due numeri razio-

nali positivi:

$$\alpha = \frac{m}{n} \ , \ \beta = \frac{m'}{n'} , \qquad (m' > 0).$$

L'eguaglianza (1) sarà soddisfatta prendendo:

$$x = \frac{mn'}{nm'}.$$

Si avrà infatti appunto:

$$\frac{m'}{n'} x = \frac{m'mn'}{n'nm'} = \frac{m \cdot m'n'}{n \cdot m'n'} = \frac{m}{n}.$$

Se α e β non sono entrambi positivi, ma sia in generale:

$$\alpha = \varepsilon \frac{m}{n} \ , \ \beta = \varepsilon' \frac{m'}{n'} ,$$

ove ε ed ε' figurano i segni + o − oppure anche, che è la stessa cosa, +1 o −1, basterà, per soddisfare l'uguaglianza (1), di prendere:

$$x = \pm \frac{mn'}{nm'}$$

scegliendo il segno + ovvero il segno −, secondochè i due segni ε ed ε' siano uguali o contrarii. Si avrà infatti (cfr. art. 366):

$$\varepsilon' \frac{m'}{n'} \cdot x = \varepsilon' \frac{m'}{n'} \cdot \varepsilon \left(\varepsilon' \frac{mn'}{nm'} \right) = \varepsilon' \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon' \frac{m'}{n'} \cdot \frac{mn'}{nm'} = \varepsilon \frac{m}{n}.$$

373. Ci resta ancora a dimostrare che, oltre al numero x così determinato, non esiste alcun altro numero razionale x che soddisfi alla (1). Ed invero, ammesso che sussistessero simultaneamente le due uguaglianze:

$$\beta x = \alpha \quad , \quad \beta x' = \alpha ,$$

sottraendo l'una dall'altra membro a membro, se ne dedurrebbe:

$$\beta x - \beta x' = 0 ,$$

ossia anche:

$$\beta (x - x') = 0$$

d'onde, poichè il fattore β è $\gtrless 0$ (art. 364):

$$x - x' = 0 , \quad \text{cioè:} \quad x = x'.$$

374. Il numero, di cui abbiamo ora constatata l'esistenza, che moltiplicato per β produce α, si chiama il *quoto* di α per β e si rappresenta col simbolo $\frac{\alpha}{\beta}$, od anche con $\alpha : \beta$.

Questa definizione del simbolo $\frac{\alpha}{\beta}$ è in perfetto accordo (cfr. art. 371) col significato già dato a questo numero nel caso in cui α

e β siano interi e positivi. È quindi naturale di applicare al simbolo $\frac{\alpha}{\beta}$, qualunque siano i numeri razionali α e β, l'epiteto di *frazione* e ai suoi due termini α e β quello di *numeratore* e di *denominatore* della frazione.

375. ***Il valore di una frazione qualsivoglia non si altera moltiplicandone il numeratore e il denominatore per uno stesso numero razionale.***

Infatti, se:

$$x = \frac{\alpha}{\beta},$$

si ha:

$$\beta x = \alpha$$

e moltiplicando entrambi i membri per un numero razionale qualunque γ:

$$\gamma\beta \cdot x = \gamma\alpha,$$

cioè appunto:

$$x = \frac{\gamma\alpha}{\gamma\beta}.$$

376. Dall' eguaglianza:

$$ax = ay$$

segue, se a è diverso da zero:

$$\frac{ax}{a} = \frac{ay}{a},$$

cioè per l' art. precedente:

$$x = y,$$

ossia: *se i due membri di un' eguaglianza hanno un fattore comune diverso da zero, esso si può anche sopprimere.*

377. *Per avere il prodotto di due frazioni, basta formare la frazione che ha per numeratore il prodotto dei numeratori e per denominatore il prodotto dei denominatori.*

Sia infatti:

$$x = \frac{\alpha}{\beta}, \quad y = \frac{a}{b}.$$

Dall' eguaglianze:

$$\beta x = \alpha, \quad by = a,$$

moltiplicate membro a membro, segue:

$$\beta b \cdot xy = a\alpha,$$

cioè appunto:

$$xy = \frac{a\alpha}{b\beta}.$$

378. *Per avere il quoto di due frazioni, basta formare la fra-*

zione che ha per numeratore il numeratore della prima moltiplicato per il denominatore della seconda e per denominatore il denominatore della prima moltiplicato per il numeratore della seconda. Cioè:

$$\frac{\frac{a}{\beta}}{\frac{a}{b}}=\frac{ab}{\beta a}.$$

Invero, per verificare l'esattezza di questa uguaglianza, basta verificare che:

$$\frac{ab}{\beta a}\cdot\frac{a}{b}=\frac{a}{\beta}.$$

E si ha infatti, secondo l'art. precedente:

$$\frac{ab}{\beta a}\cdot\frac{a}{b}=\frac{a\cdot ba}{\beta\cdot ab}=\frac{a}{\beta}.$$

379. *La somma di due frazioni aventi lo stesso denominatore è uguale alla frazione che ha per numeratore la somma dei numeratori e per denominatore il denominatore comune.*

Sia infatti:

$$x=\frac{a}{d},\quad y=\frac{\beta}{d}.$$

Dall'uguaglianze:

$$dx=a\,,\quad dy=\beta$$

sommate membro a membro segue:

$$d(x+y)=a+\beta\,,$$

cioè appunto:

$$x+y=\frac{a+\beta}{d}.$$

380. Di qui segue (cfr. art. 375) che la somma di due frazioni si può esprimere, sotto forma di un'unica frazione, come segue:

$$\frac{a}{b}+\frac{a}{\beta}=\frac{a\beta}{b\beta}+\frac{ab}{\beta b}=\frac{a\beta+ab}{b\beta}.$$

381. L'operazione mediante la quale, dati due numeri a e β, si ottiene il numero x che moltiplicato per β produce a, si chiama *divisione* di a per β. A rigore si dovrebbe però chiamarla divisione *razionale* od *esatta* di a per β, per distinguerla dalla divisione *naturale*, da noi già considerata al capitolo II, che dà per risultato il quoziente di a per β, cioè quel numero naturale (intero e positivo) q che indica quante volte il numero positivo β è contenuto in a.

Nel mentre che il quoto x di a per β soddisfa all'uguaglianza:

$$a=\beta x\,,$$

il quoziente q di α per β soddisfa all'eguaglianza:

$$\alpha = \beta q + r$$

essendo r un numero positivo minore di β. Da quest'ultima eguaglianza si deduce:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta q + r}{\beta} = \frac{\beta q}{\beta} + \frac{r}{\beta} = q + \frac{r}{\beta}$$

dove $\frac{r}{\beta}$ è minore di 1. Il quoziente non è dunque altro che la parte intera del quoto, il quale si chiama perciò anche *quoziente esatto* (spesso anche semplicemente quoziente, quando la natura della questione non dia luogo ad equivoco).

§ 12.° — Espressioni razionali — Equazioni algebriche.

382. Si chiama *espressione razionale* ogni espressione ottenuta operando su certi numeri a, b, c, . . , , d, ben determinati o destinati a restare arbitrari, mediante le quattro operazioni fondamentali, cioé moltiplicazione, addizione, sottrazione e divisione, eseguite un numero finito di volte.

Così, ad esempio:

$$\left(\frac{\dfrac{a+b}{c} + d}{b - \dfrac{c+d}{a}} + \frac{a-b}{c-d}\right)\frac{a+b}{c+d}$$

è, come si vede, un' espressione razionale rispetto ai numeri a, b, c, d.

383. *Ogni espressione razionale si può ridurre, senza alterarne il valore, sotto forma di espressione intera o di quoto di due espressioni intere* (cfr. Cap. I, § 12).

Supponiamo, infatti, che ciò sia già stato dimostrato per quelle espressioni razionali che si deducono dai numeri $a, b, c, \ldots, d$ mediante un numero di operazioni fondamentali inferiore a k, e facciamo vedere che il teorema sarà vero anche per ogni espressione razionale E ottenuta mediante k operazioni.

Invero, l'ultima delle k operazioni, mediante le quali è stata ottenuta E, sarà un'operazione fondamentale eseguita fra due espressioni E' ed E'' già ottenute precedentemente, cioè con meno di k operazioni; cosicchè sarà per l' ipotesi fatta:

$$E' = \frac{H'}{K'}, \quad E'' = \frac{H''}{K''},$$

essendo H', K', H'', K'' espressioni intere formate con a, b, c,..., d.

Poichè ora:

$$E + E' = \frac{H'}{K'} + \frac{H''}{K''} = \frac{H'K'' + H''K'}{K'K''}$$

$$E' - E'' = \frac{H'}{K'} - \frac{H''}{K''} = \frac{H'K'' - H''K'}{K'K''}$$

$$E'E'' = \frac{H'}{K'} \cdot \frac{H''}{K''} = \frac{H'H''}{K'K''}$$

$$\frac{E'}{E''} = \frac{H'}{K'} : \frac{H''}{K''} = \frac{H'K''}{K'H''},$$

è chiaro che E avrà una delle quattro forme:

$$\frac{H'K'' + H''K'}{K'K''}, \quad \frac{H'K'' - H''K'}{K'K''} ; \quad \frac{H'H''}{K'K''}, \quad \frac{H'K''}{K'H''}$$

ciascuna delle quali è appunto il quoto di due espressioni intere.

Il teorema enunciato è così dimostrato, poichè esso é evidentemente vero per le espressioni ottenute da a, b, c, ..., d con una sola operazione, le quali appartengono ad uno dei quattro tipi:

$$ab \;, \; a+b \;, \; a-b \;, \; \frac{a}{b}.$$

384. L'eguaglianza, ottenuta col procedimento testè indicato:

$$E = \frac{M}{N}$$

che pone un' espressione razionale qualsivoglia E sotto forma di quoto di due espressioni intere M ed N, ci dice solamente che per tutti quei valori di $a, b, c, \ldots, d$ pei quali E ha un significato, ha un significato anche $\frac{M}{N}$ e che i due significati coincidono. La reciproca non è però vera. Cioè la frazione $\frac{M}{N}$ può avere un significato anche per valori di $a, b, c, \ldots, d$ che non danno un significato ben definito ad E. Così, ad esempio, l' espressione razionale:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$$

ha un significato ben definito soltanto quando siano diversi da zero tutti i denominatori, cioè quando siano soddisfatte le diseguaglianze:

$$b \gtrless 0 \;, \; c \gtrless 0 \;, \; d \gtrless 0.$$

In quest' ipotesi si può scrivere:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc};$$

ma il secondo membro, a differenza del primo, ha significato anche se sia $d = 0$, purchè sia soltanto:

$$b \gtrless 0 \ , \ c \gtrless 0.$$

A questo inconveniente si può ovviare scrivendo:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{add}{bcd},$$

poichè in questa uguaglianza i due membri hanno significato (e significato eguale) per gli stessi valori di a, b, c, d.

385. In generale possiamo dire che *un'espressione razionale qualunque* E, *composta coi numeri* a , b , c , . . . , d , *si può sempre porre sotto forma di quoto* $\frac{M'}{N'}$, *di due espressioni intere, avendo la frazione* $\frac{M'}{N'}$, *significato per quei soli valori di* a , b , c , . . . , d *che danno significato ad* E. *Essa non sarà però in tal caso, generalmente parlando, ridotta alla sua più semplice espressione* (*potendo, per esempio,* M' *ed* N' *avere qualche fattore comune*).

Infatti, nell' eguaglianza:

$$E = \frac{M}{N}$$

ottenuta col procedimento dell'art. 383, il secondo membro ha un significato ben determinato, che coincide con quello del primo membro, nell'ipotesi che siano soddisfatte certe diseguaglianze:

$$D \gtrless 0 \ , \ D' \gtrless 0 \ , \ D'' \gtrless 0 , \ldots$$

che nascono dall'esprimere che sono diversi da zero tutti i denominatori che s'incontrano nelle varie divisioni occorse nella composizione di E. Se però scriviamo, come è lecito:

$$E = \frac{MDD'D'' \ldots}{NDD'D'' \ldots},$$

il secondo membro avrà significato (uguale a quello di E) per tutti e soli quei valori di $a, b, c, \ldots, d$ che danno un significato ad E.

386. Se E, E' sono due espressioni razionali dedotte dai numeri

a, b, c, . . . , d, ed esista, o si supponga esistere l'uguaglianza:

$$E = E',$$

si potrà a quest'uguaglianza dare la forma:

$$E - E' = 0.$$

Quindi, poichè E - E' è pure un'espressione razionale dedotta dai numeri *a, b, c, . . . , d,* si può ad essa sostituire, per l'art. prec., un' eguaglianza ad essa perfettamente equivalente, della forma:

$$\frac{M}{N} = 0, \qquad (1)$$

essendo M ed N espressioni intere dedotte da *a, b, c, . . . , d.*

Ma l'uguaglianza (1) equivale alla uguaglianza:

$$M = 0$$

congiunta colla disuguaglianza:

$$N \gtrless 0.$$

Vediamo dunque che *ogni eguaglianza, o sistema di più eguaglianze, fra espressioni razionali dedotte da* a, b, c, . . . , d, *si può surrogare (coll'aggiunta di certe diseguaglianze) con un'eguaglianza, o con un sistema di uguaglianze di forma intera*:

$$M = 0\ ,\ M' = 0\ ,\ M'' = 0\ , \ldots$$

cioè uguagliando a zero certe espressioni intere dedotte da a, b, c,...,d.

387. Tutti i problemi dell'algebra si riducono in ultima analisi, ad uguagliare fra loro certe espressioni razionali dedotte da numeri *a, b, c, . . . , d* più o meno determinati ed a ricercare se e quali valori di *a, b, c, . . . , d* possano soddisfare tutte le uguaglianze così ottenute. Ora, per quanto si è testè dimostrato, tutte queste uguaglianze si possono ridurre, fatta astrazione da certe diseguaglianze, ad un sistema di equazioni:

$$E_1 = 0\ ,\ E_2 = 0\ , \ldots ,\ E_h = 0$$

in cui le E sono espressioni razionali intere dedotte da *a, b, c,...,d.*

Queste uguaglianze si chiamano anche talvolta *equazioni algebriche,* ed il loro insieme si dice essere un sistema di equazioni algebriche.

388. In ogni sistema di equazioni algebriche alcune delle quantità *a, b, c, . . . , d* sono perfettamente determinate *a priori* e vengono per conseguenza espresse con dei simboli numerici propriamente detti, come $\frac{1}{2}$, 3 , $-\frac{1}{4}$, . . . Altre non sono determinate a priori, ma s' intende che debbono essere *fissate a piacere;* esse prendono il nome di *parametri* e si designano appunto colle lettere *a, b, c, . . . , α, β, γ, . . .* Altre finalmente si lasciano indeterminate anche dopo fissati i valori dei parametri, inquantochè rap-

presentano le *incognite* del problema; il quale consiste appunto nel determinare tali incognite in modo che tutte le equazioni si trovino soddisfatte. Le incognite si designano ordinariamente colle ultime lettere dell'alfabeto, come $x, y, z, t, u, v, \ldots$

389. Così, ad esempio, le due equazioni:

$$3x^2 - \frac{1}{4}axy + (b+c)y^2 + 2 = 0$$

$$2x^2 - 3bcxy + 5 = 0$$

si possono considerare come un sistema di due equazioni algebriche colle due incognite x, y. In esso figurano però, oltre ai coefficienti determinati *a priori*: $2, -\frac{1}{4}, 3, -3, 5$, anche i parametri a, b, c.

390. Un'equazione algebrica fra le incognite $x, y, \ldots, z$ si dice del *grado* n, se n è il grado (Cap. I, art. 225) del polinomio, che ne forma il primo membro, rispetto alle variabili $x, y, \ldots, z$. Così ad esempio:

$$ax + by + c = 0$$

è il tipo più generale di un'equazione di 1° grado colle due incognite x, y; nel mentre che il tipo più generale di un'equazione di 2° grado fra le stesse due incognite sarà:

$$ax^2 + by^2 + 2cxy + dx + ey + g = 0,$$

e così via.

§ 13.° — Risoluzione di equazioni di 1° grado.

391. Ogni equazione di 1° grado con una sola incognita x si può sempre ridurre alla forma:

$$ax + b = 0 \tag{1}$$

essendo a e b numeri conosciuti. Alla (1) si può anche dare la forma equivalente:

$$ax = -b, \tag{2}$$

come si vede portando (§ 7.°) il secondo termine b al secondo membro.

Il problema di risolvere la (2) coincidendo ora con quello di trovare (§ 11.°) il quoto di a e di $-b$, vediamo senz' altro che: *se il coefficiente* a *è diverso da zero, l'equazione* (1) *ammette l'unica soluzione*:

$$x = \frac{-b}{a} = -\frac{b}{a}.$$

Se poi $a = 0$, *l'equazione* (1) *è incompatibile, a meno che sia anche* $b = 0$, *nel quale caso la* (1) *è evidentemente soddisfatta da qualsiasi valore di* x.

392. Un'equazione di 1° grado con più incognite, p. es. con tre incognite x, y, z è riducibile alla forma:

$$ax + by + cz + d = 0. \qquad (3)$$

Dei quattro coefficienti a, b, c, d, l'ultimo d si chiama il *termine noto* dell'equazione; gli altri (che sono pure numeri conosciuti) si dicono i *coefficienti delle incognite.*

Il problema rappresentato dalla (3), (in cui i coefficienti a, b, c si debbono ritenere tutti diversi da zero, poichè altrimenti l'equazione non conterrebbe che un numero minore d'incognite) è sempre *indeterminato*, perchè ammette un numero infinito di soluzioni. Invero, fissati a piacere i valori di due delle incognite, p. es. di y e di z, la (3) si presenterà come un'equazione colla sola incognita x, che si potrà anche scrivere così:

$$ax = -(by + cz + d)$$

d'onde:

$$x = -\frac{by + cz + d}{a}.$$

393. La risoluzione, ove sia possibile, di un sistema di m equazioni di 1° grado con n incognite x, y, z, ..., non presenta, teoricamente parlando, alcuna difficoltà. Basterà infatti ricavare da una delle equazioni il valore di una delle incognite, p. es. di x, come all'art. prec., e sostituire l'espressione così ottenuta, che conterrà soltanto y, z, ..., nelle rimanenti equazioni, le quali verranno così a formare un sistema di $m - 1$ equazioni di 1° grado colle sole $m - 1$ incognite y, z, ... Reciprocamente, è facile riconoscere che ogni sistema di valori delle y, z, ... soddisfacente alle $m - 1$ equazioni così trasformate, congiunto col corrispondente valore di x dato, come sopra, dalla prima equazione, fornirà un sistema di valori di x, y, z, ... i quali soddisferanno tutte le m equazioni primitive.

La risoluzione del sistema delle $m - 1$ equazioni colle $n - 1$ incognite si farà poi dipendere al modo stesso da quella di un sistema di $m - 2$ equazioni con $n - 2$ incognite al più; e così di seguito. Durante queste successive riduzioni potrà accadere che qualcuna delle equazioni residue si trovi affatto priva di incognite. Se una siffatta equazione esprima un'assurdità (come p. es. $4 = 3$) è chiaro che, senza procedere più oltre, si dovrà dichiarare il problema proposto insolubile, ossia, come anche si dice, che le m equazioni date fra le n incognite x, y, z, ... sono *incompatibili.* In caso contrario si potrà proseguire finchè non resti più alcuna delle equazioni primitive o restino soltano equazioni (non assurde) prive di incognite.

Il sistema proposto si sarà così trasformato in un altro, ad esso equivalente, della forma:

$$\begin{aligned} x &= ay + bz + ct + \dots + du + ev + gw + \dots \\ y &= a_1 z + b_1 t + \dots + d_1 u + e_1 v + g_1 w + \dots \\ z &= a_2 t + \dots + d_2 u + e_2 v + g_2 w + \dots \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u &= a_\mu v + b_\mu w + \dots \end{aligned}$$

il quale si risolverà prendendo a piacere i valori delle $v, w, \ldots,$ dopodichè i valori delle rimanenti incognite $x, y, z, \ldots, u$ si troveranno perfettamente determinati.

394. Consideriamo p. es. il sistema di due equazioni con due incognite:

$$ax + by = c \ , \ \alpha x + \beta y = \gamma. \tag{4}$$

Se a è diverso da zero, si ricaverà dalla prima:

$$x = \frac{c}{a} - \frac{b}{a} y \tag{5}$$

e, sostituendo questa espressione di x nella seconda equazione, si otterrà, per determinare y, l' equazione:

$$(a\beta - b\alpha)y = a\gamma - c\alpha$$

la quale, se $a\beta - b\alpha$ è diverso da zero, ci darà per y il valore:

$$y = \frac{a\gamma - c\alpha}{a\beta - b\alpha}. \tag{6}$$

Se poi fosse $a\beta - b\alpha = 0$, il sistema proposto (4) si dovrebbe dichiarare incompatibile, a meno che fosse anche $a\gamma - c\alpha = 0$, nel qual caso si potrebbe assegnare a piacere il valore di y e determinare x mediante la (5).

Sostituendo l'espressione di y data dalla (6) nella (5) troviamo dunque che, *se* $a\beta - b\alpha$ *è diverso da zero*, il sistema (4) è risoluto da un unico sistema di valori di x, y, dato dalle formole:

$$x = \frac{c\beta - b\gamma}{a\beta - b\alpha} \ , \ y = \frac{a\gamma - c\alpha}{a\beta - b\alpha}.$$

Allo stesso risultato si perverrebbe se, essendo nella prima delle (4) $a = 0$, fosse invece $b \gtrless 0$, ragionando su y come si è ragionato su x. Il caso in cui a e b fossero entrambe nulle si trova già implicitamente escluso per l' ipotesi che $a\beta - b\alpha$ sia diverso da zero.

Note ed Esercizi.

1. Dimostrare che, essendo:

$$a \gtrless 0 \ , \ a\beta - b\alpha = 0 \ , \ a\gamma - c\alpha = 0,$$

è anche:

$$c\beta - b\gamma = 0.$$

2. Trovare le condizioni di compatibilità del sistema di tre equazioni:

$$ax + by = c \ , \ \alpha x + \beta y = \gamma \ , \ Ax + By = C.$$

3. Riconoscere che, se:

$$\Delta = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_2 b_1 c_3 \gtrless 0 \ ,$$

il sistema di 3 equazioni:

$$a_1x + a_2y + a_3z = \alpha \ , \ b_1x + b_2y + b_3z = \beta \ , \ c_1x + c_2y + c_3z = \gamma \ ,$$

ammette l'unico sistema di soluzioni:

$$x = \frac{1}{\Delta}\left\{ \alpha b_2c_3 + a_2b_3\gamma + a_3\beta c_2 - \alpha b_3c_2 - a_3b_2\gamma - a_2\beta c_3 \right\}$$

$$y = \frac{1}{\Delta}\left\{ a_1\beta c_3 + \alpha b_3c_1 + a_3b_1\gamma - a_1b_3\gamma - a_3\beta c_1 - \alpha b_1c_3 \right\}$$

$$z = \frac{1}{\Delta}\left\{ a_1b_2\gamma + a_2\beta c_1 + \alpha b_1c_2 - a_1\beta c_2 - \alpha b_2c_1 - a_2b_1\gamma \right\}.$$

§ 14.° — Risoluzione di un' equazione algebrica, con un'incognita, di qualsivoglia grado.

395. Dovendosi risolvere un' equazione algebrica del grado n, con una sola incognita x:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0, \qquad (1)$$

ci è sempre lecito ritenere che i coefficienti a_0, a_1, ..., a_n siano tutti interi, giacchè, se non lo fossero, basterebbe, per renderli tali, di moltiplicare la (1) pel minimo comune multiplo dei denominatori delle frazioni che li rappresentano, già ridotte preventivamente alla loro più semplice espressione.

Ciò premesso, supponiamo che la (1) sia soddisfatta da un certo valore positivo di x, che si potrà sempre ritenere posto sotto la forma $\frac{p}{q}$, essendo $\frac{p}{q}$ due numeri interi positivi primi fra loro. Dovrà essere:

$$a_0\frac{p^n}{q^n} + a_1\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + a_2\frac{p^{n-2}}{q^{n-2}} + \ldots + a^{n-1}\frac{p}{q} + a_n = 0 \ ,$$

ossia, che è la stessa cosa, moltiplicando l'equazione per q^n:

$$a_0p^n + a_1p^{n-1}q + a_2p^{n-2}q^2 + \ldots + a_{n-1}pq^{n-1} + a_nq^n = 0. \qquad (2)$$

Poichè ora il numero p è un divisore di ciascuno dei primi n termini, è chiaro che, per essere soddisfatta la (2), è necessario che esso sia altresì divisore dell'ultimo termine a_nq^n. Ma p è primo con q; quindi dovrà essere a_n divisibile per p. Similmente si vede che q, dividendo tutti i termini del primo membro di (2) a cominciare dal secondo, dovrà dividere a_0.

È dunque manifesto che *per avere, se ne esistano, tutti i valori razionali positivi di* x *che soddisfano la* (2), *basterà trovare* (cfr. art. 192) *tutti i divisori positivi*:

$$p_1 \ , \ p_2 \ , \ p_3 \ , \ldots , \ p_\mu \qquad (3)$$

del numero a_n, *tutti i divisori positivi*:

$$q_1 \ , \ q_2 \ , \ q_3 \ , \ldots , \ q_\nu \qquad (4)$$

del numero a_0, *e verificare se qualcuna delle* $\mu\nu$ *coppie* p_i, q_j *che si possono formare combinando uno qualunque dei numeri* (3) *con uno qualunque dei numeri* (4), *renda soddisfatta la* (2). *Per ogni siffatta coppia* p_i, q_j *che soddisfi la* (2), *si avrà una soluzione*:

$$x = \frac{p_i}{q_j}$$

della (1); *nè potranno esistere altre soluzioni.*

396. Sia proposta, ad esempio, l' equazione:

$$4x^5 - 4x^4 - 5x^3 + 5x^2 - 9x + 9 = 0. \qquad (5)$$

I divisori positivi dell'ultimo coefficiente, 9, sono:

$$1 , 3 , 9 ,$$

quelli del primo coefficiente, 4, sono:

$$1 , 2 , 4.$$

Se esistono soluzioni positive della (5), esse devono dunque ricercarsi fra i nove numeri:

$$1 , 3 , 9 , \frac{1}{2} , \frac{3}{2} , \frac{9}{2} , \frac{1}{4} , \frac{3}{4} , \frac{9}{4}. \qquad (6)$$

Di questi, soltanto due verificano, come è facile riconoscere la (5), cioè 1 e $\frac{3}{2}$. La (5) ammette dunque due sole soluzioni positive, cioè:

$$x = 1 \quad \text{ed} \quad x = \frac{3}{2}.$$

397. La ricerca delle soluzioni negative, se ne esistano, non differisce sostanzialmente da quella delle positive. Ammesso infatti che la (5) sia soddisfatta da un valore negativo $x = -y$, essendo cioé y un numero positivo, si dovrà avere:

$$4(-y)^5 - 4(-y)^4 - 5(-y)^3 + 5(-y)^2 - 9(-y) + 9 = 0$$

cioè:

$$-4y^5 - 4y^4 + 5y^3 + 5y^2 + 9y + 9 = 9. \qquad (7)$$

Basterà dunque ricercare le soluzioni positive della (7) le quali dovranno ritrovarsi fra gli stessi nove numeri (6). Si trova così l'unica soluzione: $y = \frac{3}{2}$; cosicchè si conclude che l'equazione (5), oltre alle due soluzioni positive, ammette anche una soluzione negativa $x = -\frac{3}{2}$.

398. Consideriamo, come caso particolare importante, l' equa-

zione binomia:

$$ax^n - b = 0, \qquad (8)$$

essendo a e b numeri interi positivi dati, che si possono evidentemente ritenere primi fra loro. Se $x = \frac{p}{q}$ è un numero razionale positivo che la soddisfa, dovrà essere:

$$ap^n = bq^n, \qquad (9)$$

cosicchè, potendosi ritenere l'intero positivo p primo con l'intero positivo q, sarà p^n divisore di b e q^n divisore di a, cioè:

$$a = t \cdot q^n \quad , \; b = \theta \cdot p^n.$$

Sostituendo in (9) queste espressioni di a e b, si vede che dev'essere $t = \theta$, e precisamente, poichè a e b sono primi fra loro, $t = \theta = 1$.

Dunque: *affinchè la* (8), *cioè l'equazione*:

$$x^n = \frac{b}{a}$$

sia risolubile con un valore razionale di x, *è necessario e sufficiente che* b *ed* a *siano le potenze* n^{esime} *di due numeri naturali.*

§ 15.° — Concetto generale di funzione di una o più variabili. Funzioni intere e funzioni razionali.

399. Date due variabili, primitivamente affatto arbitrarie, x ed y, supponiamo che fra di esse sia stato stabilito un *legame* o *corrispondenza*, cioè che sia stata fissata una certa legge in virtù della quale venga determinato un numero finito o infinito di coppie di valori delle medesime; cosicchè, scelti a piacere un valore di x ed uno di y, resti ben determinato se questi due valori siano accoppiabili secondo tale legge, nel qual caso si diranno *corrispondenti*, ovvero non accoppiabili cioè *non-corrispondenti.*

Come si vede, preso un certo valore di x, potrà accadere che ad esso non corrisponda alcun valore di y, ovvero corrispondano uno o più valori di y. In ogni caso noi riterremo che i valori di y corrispondenti ad uno stesso valore di x siano in numero finito.

400. L'insieme dei procedimenti, siano essi di indole algoritmica o puramente speculativa, mediante i quali, dato il valore di x, restano determinati, se ve ne sono, i corrispondenti valori di y, si chiama *processo* od *operazione funzionale,* e il valore (o i valori) di y così ottenuto si dice essere una funzione di x.

Una stessa corrispondenza fra i valori di x e quelli di y dà dunque origine a due funzioni, secondochè, cioè, si consideri y come funzione di x ovvero x come funzione di y. Nel primo caso la x si chiama la variabile *indipendente* ed y la variabile *dipendente,* funzione delle x; nel secondo caso tutto all'opposto. Le due funzioni così originate si dicono *inverse* l'una dell'altra.

401. Così, ad esempio, se alle due variabili x ed y si imponga il legame:

$$axy + bx + cy + d = 0, \tag{1}$$

essendo a, b, c, d certi numeri ben determinati, si viene a stabilire fra esse la corrispondenza così detta ***projettiva***, in virtù della quale ad ogni valore di x corrisponde un unico valore di y dato dall' espressione:

$$y = -\frac{d + bx}{c + ax} \tag{2}$$

che indica l' operazione funzionale da eseguirsi per ottenere y quando è dato x. Fa soltanto eccezione il valore $x = -\frac{c}{a}$ al quale non corrisponde un valore ben determinato di y. Volendo invece esprimere x in funzione di y, si farà uso della formola:

$$x = -\frac{d + cy}{b + ay} \tag{3}$$

che esprime lo stesso legame figurato dalla (1) o dalla (2). I due processi funzionali definiti dalle due espressioni:

$$-\frac{d + bx}{c + ax} \quad \text{e} \quad -\frac{d + cx}{b + ax}$$

rappresentano dunque due funzioni inverse.

402. E importante di notare che, nel mentre che funzioni differenti non possono essere rappresentate dallo stesso processo funzionale, possono due differenti processi funzionali rappresentare la stessa funzione. Così, ad esempio, le due *espressioni differenti:*

$$y = 1 + \frac{2}{x} \quad \text{ed} \quad y = \frac{x + 2}{x},$$

rappresentano *la stessa funzione*, poichè qualunque sia x, si ha identicamente:

$$1 + \frac{2}{x} = \frac{x + 2}{x}.$$

403. Consideriamo, come altro esempio, il legame espresso dalla relazione:

$$y - x^2 = 0.$$

Esso fa corrispondere ad ogni valore razionale di x un unico valore di y, uguale al quadrato di x. Considerando, invece, x come funzione di y, vediamo che questo stesso legame fa corrispondere, ad un dato valore di y, due valori di x ovvero nessun valore razionale di x, secondochè y sia, oppure non sia, il quadrato esatto di un numero razionale. Cioè (art. 398), soltanto nel caso in cui y sia della forma:

$$y = \frac{b^2}{a^2},$$

essendo a e b numeri naturali, corrisponderanno ad esso valori di x e, precisamente, i due valori:

$$x = \frac{b}{a} \ , \ x = -\frac{b}{a}.$$

404. Più generalmente, un numero variabile X si dice *funzione delle variabili indipendenti* $x_1, x_2, \ldots, x_p$, quando fra le $p+1$ variabili:

$$X \ , x_1 \ , x_2 \ , \ldots \ , x_p$$

sia stabilito un legame qualunque in virtù del quale, appena assegnati i valori che si vogliono attribuire alle $x_1, x_2, \ldots, x_p$, resti determinato, se vi è, il corrispondente valore (o un certo numero di corrispondenti valori) di X.

Così, ad esempio, si potrá stabilire il legame:

$$X + x_1 + x_2 + \ldots + x_p = 0 ,$$

ovvero il legame:

$$X^2 + x_1 + x_2 + \ldots + x_p = 0.$$

Nel primo caso, dati a piacere i valori delle $x_1, x_2, \ldots, x_p$, resterà determinato per X l'unico valore:

$$X = -(x_1 + x_2 + \ldots + x_p).$$

Nel secondo caso invece si avranno, per ogni sistema di valori delle $x_1, x_2, \ldots, x_p$ la cui somma presa negativamente sia un quadrato esatto, due valori generalmente distinti di X:

$$X = \pm\sqrt{-(x_1 + x_2 + \ldots + x_p)}.$$

405. Per esprimere puramente e semplicemente che X è funzione delle $x_1, x_2, \ldots, x_p$, si scrive:

$$X = f(x_1 \ , x_2 \ , \ldots \ , x_p). \tag{4}$$

La lettera f è il così detto *simbolo funzionale*. Esso viene premesso alle lettere $x_1, \ldots, x_p$ rappresentanti le variabili indipendenti, che prendono anche il nome di *argomenti* della funzione f.

Occorrendo considerare più funzioni, queste si distinguono fra loro adoperando in luogo del simbolo funzionale f altre lettere come $\varphi, \psi, \ldots, F, \Phi, \Psi, \ldots$; così, p. es., si potrà scrivere:

$$x_1^2 + x_2^2 = f(x_1, x_2) \ , \ x_1^3 - x_2^3 = \varphi(x_1, x_2) \ ,$$

$$x_1 x_2 + \frac{3}{2} x_3^2 = \psi(x_1, x_2).$$

Il vantaggio principale che si ritrae da questo modo di scrittura, si è di poter esprimere facilmente qual'è il valore che assume la funzione per certi valori speciali delle variabili indipendenti. Così, se ad $x_1, x_2, \ldots, x_p$ si diano i valori speciali $a_1, a_2, \ldots, a_p$ rispettivamente, il valore corrispondente di X viene rappresen-

tato con:

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_p).$$

406. Fra tutte le funzioni di p variabili $x_1, x_2, \ldots, x_p$ le più semplici (almeno per riguardo alla costruzione della loro espressione analitica) sono quelle la cui espressione si ottiene operando sulle variabili $x_1, x_2, \ldots, x_p$ e su certe costanti $a, b, c, \ldots$ colle sole operazioni di moltiplicazione, addizione e sottrazione. Esse si chiamano funzioni *razionali intere* o più semplicemente *intere*.

La loro espressione si può sempre ridurre (cfr. Cap. I, § 12) alla somma di un numero finito di termini della forma:

$$A \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_p^{\alpha_p},$$

dove le $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ sono certi esponenti interi e positivi (anche nulli) ed A è un certo coefficiente *costante*, cioè assegnato una volta per sempre al pari degli esponenti α. Così, ad esempio, sono funzioni intere delle tre variabili x_1, x_2, x_3 le seguenti:

$$X = 2x_1^3 + x_2^2 x_3 - 8x_2^2,$$

$$X = 3x_1^3 x_2 - \frac{5}{6} x_3^2 + 7x_2^3 - \frac{3}{2} x_1 x_2 x_3,$$

ecc.

Pertanto, se X sia funzione intera delle $x_1, x_2, \ldots, x_p$, essa ammetterà *un'espressione intera*, e si potrà scrivere brevemente:

$$X = \sum A \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_p^{\alpha_p}, \tag{5}$$

significando il simbolo sommatorio Σ che il secondo membro della (5) si compone di un numero finito di termini analoghi al *termine generale* messo in evidenza sotto il segno stesso.

Per $p = 1$, si avrà in particolare come espressione di una funzione intera X di un'unica variabile x:

$$X = \sum A x^{\alpha}$$

od anche, ordinando i termini del secondo membro secondo le potenze decrescenti di x:

$$X = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n.$$

407. Le funzioni intere sono un caso particolare delle funzioni razionali, che si possono definire analogamente così: *una funzione X delle $x_1, x_2, \ldots, x_p$ si dice razionale, quando la sua espressione si può ottenere operando sulle variabili $x_1, x_2, \ldots, x_p$ e su un certo numero finito di costanti a, b, c, ... colle sole quattro operazioni elementari di moltiplicazione, addizione, sottrazione e divisione.*

Secondo quanto si è già visto al § 12, si può anche dire più brevemente che una funzione è razionale quando ammette un'e-

spressione razionale; e si vede quindi (cfr. ivi) che *una funzione razionale* si può sempre esprimere come il quoto di due funzioni intere.

Per significare che X è una funzione razionale delle $x_1, x_2, \ldots, x_p$, si potrà dunque scrivere:

$$X = \frac{\sum A \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_p^{\alpha_p}}{\sum B \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_p^{\alpha_p}}.$$

CAPITOLO V.

TEORIA DEI DETERMINANTI E SUA APPLICAZIONE ALLA RISOLUZIONE DEI PROBLEMI ALGEBRICI DI 1° GRADO.

§ 1.° — Definizione di determinante.

408. Si chiama *matrice quadrata di ordine* n la figura formata da n^2 numeri (elementi della matrice) scritti in uno stesso piano in modo da formare n linee orizzontali ed n linee verticali, ciascuna delle quali comprenda n elementi. Così p. es. la figura:

$$\begin{matrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -7 & 2 \\ 5 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{4}{7} \end{matrix}$$

è una matrice quadrata di 4.° ordine, poichè ogni linea ed ogni colonna contiene quattro elementi.

In una matrice quadrata di ordine n si chiamerà i^{ma} *riga* o *linea orizzontale* quella che occupa l'i^{mo} posto cominciando a contare dall' alto verso il basso, e si chiamerà j^{ma} *colonna* o *linea verticale* quella che occupa il posto j^{mo} contando le colonne da sinistra verso destra.

Finalmente si chiamerà posto (i, j) quel posto che si trova nella intersezione della i^{ma} linea orizzontale colla j^{ma} linea verticale.

Così nell'esempio precedente si vede che l'elemento -7 si trova sulla terza orizzontale e sulla terza verticale. Esso occupa dunque il posto (3 , 3). Invece l'elemento $\frac{3}{2}$ occupa il posto (4 , 2).

409. Per designare in generale con delle lettere gli elementi di una matrice quadrata di ordine n, basterà p. es. di indicare con a_{ij} quell'elemento che occupa il posto (i, j), cosicchè la matrice prenderà allora il seguente aspetto:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{matrix} \qquad (1)$$

In molti casi però è preferibile di designare gli elementi con lettere affette da un solo indice. Ciò si può ottenere p. es. rappresentando gli elementi della matrice col quadro:

$$\begin{array}{ccccc} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_n \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_1 & u_2 & u_3 & \dots & u_n \end{array} \qquad (2)$$

410. Consideriamo tutti i prodotti generalmente distinti che si possono formare moltiplicando fra loro n elementi della matrice quadrata di ordine n colla condizione che di ogni linea orizzontale o verticale si debba prendere, come fattore del prodotto, uno ed un solo elemento. Partendo dalla notazione (2) è chiaro che uno qualunque di questi prodotti sarà della forma:

$$a_{i_1} \cdot b_{i_2} \cdot c_{i_3} \quad \dots \quad u_{i_n} \qquad (3)$$

scrivendo dapprima l'elemento che si prende dalla 1.ª orizzontale che sia p. es. a_{i_1}, poi quello che si prende dalla 2.ª orizzontale che sia per esempio b_{i_2}, e così via.

Quanto agli indici:

$$i_1 \,, i_2 \,, i_3 \,, \dots , i_n \,, \qquad (4)$$

essi dovranno essere tutti differenti, poichè se fosse p, es. $i_2 = i_3$, ciò significherebbe che il prodotto (3) contiene due elementi b_{i_2} e c_{i_2} appartenenti alla stessa colonna di posto i_2, contrariamente alla condizione imposta.

Gli indici (4) non saranno dunque che una certa permutazione dei numeri naturali distinti:

$$1 \,, 2 \,, 3 \,, \dots . n$$

e del resto si potrà scegliere una permutazione a piacere.

Poichè ora di tali permutazioni ve ne sono $\underline{|n}$ (art. 209), è chiaro che si potranno formare in tutto precisamente $\underline{|n}$ prodotti che soddisfano alle condizioni volute.

Uno qualunque di questi prodotti:

$$a_{i_1} \, b_{i_2} \, c_{i_3} \quad \dots \quad u_{i_n}$$

si chiamerà *di classe pari* ovvero *di classe dispari* secondochè la permutazione formata dagli indici:

$$i_1 \,, i_2 \,, i_3 \,, \dots , i_n$$

è di classe pari o dispari (art. 212), onde già sappiamo che il nu-

mero dei prodotti di classe pari sarà eguale a quello dei prodotti di classe dispari, cioè sarà $\frac{\lfloor n}{2}$.

Ciò premesso: si chiama *determinante* della matrice quadrata (2) la somma degli $\lfloor n$ prodotti ora considerati presi ciascuno col segno + o —, secondochè sia di classe pari o di classe dispari.

Il valore di questo determinante, dipendendo evidentemente dai valori degli n^2 elementi della matrice, si suol designare colla matrice stessa chiusa fra due tratti verticali. La definizione di questo nuovo simbolo si può dunque esprimere così:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdot & \cdot & \cdot & a_n \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdot & \cdot & \cdot & b_n \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdot & \cdot & \cdot & c_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_1 & u_2 & u_3 & \cdot & \cdot & \cdot & u_n \end{vmatrix} = \sum \pm a_{i_1} b_{i_2} c_{i_3} \ldots u_{i_n} \tag{5}$$

dove ogni termine della somma che sta nel secondo membro, dovrà prendersi col segno + o — secondochè per $i_1, i_2, i_3, \ldots, i_n$ si prenda una permutazione di classe pari, ovvero di classe dispari.

Secondo questa definizione si avrà ad esempio:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 \quad , \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 8 = -10 \tag{6}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_2 b_1 c_3 \tag{7}$$

ecc.

411. I due ultimi esempi sono già sufficienti a mostrare l'importanza della nozione di determinante per quanto riguarda la risoluzione dei problemi di primo grado. Se si considerino infatti le due equazioni simultanee:

$$a_1 x + a_2 y = \alpha \quad , \quad b_1 x + b_2 y = \beta$$

e si risolvano con uno degli ordinari metodi elementari, si troverà:

$$x = \frac{\alpha b_2 - \beta a_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & a_2 \\ \beta & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}} \quad , \quad y = \frac{\beta a_1 - \alpha b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & \alpha \\ b_1 & \beta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

Così pure dal sistema di tre equazioni:

$$a_1 x + a_2 y = a_3 z = \alpha \;,\; b_1 x + b_2 y + b_3 z = \beta \;,\; c_1 x + c_2 y + c_3 z = \gamma$$

si dedurrebbe che:

$$x = \frac{\alpha b_2 c_3 + a_2 b_3 \gamma + a_3 \beta c_2 - \alpha b_3 c_2 - a_3 b_2 \gamma - a_2 \beta c_3}{a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_2 b_1 c_3}$$

dove la frazione nel secondo membro ha per denominatore appunto il determinante (7) e per numeratore un determinante affatto analogo, colle α, β, γ in luogo delle a_1, b_1, c_1; similmente per y e z.

412. Delle due diagonali della matrice quadrata del determinante (5) si chiama *prima diagonale* o *diagonale principale* quella che passa per gli elementi $a_1, b_2, c_3, \ldots, u_n$ e *seconda diagonale* l'altra. In corrispondenza a ciò si chiama *termine principale* del determinante quello formato dal prodotto degli elementi della diagonale principale, cioè il prodotto:

$$a_1 b_2 c_3 \ldots u_n$$

che dovrà prendersi sempre col segno +, poichè gli indici 1, 2, 3, ..., n non formano alcuna inversione.

Si vede che, per fare lo *sviluppo* del determinante (5), cioè per scrivere gli $\lfloor n$ termini di cui si compone, si può cominciare dallo scrivere dapprima il termine principale $a_1 b_2 c_3 \ldots u_n$ e dedurre quindi da questo tutti gli altri termini lasciando ferme le lettere $a, b, c, \ldots, u$ e permutando gli indici $1, 2, 3, \ldots, n$ in tutti gli $\lfloor n$ modi possibili, coll'avvertenza di prendere ogni volta il termine ottenuto col segno + o — secondochè la permutazione formata dai suoi indici risulti di classe pari ovvero di classe dispari.

413. In molti casi, specialmente per la dimostrazione di certi teoremi, è più comodo, anzichè partire dalla notazione (2) della matrice quadrata, di partire invece dalla notazione (1). Si avrà allora, analogamente alla (5):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum \pm a_{1,i_1} a_{2,i_2} a_{3,i_3} \ldots a_{n,i_n} \qquad (8)$$

In un termine qualunque:

$$\pm a_{1,i_1} a_{2,i_2} a_{3,i_3} \ldots a_{n,i_n} \qquad (9)$$

si hanno ora due permutazioni di indici, cioè quella formata dai primi indici e quella formata dai secondi indici. La prima è sempre $1, 2, 3, \ldots, n$, cioè segue l'ordine naturale e non contiene inversioni. La seconda $i_1, i_2, i_3, \ldots, i_n$ può contenere inversioni, ed a seconda che il numero di tali inversioni sia pari o dispari, si dovrà poi preporre al termine il segno + o —.

414. Se in un prodotto qualunque:

$$a_{1,i_1}a_{2,i_2}a_{3,i_3}\ldots a_{n,i_n} \tag{10}$$

contenente un elemento di ogni linea ed un elemento di ogni colonna del determinante (8) si scambino fra loro due fattori qualunque, il che non altera il valore del prodotto, cioè si scriva p. es.:

$$a_{2,i_2}a_{1,i_1}a_{3,i_3}\ldots a_{n,i_n},$$

la permutazione dei primi indici, che non aveva inversioni, acquisterà un certo numero dispari di inversioni (art. 213). E similmente la permutazione dei secondi indici acquisterà oppure perderà un numero dispari di inversioni.

Di qui segue che la somma complessiva delle inversioni che si trovano nelle due permutazioni potrà bensì variare, ma soltanto di un numero pari.

Se dunque per mezzo di scambi di fattori si alteri in un modo qualunque l'ordine dei fattori del prodotto (10), cosicchè esso prenda la forma:

$$a_{\varepsilon_1,j_1}a_{\varepsilon_2,j_2}a_{\varepsilon_3,j_3}\ldots a_{\varepsilon_n,j_n}, \tag{11}$$

la somma complessiva delle inversioni contenute nelle due permutazioni:

$$\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\ldots\varepsilon_n \quad \text{ed} \quad j_1j_2j_3\ldots j_n$$

sarà ancora pari o dispari, secondochè era pari o dispari la somma delle inversioni contenute nelle due permutazioni primitive:

$$1, 2, 3, \ldots, n \quad \text{ed} \quad i_1, i_2, i_3, \ldots, i_n.$$

Segue da ciò che *per calcolare il segno che compete ad un prodotto qualunque*:

$$a_{\varepsilon_1,j_1}a_{\varepsilon_2,j_2}a_{\varepsilon_3,j_3}\ldots a_{\varepsilon_n,j_n}$$

contenente un elemento di ogni verticale ed un elemento di ogni orizzontale, si potrà tenere a piacere l'una o l'altra delle due regole seguenti:

1.°) *Si cambi l'ordine dei fattori in modo che i primi indici* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ *vengano a disporsi secondo l'ordine naturale crescente e si prenda poi il prodotto col segno + o — secondochè la permutazione dei secondi indici riesca di classe pari o dispari.*

2.°) *Si lasci pure fermo l'ordine dei fattori. Allora però si prenderà il prodotto col segno + o — secondochè sia pari o dispari la somma complessiva delle inversioni contenute nelle due permutazioni* $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\ldots\varepsilon_n$ *ed* $j_1j_2j_3\ldots j_n$.

Questo secondo modo di stabilire il segno di ogni termine del determinante mette meglio in evidenza che la definizione del segno è perfettamente simmetrica rispetto alle linee orizzontali e verticali.

415. Scriviamo il determinante colla notazione (1):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (\alpha)$$

Due elementi della matrice, che hanno gli stessi indici ma in ordine inverso, si dicono *coniugati*. Così p. es.: a_{12} è coniugato con a_{21}, a_{34} con a_{43} e in generale a_{ji} con a_{ij}. Gli elementi della diagonale principale sono coniugati con sè stessi.

Gli elementi coniugati, come si vede dalla matrice, sono situati simmetricamente rispetto alla diagonale principale; cosicchè, se si facesse ruotare il piano della matrice intorno alla diagonale principale di 180°, ogni elemento prenderebbe il posto del suo coniugato, nel mentre che le orizzontali prenderebbero il posto delle verticali e reciprocamente.

Il nuovo determinante così ottenuto sarebbe:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \cdots & a_{n2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{n3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (\beta)$$

ed io dico che il suo valore è lo stesso di quello del determinante primitivo (α). Consideriamo infatti un termine qualunque:

$$\pm a_{r_1\rho_1} a_{r_2\rho_2} a_{r_3\rho_3} \dots a_{r_n\rho_n} \qquad (\gamma)$$

del determinante (α). È chiaro che, fatta astrazione dal segno, esso si troverà anche nel determinante (β) e reciprocamente, poichè esso contiene un elemento, ed uno solo, di ogni verticale e di ogni orizzontale di (β).

Ma il segno sarà anche lo stesso nei due determinanti. Infatti per avere il segno di questo termine in (α), si debbono esaminare le due permutazioni:

$$r_1\, r_2\, r_3 \dots r_n \quad \text{e} \quad \rho_1\, \rho_2\, \rho_3 \dots \rho_n$$

e vedere se la somma delle inversioni in entrambe sia pari o dispari. Per avere invece il segno di questo stesso termine nel determinante (β), dobbiamo riflettere che i fattori:

$$a_{r_1\rho_1},\ a_{r_2\rho_2},\ a_{r_3\rho_3},\ \dots,\ a_{r_n\rho_n}$$

che compongono il prodotto (γ), occupano nel determinante (β) i posti coniugati di quelli che occupavano prima, cioè i posti:

$$(\rho_1, r_1),\ (\rho_2, r_2),\ \dots,\ (\rho_n, r_n).$$

Ma quì le permutazioni degli indici sono:

$$\rho_1 \rho_2 \rho_3 \ldots \rho_n \quad \text{ed} \quad r_1 r_2 r_3 \ldots r_n$$

cioè le stesse due permutazioni di poco fa, cosicchè anche la somma delle inversioni in entrambe sarà la stessa, onde resterà lo stesso anche il segno.

Si ha dunque il seguente teorema: *il valore di un determinante non si altera se si cambiano in esso ordinatamente le righe nelle colonne e le colonne nelle righe.*

Esercizi.

1. Verificare p. es. che:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

2. Dimostrare che il segno del termine, di un determinante di ordine n, formato cogli elementi della seconda diagonale sarà + o — secondochè il numero $\frac{n(n-1)}{2}$ sia pari o dispari.

3. Dimostrare che un determinante non cambia neanche di segno, se esso si fa ruotare di 180° intorno alla sua seconda diagonale.

4. Il segno con cui va preso il termine $a_{r_1\rho_1} a_{r_2\rho_2} \ldots a_{r_n\rho_n}$, nello sviluppo del determinante di ordine n, è uguale a $(-1)^{n+\lambda}$, dove λ indica il numero delle sostituzioni circolari nelle quali si decompone la sostituzione $\begin{pmatrix} \rho_1 \rho_2 \rho_3 \ldots \rho_n \\ r_1 r_2 r_3 \ldots r_n \end{pmatrix}$.

§ 2.° — Proprietà fondamentali dei determinanti.

416. *Se in un determinante si scambiano fra loro due linee parallele (verticali od orizzontali), il valore del determinante cambia di segno.*

Cioè sarà, scambiando p. es. le colonne di posto h e k:

$$\begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1h} \ldots a_{1k} \ldots a_{1n} \\ a_{21} \ldots a_{2h} \ldots a_{2k} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \ldots a_{nh} \ldots a_{nk} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1k} \ldots a_{1h} \ldots a_{1n} \\ a_{21} \ldots a_{2k} \ldots a_{2h} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \ldots a_{nk} \ldots a_{nh} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

È evidente che, prescindendo dal segno, i termini del primo determinante sono gli stessi del secondo.

In quanto al segno, consideriamo un termine qualunque del primo:

$$\pm a_{1,r_1} a_{2,r_2} a_{3,r_3} \ldots a_{n,r_n} \qquad (\alpha)$$

il cui segno sarà + o — secondochè sia di classe pari o dispari

la permutazione dei secondi indici:

$$r_1\, r_2\, r_3 \ldots r_n$$

che scriveremo come segue:

$$\mathrm{A}h\mathrm{B}k\mathrm{C} \qquad (\beta)$$

mettendo in evidenza i due indici h e k.

Nel secondo determinante gli elementi $a_{1,r_1}, a_{2,r_2} \ldots$ che compongono il prodotto (α), occupano dei posti i cui primi indici sono rispettivamente ancora 1, 2, 3, ..., n nel mentre che i secondi indici saranno invece quelli della permutazione:

$$\mathrm{A}k\mathrm{B}h\mathrm{C}$$

la quale, differendo dalla (β) per lo scambio di due elementi, sarà di classe opposta a quella della (β) (art. 213). Dunque lo stesso termine (α) si presenterà nel secondo determinante con segno opposto a quello che aveva nel primo; cioè il secondo determinante ha tutti i suoi termini di segno opposto a quelli corrispondenti del primo, c. d. d.

Corollario. — *Se in un determinante due linee parallele (verticali od orizzontali) sono eguali, il valore del determinante è nullo.*

Difatti, se nel determinante Δ si scambiano fra loro le due linee parallele uguali, esso cambierà di segno pel teorema precedente. D'altra parte, la matrice essendo restata identicamente la stessa, il suo valore non può aver cambiato. Sarà dunque $\Delta = -\Delta$, onde $2\Delta = 0$, cioè appunto $\Delta = 0$.

417. *Se in un determinante si moltiplicano tutti gli elementi di una linea (verticale od orizzontale) per uno stesso numero, il valore del determinante si troverà pure moltiplicato per quel numero.*

Infatti ogni termine del determinante contiene almeno un elemento di quella linea ed uno soltanto; perciò dopo aver moltiplicati gli elementi di quella linea per uno stesso numero, ogni termine del determinante conterrà come fattore uno ed un solo elemento di quella linea moltiplicato per quel numero, epperò l'intero termine verrà ad essere moltiplicato una volta per il numero stesso.

Così sarà ad esempio:

$$\begin{vmatrix} a_1 & pb_1 & c_1 \\ a_2 & pb_2 & c_2 \\ a_3 & pb_3 & c_3 \end{vmatrix} = p \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Corollario. — *Un determinante è nullo quando gli elementi di una linea sono equimultipli degli elementi corrispondenti di una linea parallela.*

Infatti ponendo fuori del determinante il fattore di multiplicità comune a tutti gli elementi di quella linea, il nuovo determinante avrà due linee parallele uguali, onde sarà nullo (art. 416).

Così ad esempio, si ha:

$$\begin{vmatrix} 1 & 10 & 5 \\ 3 & -8 & -4 \\ 4 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2.5 & 5 \\ 3 & 2.(-4) & -4 \\ 4 & 2.2 & 2 \end{vmatrix} = 2. \begin{vmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 3 & -4 & -4 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

418. *Se gli elementi di una stessa linea si riguardano decomposti in un egual numero* p *di parti* (*polinomi di* p *termini*), *il determinante si può esprimere come la somma di* p *determinanti che si ottengono successivamente dal determinante dato sostituendo in luogo di ogni polinomio una volta il solo primo termine, una volta il secondo termine,* ecc.

Così ad esempio, si avrà:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \alpha_1+\beta_1+\gamma_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & \alpha_2+\beta_2+\gamma_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & \alpha_3+\beta_3+\gamma_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & \alpha_4+\beta_4+\gamma_4 & c_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \alpha_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & \alpha_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & \alpha_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & \alpha_4 & c_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \beta_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & \beta_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & \beta_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & \beta_4 & c_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \gamma_1 & e_1 \\ a_2 & b_2 & \gamma_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & \gamma_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & \gamma_4 & c_4 \end{vmatrix}$$

Per persuadersi di ciò, basta riflettere che ogni termine del determinante del primo membro è precisamente uguale alla somma dei tre termini *omologhi* dei tre determinanti del secondo membro, cioè p. es. $a_1 \cdot b_2 \cdot (\alpha_3+\beta_3+\gamma_3)\ c_4 = a_1 b_2 \alpha_3 c_4 + a_1 b_2 \beta_3 c_4 + a_1 b_2 \gamma_3 c_4$, cosicchè il termine principale del determinante del primo membro è la somma dei termini principali dei determinanti del secondo; e similmente per ogni altro termine.

419. *Un determinante conserva il suo valore, se agli elementi di una sua linea si aggiungano gli elementi corrispondenti di una linea parallela, anche moltiplicati per un fattore comune.*

Cioè si avrà ad esempio:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & e_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 & e_4 \\ a_5 & b_5 & c_5 & d_5 & e_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1+\mu d_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ a_2 & b_2+\mu d_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ a_3 & b_3+\mu d_3 & c_3 & d_3 & e_3 \\ a_4 & b_4+\mu d_4 & c_4 & d_4 & e_4 \\ a_5 & b_5+\mu d_5 & c_5 & d_5 & e_5 \end{vmatrix}$$

Infatti, per il teorema precedente, il determinante del secondo membro è uguale alla somma dei due determinanti:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & e_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 & e_4 \\ a_5 & b_5 & c_5 & d_5 & e_5 \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad \mu \cdot \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 & d_3 & e_3 \\ a_4 & d_4 & c_4 & d_4 & e_4 \\ a_5 & d_5 & c_5 & d_5 & e_5 \end{vmatrix}$$

dei quali il primo è appunto lo stesso determinante del primo membro ed il secondo è nullo avendo due colonne uguali.

Esercizi.

1. Verificare che:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{3} & 4 \\ 4 & 4 & 6 & 0 \\ -1 & \frac{5}{2} & \frac{2}{5} & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2.3.5} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 9 & 1 & 12 \\ 4 & 8 & 6 & 0 \\ -5 & 25 & 2 & 10 \end{vmatrix}$$

senza sviluppare i determinanti.

2. Dimostrare, senza fare sviluppi, che:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \alpha \\ 2 & 3 & 4 & \beta \\ 3 & 4 & 5 & \gamma \\ 4 & 5 & 6 & \delta \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta & \beta^2 \\ 2\alpha & \alpha + \beta & 2\beta \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (\alpha - \beta)^3.$$

3. Dimostrare che:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & 0 & 0 \\ \gamma & \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = (\alpha\delta - \beta\gamma)(ad - bc).$$

4 Trasformare, per mezzo del teorema dell' art. 419, un determinante dato in modo che riescano uguali a zero tutti gli elementi in una stessa linea, ad eccezione, al più, di un solo elemento.

§ 3.° — Aggiunti di un determinante.

420. Se immaginiamo fatto lo sviluppo del determinante generale:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1}$$

e consideriamo fra gli $\underline{|n}$ termini dello sviluppo quelli che contengono come fattore un certo elemento a_{ij}, e mettendo poi in evidenza questo fattore comune rappresentiamo la somma di questi ultimi termini sotto la forma $a_{ij} \cdot A_{ij}$, la quantità A_{ij} dicesi l' *aggiunto* dell' elemento a_{ij}.

Così, p es. nello sviluppo del determinante:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

si hanno due soli termini che contengono l'elemento c_2 cioè:

$$a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2$$

il che può anche scriversi, raccogliendo il fattore c_2,

$$(a_3b_1 - a_1b_3)c_2$$

onde $(a_3b_1 - a_1b_3)$ sarà l'aggiunto dell'elemento c_2.

421. Ora noi ci proponiamo dimostrare che *l'aggiunto* A_{ij} *dell'elemento* a_{ij} *è uguale al determinante* (*di ordine* n—1) *che si ottiene dal determinante dato* (1) *sopprimendone la* i^{ma} *orizzontale e la* j^{ma} *verticale, coll'avvertenza però di premettere poi a questo determinante il segno* + *o* — *secondochè la somma* i + j *sia pari o dispari.*

Questo teorema è quasi evidente per il caso semplicissimo in cui l'elemento a_{ij}, di cui si cerca l'aggiunto, sia proprio il primo elemento a_{11} del determinante. Infatti quei termini del determinante (1) che contengono a_{11}, non potendo più contenere come fattori altri elementi della prima verticale ed orizzontale, si comporranno evidentemente, fatta astrazione dai segni, dell'elemento a_{11} moltiplicato per i termini del determinante di ordine n—1:

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (2)$$

che si deduce dal dato cancellandone la prima orizzontale e la prima verticale. Ma anche nei segni ci sarà perfetta coincidenza, perchè un termine qualunque:

$$a_{2\gamma_2}\, a_{3\gamma_3} \dots a_{n\gamma_n}$$

del determinante (2) avrà evidentemente nella seconda permutazione dei suoi indici le stesse inversioni che si riscontrano nel termine completo corrispondente:

$$a_{11} \cdot a_{2\gamma_2}\, a_{3\gamma_3} \dots a_{n\gamma_n}$$

del determinante (1); giacchè gli indici 1 trovandosi qui al primo posto non possono fare inversione con alcuno dei consecutivi.

Resta così dimostrato che:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Consideriamo ora il caso generale in cui si voglia l'aggiunto di un elemento qualunque a_{ij}. Noi ridurremo questo caso al precedente eseguendo nel determinante dato degli scambi di linee

parallele tali da portare l'elemento a_{ij} al primo posto, poichè sappiamo (art. 416) che lo scambio di due linee parallele non altera che il segno del determinante, onde un numero qualunque di scambi di due linee parallele lascerà inalterato il valore del determinante ovvero ne cambierà soltanto il segno, secondochè il numero complessivo di tali scambi sia pari o dispari.

Pertanto noi potremo scambiare la i^{ma} linea orizzontale successivamente con ciascuna delle $i-1$ orizzontali precedenti, con che avremo portato l'elemento a_{ij} sulla prima linea orizzontale ed avremo:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \ldots a_{i-1,n} \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \ldots a_{i,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i-1} \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \ldots a_{in} \\ a_{11} & a_{12} & \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \ldots a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \ldots a_{i+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

Permutando in seguito la j^{ma} colonna con ciascuna delle $j-1$ precedenti, con che si altererà di nuovo il determinante di $(-1)^{j-1}$, l'elemento a_{ij} verrà appunto a trovarsi al primo posto, ed allora l'aggiunto si troverà, come nel caso precedente, cancellando la prima linea e la prima colonna.

Intanto, poichè, fatta astrazione dalla i^{ma} orizzontale e dalla j^{ma} verticale, le altre linee e colonne hanno conservato lo stesso ordine primitivo di successione, è chiaro che nella pratica non occorrerà eseguire prima gli scambi di linee parallele di cui si è detto sopra, ma basterà cancellare addirittura nel determinante dato le due linee che si incrociano nell'elemento a_{ij}. Prendendo il determinante di ordine $n-1$, che così si ottiene, col segno $(-1)^{i-1}.(-1)^{j-1}$, cioè col segno $(-1)^{i+j}$, si avrà appunto l'aggiunto cercato dell'elemento a_{ij}.

Es. Cancellando nel determinante:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ --b_1-- & b_2-- & (b_3) & --b_4-- \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}$$

la seconda orizzontale e la terza verticale, che si incrociano nell'elemento b_3, il quale occupa il posto (2, 3), resta il determinante:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_4 \\ c_1 & c_2 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_4 \end{vmatrix}$$

che preso col segno $(-1)^{2+3}$, cioè col segno $-$, sarà l'aggiunto dell'elemento b_3.

422. I determinanti che si ottengono da un determinante dato cancellandone una linea orizzontale ed una verticale, si dicono determinanti *minori* di ordine $n-1$. Essi sono tanti quanti sono gli elementi del determinante cioè n^2, e noi chiameremo determinante minore *complementare* dell'elemento a_{ij} quello che si ottiene dal determinante primitivo cancellandone le due linee che s'incrociano in questo elemento a_{ij}. Cosicchè, confrontando col risultato dell'articolo prec., potremo dire che *l'aggiunto di un dato elemento* a_{ij} *altro non è che il suo determinante minore complementare, preso però col segno* $(-1)^{i+j}$.

Poichè i numeri:

$$i+1\,,\, i+2\,,\, i+3\,,\, \ldots\,,\, i+n$$

sono alternativamente pari e dispari, o viceversa, si vede facilmente che *gli aggiunti degli elementi di una stessa linea* i^{ma} *saranno eguali ai loro determinanti minori complementari, presi alternativamente col segno* $+$ *o* $-$ (*cominciando col segno* $+$ *se* i *è dispari, e viceversa se* i *è pari*).

423. *Il valore di un determinante è uguale alla somma degli elementi di una stessa linea* (*che potrà scegliersi a piacere fra le verticali o fra le orizzontali*) *moltiplicati per i rispettivi aggiunti.* In altri termini se

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ . & . & . \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

è un determinante di ordine n, e si indichi con A_{ij} l'aggiunto dell'elemento a_{ij}, si avrà:

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} \qquad (\alpha)$$

ed anche

$$\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}. \qquad (\beta)$$

Invero per dimostrare la (α) basta considerare che ogni termine del determinante Δ, non potendo contenere che un solo elemento della riga i^{ma} e dovendo sempre contenerne uno, i termini dello sviluppo di Δ si potranno dividere in n gruppi a seconda che essi contengono l'elemento a_{i1}, ovvero l'a_{i2}, ..., ovvero l'a_{in}. Ma, per ciò che precede, quella parte dello sviluppo del determinante che contiene a_{i1}, è data da a_{i1} moltiplicato pel suo aggiunto, cioè da $a_{i1}A_{i1}$, e similmente per le altre parti: onde si ha appunto la formola (α). In modo analogo si dimostra la (β) considerando che ogni termine del determinante deve contenere uno ed un solo elemento della colonna j^{ma}.

Per mezzo del teorema ora dimostrato il calcolo del valore di un determinante di ordine n si può ricondurre al calcolo di n de-

terminanti ciascuno dell'ordine $n-1$. Così p. es. se è dato il determinante di quart' ordine:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

sviluppandolo secondo gli elementi della 3ª linea orizzontale si ha:

$$\Delta = a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{34} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

ed ora si potrà far dipendere ogni determinate di terz'ordine da determinanti di 2º ordine, il cui valore si vede immediatamente.

424. *La somma degli elementi di una stessa linea di un determinante moltiplicati per gli aggiunti degli elementi corrispondenti di altra linea parallela è sempre uguale a zero.*

Cioè si avrà:

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \ldots + a_{in}A_{kn} = 0 \quad \text{per} \quad i \gtrless k \qquad (\alpha)'$$

come pure:

$$a_{1j}A_{1k} + a_{2j}A_{2k} + \ldots + a_{nj}A_{nk} = 0 \quad \text{per} \quad j \gtrless k. \qquad (\beta)'$$

Infatti pel teorema dell'articolo precedente si ha:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kn} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + \ldots + a_{kn}A_{kn}.$$

Se ora in questa eguaglianza, che ha luogo qualunque siano i valori degli elementi del determinante, prendiamo gli elementi a_{k1}, $a_{k2}, \ldots, a_{kn}$ eguali risp. agli elementi $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$, essa

diviene:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \dots + a_{in}A_{kn}$$

dove il determinante del primo membro è nullo, avendo due linee parallele uguali, onde si ha appunto la $(\alpha)'$. Similmente si dimostra ia $(\beta)'$ considerando che il primo membro di $(\beta)'$ altro non è che lo sviluppo del determinante dato secondo gli aggiunti della colonna k^{ma}, dopo aver posto però gli elementi della colonna k^{ma} eguali a quelli stessi della i^{ma}.

425. Il teorema ora dimostrato trova un' immediata ed importante applicazione nella risoluzione di un sistema di n equazioni di 1.° grado fra altrettante incognite $x_1, x_2, \dots, x_n$

Per sistema di n equazioni di 1.° grado (o, come anche si dice, *lineari*), fra n incognite $x_1, x_2, \dots, x_n$, s'intende (cfr. Cap. IV, § 13) un sistema di n equazioni ciascuna delle quali sia della forma:

$$\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \dots + \lambda x_n = p$$

dove le $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda, p$ sono numeri costanti dati, *coefficienti* dell'equazione, da considerarsi come conosciuti. Il problema corrispondente a queste equazioni consiste dunque nel cercare un sistema speciale di valori da darsi alle $x_1, x_2, \dots, x_n$, tali che le n equazioni siano tutte soddisfatte simultaneamente.

Indicando in generale con a_{ij} il coefficiente dell' incognita x_j nella i^{ma} equazione e con a_i il termine noto, che sta al secondo membro di questa stessa equazione, è chiaro che il sistema delle n equazioni date fra le n incognite prenderà la forma seguente:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= a_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n &= a_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n &= a_n \end{aligned} \tag{3}$$

e in corrispondenza ad esso si avrà un certo determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{4}$$

che si suol chiamare il *determinante dei coefficienti.*

426. Indicando, come sopra, con A_{ij} l'aggiunto di a_{ij} in questo determinante, moltiplichiamo ora le equazioni (3) risp. per A_{1k}, $A_{2k}, \ldots, A_{nk}$. Sommando poi membro a membro otteniamo:

$$\begin{aligned} & A_{1k}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1k}x_k + \ldots + a_{1n}x_n) \\ + & A_{2k}(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2k}x_k + \ldots + a_{2n}x_n) \\ + & \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ + & A_{nk}(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nk}x_k + \ldots + a_{nn}x_n) \\ = & A_{1k}\alpha_1 + A_{2k}\alpha_2 + A_{3k}\alpha_3 \ldots + A_{nk}\alpha_n \end{aligned}$$

ed anche, riunendo i termini che contengono una stessa incognita:

$$\begin{aligned} & (A_{1k}a_{11} + A_{2k}a_{21} + A_{3k}a_{31} + \ldots + A_{nk}a_{n1})\cdot x_1 \\ + & (A_{1k}a_{12} + A_{2k}a_{22} + A_{3k}a_{32} + \ldots + A_{nk}a_{n2})\cdot x_2 \\ + & \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ + & (A_{1k}a_{1k} + A_{2k}a_{2k} + A_{3k}a_{3k} + \ldots + A_{nk}a_{nk})\cdot x_k \\ + & \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ + & (A_{1k}a_{1n} + A_{2k}a_{2n} + A_{3k}a_{3n} + \ldots + A_{nk}a_{nn})\cdot x_n \\ = & A_{1k}\alpha_1 + A_{2k}\alpha_2 + A_{3k}\alpha_3 + \ldots + A_{nk}\alpha_n. \end{aligned} \tag{5}$$

Ma per il teorema dell' art. 424 (formola β') ciascheduna delle somme scritte fra parentesi nel primo membro è uguale a zero, ad eccezione della somma:

$$A_{1k}a_{1k} + A_{2k}a_{2k} + A_{3k}a_{3k} + \ldots + A_{nk}a_{nk}$$

la quale, componendosi degli elementi della colonna k^{ma} del determinante Δ moltiplicati proprio per gli aggiunti di questi stessi elementi, è uguale (art. 423) al valore del determinante Δ.

L' equazione (5) si riduce così alla seguente:

$$\Delta \cdot x_k = A_{1k}\alpha_1 + A_{2k}\alpha_2 + A_{3k}\alpha_3 + \ldots + A_{nk}\alpha_n. \tag{6}$$

427. Di equazioni analoghe alla (6) ne abbiamo n, che si deducono da questa dando a k successivamente i valori $1, 2, 3, \ldots n$. Pertanto, se il valore Δ del determinante del sistema sia diverso da zero, ci sarà lecito dividere queste equazioni per Δ e ne dedurremo:

$$x_k = \frac{A_{1k}\alpha_1 + A_{2k}\alpha_2 + \ldots + A_{nk}\alpha_n}{\Delta}. \tag{7}$$

Queste formole ci fanno conoscere i valori delle n incognite, poichè i secondi membri sono composti di quantità tutte conosciute. Esse ci dicono che per ogni incognita si avrà un unico possibile valore perfettamente determinato. E reciprocamente, se i valori così determinati per $x_1, x_2, \ldots, x_n$ si sostituiscono in una qualunque delle equazioni (3) del sistema proposto, è facile verificare, sempre applicando gli stessi teoremi ora invocati, che l' equazione sarà veramente soddisfatta. Dunque:

Se il determinante di un sistema di n *equazioni di primo grado fra* n *incognite ha valore diverso da zero, esiste sempre un sistema, ed un unico sistema, di valori delle incognite che soddisfa a tutte le equazioni.*

428. Osservando che il numeratore della (7) è lo sviluppo di un determinante che abbia la stessa matrice del determinante del sistema, in cui però agli elementi $a_{1k}, a_{2k}, \ldots, a_{nk}$ siansi sostituiti i numeri $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, si può conchiudere che:

Un'incognita qualunque di un sistema di n *equazioni di 1° grado ad* n *incognite, col determinante diverso da zero, è uguale ad una frazione che ha per denominatore il determinante del sistema e per numeratore il determinante che si ottiene sostituendo nel determinante del sistema alla colonna dei coefficienti dell'incognita, la colonna dei termini noti.*

Esempio. — Del sistema:

$$3x + 2y + 5z = 2$$
$$x - 7y + 4z = 0$$
$$9x + 2y + 3z = 1$$

il determinante è

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & -7 & 4 \\ 9 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Quindi si avrà:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 0 & -7 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \\ 9 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & -7 & 0 \\ 9 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{\Delta}.$$

429. Si indichi con Δ' il determinante:

$$\Delta' = \sum \pm A_{11}A_{22} \ldots A_{nn} \tag{8}$$

formato cogli aggiunti degli elementi del determinante:

$$\Delta = \sum \pm a_{11}a_{22} \ldots a_{nn}. \tag{9}$$

Considerando le n relazioni da noi dimostrate:

$$A_{11}a_{i1} + A_{12}a_{i2} + \ldots + A_{1n}a_{in} = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_{i1}a_{i1} + A_{i2}a_{i2} + \ldots + A_{in}a_{in} = \Delta$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_{n1}a_{i1} + A_{n2}a_{i2} + \ldots + A_{nn}a_{in} = 0$$

come n equazioni lineari fra n incognite soddisfatte dai valori

a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in} delle incognite, si trova subito, risolvendo queste equazioni rispetto all'incognita a_{ik} precisamente come all'articolo 425, l'importante relazione:

$$\Delta' \cdot a_{ik} = \Delta \cdot A'_{ik} \tag{10}$$

dove A'_{ik} è l'aggiunto di A_{ik} nel determinante Δ'.

430. Noi dimostreremo fra breve (§ 7.º) anche la relazione:

$$\Delta' = \Delta^{n-1}. \tag{11}$$

Pertanto alla relazione (10) si potrà anche dare la forma più semplice:

$$A'_{ik} = \Delta^{n-2} \cdot a_{ik} \tag{12}$$

Note ed Esercizi.

1. ***Se tutti gli elementi di un determinante che stanno da una stessa parte della diagonale principale sono nulli, il valore del determinante si riduce a quello del suo termine principale.***

Cioè, p. es.:

$$\begin{vmatrix} a & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & b & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & c & c_1 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = abcd.$$

2. Dimostrare che:

$$\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & a_3 \\ x & x & b_1 & b_2 \\ x & x & x & c_1 \\ x & x & x & x \end{vmatrix} = x(x-a_1)(x-b_1)(x-c_1).$$

3. Un determinante si dice *simmetrico* quando gli elementi conjugati sono eguali due a due ($a_{ij} = a_{ji}$).

Dimostrare che in un determinante simmetrico anche gli aggiunti di due elementi conjugati sono uguali.

4. Sia un determinante di ordine n con tutti gli elementi eguali all'unità ad eccezione di quelli della prima diagonale, e questi siano $1 + a_1$, $1 + a_2$, ..., $1 + a_n$; il valore di questo determinante è:

$$a_1 a_2 \ldots a_n \left\{ 1 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} \right\}.$$

5. Risolvere il sistema di equazioni:

$$\frac{a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1}{\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + \delta_1} = A_1$$

$$\frac{a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2}{\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z + \delta_2} = A_2$$

$$\frac{a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3}{\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z + \delta_3} = A_3$$

rispetto alle tre incognite x, y, z.

6. È assai utile, in molte questioni, di considerare, in luogo dell'*aggiunto* dell'elemento a_{ik} nel determinante:

$$\Delta = \Sigma \pm a_{11} a_{22} \dots a_{nn},$$

da noi indicato con A_{ik}, il quoto:

$$\alpha_{ik} = \frac{A_{ik}}{\Delta}$$

che si chiamerà invece l'elemento *reciproco* dell'elemento a_{ik}.

I determinanti:

$$\Delta' = \sum \pm A_{11} A_{22} \dots A_{nn} \quad \text{e} \quad \Delta = \sum \pm \alpha_{11} \alpha_{22} \dots \alpha_{nn}$$

si chiameranno rispettivamente il *determinante aggiunto* e il *determinante reciproco* del determinante Δ.

7. Riconoscere, per mezzo delle formole (10) ed (11) dell'art. 429:

1°) che *l'elemento reciproco dell'elemento reciproco di* a_{ik} *è lo stesso elemento* a_{ik}.

2°) che *il valore del determinante reciproco di* Δ *è precisamente il valore reciproco del valore di* Δ, cioè $\frac{1}{\Delta}$.

§ 4.° — Sistema di n equazioni lineari ed omogenee fra n incognite.

431. Un'equazione di 1° grado si dice omogenea quando manca del termine noto; cosicchè un sistema di n equazioni omogenee fra le n incognite $x_1, x_2, \dots, x_n$ sarà della forma:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \dots \dots \dots \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Indicando, come nel § prec., con Δ il valore del determinante dei coefficienti

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{2}$$

e con A_{ij} in generale l'aggiunto dell'elemento a_{ij} in questo determinante, la formola generale (art. 426):

$$\Delta \cdot x_k = \alpha_1 A_{1k} + \alpha_2 A_{2k} + \dots + \alpha_n A_{nk}$$

si riduce ora a

$$\Delta \cdot x_k = 0$$

poichè i termini noti $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sono per supposto tutti eguali a zero.

Si avranno dunque le uguaglianze

$$\Delta \cdot x_1 = 0, \qquad \Delta \cdot x_2 = 0 \ , \ldots , \ \Delta \cdot x_n = 0.$$

dalle quali si vede che, se il fattore Δ è diverso da zero, queste uguaglianze non possono essere soddisfatte se non quando si abbia contemporaneamente

$$x_1 = 0 \ , \ x_2 = 0 \ , \ldots , \ x_n = 0.$$

Dunque: *un sistema di* n *equazioni lineari omogenee fra* n *incognite col determinante diverso da zero non si può soddisfare in alcun modo, tranne che prendendo tutte le incognite uguali a zero.* In quest' ultimo modo poi tutte le equazioni resteranno evidentemente soddisfatte.

432. Corollario: *Affinchè un sistema di* n *equazioni lineari omogenee fra* n *incognite possa essere risoluto mediante un sistema di valori dell' incognite che non siano tutti nulli, è necessario che sia eguale a zero il determinante dei coefficienti.*

Vedremo in seguito che questa condizione è anche *sufficiente.* Cioè che, se $\Delta = 0$, esisterà sempre un sistema di valori delle x_1, x_2, ..., x_n, dei qualialmeno uno sia diverso da zero, che soddisfano a tutte le equazioni proposte.

433. Supponiamo dunque che il sistema proposto (1) soddisfi alla condizione $\Delta = 0$; e proponiamoci di cercare se e quali sistemi di valori non tutti nulli delle incognite possano soddisfare a tutte le equazioni. Intanto giova osservare che, se certi valori x_1, x_2, ..., x_n soddisfano al sistema (1), anche i valori px_1', px_2, ..., px_n vi soddisfano del pari, qualunque sia il moltiplicatore comune p, poichè se si ha

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = 0,$$

moltiplicando per p primo e secondo membro, se ne deduce appunto

$$a_{i1} \cdot px_1 + a_{i2} \cdot px_2 + \ldots + a_{in} \cdot px_n = 0.$$

Si vede dunque che, se esiste un certo sistema di valori, non tutti eguali a zero, delle x_1, x_2, ..., x_n soddisfacenti alle n equazioni proposte, ne esisteranno di tali sistemi in numero infinito; cioè se si prenda:

$$y_1 : y_2 : y_3 : \ldots : y_n = x_1 : x_2 : x_3 : \ldots : x_n \ ,$$

anche il sistema delle y soddisferà parimente le n equazioni.

434. Ciò premesso, essendo per supposto $\Delta = 0$, io dico che per avere un sistema di soluzioni delle (1), basterà prendere per le x_1, x_2, ..., x_n delle quantità eguali rispettivamente (o proporzionali secondo un moltiplicatore arbitrario p), agli aggiunti degli elementi di una linea orizzontale scelta a piacere. Si prenda infatti:

$$x_1 = A_{i1} \ , \ x_2 = A_{i2} \ , \ x_3 = A_{i3} \ , \ldots , \ x_n = A_{in}. \qquad (3)$$

Per verificare che questi valori soddisfano al sistema di equazioni proposto, basta verificare che essi soddisfano ad una qualunque delle equazioni (1), cioè che si ha, provando per es. la k^{ma} equazione,

$$a_{k1}A_{i1} + a_{k2}A_{i2} + \ldots + a_{kn}A_{in} = 0. \tag{4}$$

Ora infatti per $k \gtrless i$ il primo membro di quest'equazione è certamente nullo, essendo eguale alla somma degli elementi di una linea del determinante Δ moltiplicati risp. per gli elementi corrispondenti di un'altra linea parallela (art. 424). Se poi $h = i$, si ha (art. 423):

$$a_{k1}A_{i1} + a_{k2}A_{i2} + a_{k3}A_{i3} + \ldots + a_{kn}A_{in} = \Delta$$

onde, essendo per supposlo $\Delta = 0$, la (4) resta verificata anche in questo caso.

I valori (3) soddisfano dunque al problema; e se esiste per il determinante dato Δ, come supporremo per semplicità in questo §, almeno un aggiunto diverso da zero, almeno uno dei sistemi (3) darà per le incognite dei valori non tutti nulli.

435. È importante di notare che, nella ipotesi fatta, i *rapporti* delle incognite x_1, x_2, ... x_n soddisfacenti alle (1) non si possono determinare che in *un unico modo*. Infatti per il supposto possiamo ritenere che si abbia

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,n-1} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \ldots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix} \gtrless 0 \tag{5}$$

poichè, se l' aggiunto dell'ultimo coefficiente $a_{n,n}$ fosse uguale a zero, basterebbe cambiare l'ordine secondo cui sono scritte le equazioni (1) e l'ordine con cui in ogni equazione sono disposte le n incognite in modo che come ultimo coefficiente si avesse uno di quegli elementi (che certamente esistono nel determinante (2)) i cui aggiunti non sono nulli. Ciò pòsto, se nelle prime $n-1$ equazioni del sistema (1) portiamo gli ultimi termini al secondo membro e dividiamo quindi per x_n, esse prendono la forma seguente:

$$\begin{aligned} a_{11}\left(\frac{x_1}{x_n}\right) + a_{12}\left(\frac{x_2}{x_n}\right) + \ldots + a_{1,n-1}\left(\frac{x_{n-1}}{x_n}\right) &= -a_{1,n} \\ a_{21}\left(\frac{x_1}{x_n}\right) + a_{22}\left(\frac{x_2}{x_n}\right) + \ldots + a_{2,n-1}\left(\frac{x_{n-1}}{x_n}\right) &= -a_{2,n} \\ \ldots\ldots ; \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{n-1,1}\left(\frac{x_1}{x_n}\right) + \ldots + a_{n-1,2}\left(\frac{x_2}{x_n}\right) + \ldots a_{n-1,n-1}\left(\frac{x_{n-1}}{x_n}\right) &= -a_{n-1,n}. \end{aligned} \tag{6}$$

È questo un sistema di $n-1$ equazioni lineari fra $n-1$ inco-

gnite, riguardando cioè come incognite gli $n-1$ rapporti $\frac{x_1}{x_n}$, $\frac{x_2}{x_n}$, ..., $\frac{x_{n-1}}{x_n}$; e questo sistema non si potrà risolvere che in unico modo (art. 427), poichè il determinante delle incognite, che è appunto il determinante (5), è diverso da zero. I rapporti $x_1 : x_2 : ... : x_n$ che soddisfano al sistema (1), non possono dunque avere che un sistema unico di valori.

436. Di qui segue come corollario un teorema importante. Invero si era visto che i valori dati dalle (3):

$$x_1 = A_{i1}\ ,\ x_2 = A_{i2}\ ,\ \dots\ ,\ x_n = A_{in}$$

soddisfano al sistema (1) comunque si scelga l'indice i. Per l'articolo precedente è dunque chiaro che fra gli n^2 aggiunti del determinante (2) debbono aver luogo le relazioni:

$$\begin{aligned} &A_{11} : A_{12} : A_{13} : \dots : A_{1n} = \\ &A_{21} : A_{22} : A_{23} : \dots : A_{2n} = \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &A_{n1} : A_{n2} : A_{n3} : \dots : A_{nn}. \end{aligned} \tag{7}$$

Resta così dimostrato il seguente teorema:

Se un determinante è uguale a zero, gli aggiunti degli elementi corrispondenti di due qualisivogliano linee parallele sono fra loro proporzionali.

437. *Il sistema di sole* n — 1 *equazioni lineari omogenee con* n *incognite si risolve in generale prendendo*

$$x_1 : x_2 : \dots : x_n = A_1 : - A_2 : A_3 : - A_4 : \dots : \pm A_n$$

dove A_i *è il determinante che si ottiene dalla matrice dei coefficienti del sistema cancellandone la* i^ma^ *colonna.*

Infatti, se si aggiunge alle n—1 equazioni date una prima equazione:

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = 0$$

che è soddisfatta identicamente, il sistema si presenterà come un caso particolare del sistema di n equazioni lineari omogenee con n incognite, ed avrà evidentemente il determinante nullo. Risolvendolo colla regola già data, cioè prendendo le incognite proporzionali agli aggiunti degli elementi della prima orizzontale nel determinante dei coefficienti, si avrà appunto la soluzione sopra indicata, che sarà quindi l'unica possibile, a meno che le A_1, A_2, ..., A_n siano tutte nulle.

Esempio. — Per risolvere il sistema:

$$\begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 &= 0 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 &= 0 \\ c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 &= 0, \end{aligned}$$

si prenderà: $x_1 : x_2 : x_3 : x_4 =$

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 & a_4 \\ b_2 & b_3 & b_4 \\ c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_4 \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Note ed Esercizi.

1. La geometria analitica offre abbondanti esempi di problemi algebrici nei quali viene *a priori* imposta alle incognite la condizione di avere valori *tutti finiti e non tutti nulli*. Così, ad esempio, se le ordinarie coordinate cartesiane X, Y di un punto del piano si pongano sotto la forma $X = x : z$, $Y = y : z$, ogni terna di numeri finiti $x : y : z$ (*coordinate cartesiane omogenee* del punto) rappresenterà un punto ben determinato del piano, a distanza finita ovvero all'infinito (*) secondochè sia z diverso da zero ovvero eguale a zero. *Va esclusa però, una volta per sempre, la terna* $0 : 0 : 0$, la quale non può rappresentare nulla di ben determinato.

Così ogni equazione

$$ux + vy + wz = 0$$

si considererà come rappresentante una retta, purchè i coefficienti $u : v : w$ (*coordinate omogenee* della retta) non sieno tutti nulli. Per $u = v = 0$ si avrà in particolare la *retta all'infinito*, poichè l'equazione $z = 0$ è evidentemente soddisfatta da tutte le terne $x : y : 0$.

2. Ciò posto, la condizione affinchè tre rette:

$$ax + by + cz = 0 \ , \ a'x + b'y + c'z = 0 \ , \ a''x + b''y + c''z = 0$$

s'incontrino almeno in un punto, equivarrà evidentemente all'altra che queste equazioni siano soddisfatte almeno da una terna di valori finiti e non tutti nulli delle $x : y : z$; onde tale condizione sarà espressa (art. 432) da

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0.$$

3. Così pure, la condizione perchè tre punti $x' : y' : z'$, $x'' : y'' : z''$, $x''' . y''' : z'''$ siano su una stessa retta ($ax + by + cz = 0$), equivale a quella che le tre equazioni:

$$ax' + by' + cz' = 0 \ , \ ax'' + by'' + cz'' = 0 \ , \ ax''' + by''' + cz''' = 0$$

possano coesistere per valori finiti e non tutti nulli di $a : b : c$.

Si trova dunque come condizione

$$\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} = 0.$$

(*) Al punto all'infinito $r : s : 0$ si attribuisce, per convenzione, la proprietà geometrica di essere il punto d'incontro di tutte le rette parallele alla retta che ha per equazione $\frac{X}{Y} = \frac{r}{s}$.

4. Con raziocinio affatto analogo si proverà che la condizione necessaria e sufficiente affinchè i sei punti:

$$x_1 : x_2 : x_3 \ , \ y_1 : y_2 : y_3 \ , \ z_1 : z_2 : z_3 \ , \ t_1 : t_2 : t_3 \ , \ r_1 : r_2 : r_3 \ , \ s_1 : s_2 : s_3$$

siano su una stessa conica, è data da $K = 0$, essendo:

$$K = \begin{vmatrix} x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_2x_3 \\ y_1^2 & y_2^2 & y_3^2 & y_1y_2 & y_1y_3 & y_2y_3 \\ z_1^2 & z_2^2 & z_3^2 & z_1z_2 & z_1z_3 & z_2z_3 \\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 & t_1t_2 & t_1t_3 & t_2t_3 \\ r_1^2 & r_2^2 & r_3^2 & r_1r_2 & r_1r_3 & r_2r_3 \\ s_1^2 & s_2^2 & s_3^2 & s_1s_2 & s_1s_3 & s_2s_3 \end{vmatrix}$$

$$= (syr)(stz)(xyz(xtr) - (syz)(str)(xyr(xtz),$$

dove s'intende per brevità:

$$(syr) = \sum \pm s_1 y_2 r_3 \ , \text{ ecc.}$$

5. Trovare con procedimenti analoghi le condizioni affinchè quattro punti del piano siano in uno stesso cerchio, ovvero cinque punti dello spazio su una stessa sfera, e perchè 10 punti dello spazio siano su una stessa quadrica.

6. Dimostrare che pel sistema di equazioni:

$$(b + c)x + (c - a)y + (b - a)z = 0$$

$$(c - b)x + (c + a)y + (a - b)z = 0$$

$$(b - c)x + (a - c)y + (a + b)z = 0$$

le x, y, z devono essere tutte uguali a zero, se le a, b, c sono tutte diverse da zero.

§ 5.° — Risoluzione di un sistema qualunque di m equazioni lineari omogenee fra n incognite. Dipendenza e indipendenza delle equazioni e delle forme che le rappresentano.

438 Dovremmo ora esaminare il caso in cui tutti gli aggiunti A_{ij} siano eguali a zero.

Preferiamo però, per maggiore generalità, di ripigliare da capo la quistione considerando un sistema qualunque di m equazioni lineari omogenee fra n incognite $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Esso sarà della forma:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= 0. \end{aligned} \qquad (1)$$

Se indichiamo per brevità con $U_1, U_2, \ldots, U_m$ i primi mem-

bri di queste equazioni, cioè poniamo in generale:

$$U_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n\,, \tag{2}$$

il sistema delle m equazioni si potrà scrivere brevemente:

$$U_1 = 0\,;\; U_2 = 0\,, \ldots , U_m = 0. \tag{3}$$

Intanto al sistema (1) corrisponde una matrice quadrata o rettangolare (secondochè $m = n$ ovvero $m \gtrless n$) di coefficienti

$$\begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots a_{mn} \end{Bmatrix}. \tag{4}$$

Se ora k sia un numero non superiore nè ad m nè ad n e trascegliamo a piacere fra le colonne della matrice certe k colonne e similmente del pari a piacere fra le orizzontali della matrice certe k orizzontali, è chiaro che le colonne e linee orizzontali scelte si incrocieranno in k^2 punti, nei quali si troveranno altrettanti elementi della matrice disposti in modo da rappresentare una matrice quadrata di ordine k e quindi anche un certo determinante di ordine k. I determinanti così formati si dicono determinanti *minori* contenuti nella matrice proposta.

Così ad esempio nella matrice rettangolare

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 \\ b_1 & b_2 & \circled{b_3} & b_4 & \circled{b_5} & \circled{b_6} & b_7 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 & c_7 \\ d_1 & d_2 & \circled{d_3} & d_4 & \circled{d_5} & \circled{d_6} & d_7 \\ e_1 & e_2 & \circled{e_3} & e_4 & \circled{e_5} & \circled{e_6} & e_7 \end{matrix}$$

si trova contenuto il determinante minore di ordine 3

$$\begin{vmatrix} b_3 & b_5 & b_6 \\ d_3 & d_5 & d_6 \\ e_3 & e_5 & e_6 \end{vmatrix}$$

formato dagli elementi nei quali la seconda, quarta e quinta orizzontale incontrano la terza, quinta e sesta verticale. È faciie di riconoscere che questa matrice contiene 21 determinanti minori di ordine 5, che è il massimo ordine possibile. Quanto poi ai determinanti minori di ordine minimo possibile, cioè 1, ve ne sono 35, cioè tanti quanti sono gli elementi della matrice; giacchè un determitante minore di ordine 1 altro non è che un determinante di

un solo elemento come $|b_4|$, $|c_7|$, ... i cui valori coincidono coi valori stessi b_4, c_7, ., . degli elementi.

Ciò premesso, si chiamerà *caratteristica* della matrice (4) quel numero h che è uguale al massimo ordine di determinanti minori *diversi da zero* contenuti nella matrice. Così ad esempio la matrice rettangolare

$$\begin{matrix} 1 & -2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 0 & 7 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 11 & 7 \\ 3 & 6 & 3 & 18 & 9 \end{matrix}$$

ha per caratteristica 2, poichè i determinanti minori di quarto e terz' ordine contenuti in essa hanno tutti il valore zero (*), nel mentre che si trova poi un determinante minore di second' ordine (come p. es. il determinante $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$ formato dall' incontro della prime due verticali colle prime due orizzontali) il quale ha un valore diverso da zero.

439. Ciò posto, dato il sistema di eqnazioni (1), sia h la caratteristica della corrispondente matrice (4). Ciò significa che tutti i determinanti minori di ordine superiore ad h contenuti in questa matrice sono uguali a zero, nel mentre che esisterà poi almeno un determinante minore di ordine h, contenuto nella matrice, il quale abbia valore diverso da zero. Ora, senza nuocere alla generalità della questione, ci è sempre lecito di supporre che un determinante minore di ordine h diverso da zero si abbia appunto nell' incontro delle h orizzontali della matrice colle prime h verticali; poichè, se ciò non accadesse, basterebbe cambiare opportunamente l' ordine secondo il quale si sono scritte le m equazioni del sistema proposto (1) e cambiare del pari in modo conveniente l'ordine con cui figurano nelle (1) le successive incognite, potendosi così ottenere evidentemente che quelle h verticali ed orizzontali della matrice, che individuano un minore diverso da zero, prenda precisamente il posto delle prime h verticali ed orizzontali rispettivamente,

Ci è lecito dunque di ritenere che si abbia:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1h} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2h} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{h1} & a_{h2} & \cdots & a_{hh} \end{vmatrix} = R, \text{ con } R \gtrless 0. \tag{5}$$

(*) Come è facile persuadersene, anche senza calcolare effettivamente tutti questi determinanti, considerando che la terza orizzontale della matrice è uguale alla somma delle due precedenti e la quarta è uguale alla somma della seconda e della terza.

Detto ora i uno qualunque degli indici 1, 2, 3, ..., m, è facile riconoscere che è *identicamente*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1h} & U_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2h} & U_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{h1} & a_{h2} & a_{h3} & \dots & a_{hh} & U_h \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{ih} & U_i \end{vmatrix} = 0 \qquad (6)$$

cioè qualunque siano i valori che si attribuiscono alle variabili $x_1, x_2, \dots, x_n$ che entrano nella composizione delle funzioni intere di primo grado $U_1, U_2, \dots, U_h, U_i$.

Infatti, se $i \lesseqgtr h$, il determinante (6) avrà la sua ultima orizzontale uguale ad una delle precedenti e sarà quindi nullo (art. 416). Se poi $i > h$, sostituendo in luogo delle U le loro espressioni effettive (2), il determinante (6) prenderà la forma

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1h} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2h} & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{h1} & a_{h2} & \dots & a_{hh} & a_{h1}x_1 + a_{h2}x_2 + \dots + a_{hn}x_n \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ih} & a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \end{vmatrix}$$

e si potrà decomporre (art. 418) (corrispondentemente al fatto che gli elementi dell' ultima colonna sono polinomi di n termini) nella somma di n determinanti della forma:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1h} & a_{1\delta} \cdot x_\delta \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2h} & a_{2\delta} \cdot x_\delta \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{h1} & a_{h2} & \dots & a_{hh} & a_{h\delta} \cdot x_\delta \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ih} & a_{i\delta} \cdot x_\delta \end{vmatrix}, \quad \delta = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Ora ciascuno di questi determinanti è per sè stesso nullo, poichè, messo fuori del determinante il fattore comune x_δ, il determinante residuo avrà due colonne uguali se $\delta \lesseqgtr h$, e, se $\delta > h$, sarà un determinante minore di ordine $h + 1$ contenuto nella matrice (4) e sarà quindi nullo, essendo per ipotesi la caratteristica della matrice uguale ad h. L'identità (6) resta così dimostrata.

440. Sviluppando ora il determinante (6) secondo gli elementi

dell'ultima colonna si avrà (per $i > h$):

$$\alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2 + \ldots + \alpha_h U_h + \alpha_i U_i = 0 \qquad (7)$$

dove le α, essendo gli aggiunti degli elementi dell'ultima colonna, sono formati coi coefficienti a_{ij} e sono quindi quantità *conosciute*. Quanto poi ad α_i, che è l'aggiunto di U_i, esso ha il valore:

$$\alpha_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1h} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2h} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{h1} & a_{h2} & \ldots & a_{hh} \end{vmatrix} = R$$

che è diverso da zero. Si potrà quindi dividere la (7) per α_i e si dedurrà:

$$U_i = \beta_1 U_1 + \beta_2 U_2 + \ldots + \beta_h U_h \qquad (8)$$

dove le β sono numeri costanti conosciuti. Quindi: *se la caratteristica della matrice dei coefficienti di un sistema di forme lineari è uguale ad* h, *tutte le dette forme lineari si possono esprimere come una combinazione lineare, a coefficienti costanti, di* h *fra esse.*

Ora dalla *identità* (8) emerge chiaramente che ogni sistema di valori delle $x_1, x_2, \ldots, x_n$ per il quale si abbia:

$$U_1 = 0, \ U_2 = 0, \ \ldots, \ U_h = 0$$

annullerà anche U_i. Cioè: tutti i sistemi di valori delle incognite $x_1, x_2, \ldots, x_n$ che soddisfano alle prime h equazioni del sistema, soddisferanno anche alle rimanenti. O, in altri termini, le ultime $m - h$ equazioni del sistema proposto sono una conseguenza necessaria delle prime h equazioni.

441. Dopo ciò è chiaro che, per avere tutte le soluzioni possibili del sistema proposto, basta limitarsi a cercare tutte le possibili soluzioni delle prime h equazioni:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot &\quad \cdot \\ a_{h1}x_1 + a_{h2}x_2 + \ldots + a_{hn}x_n &= 0 \end{aligned} \qquad (1)'$$

il cui sistema è equivalente al sistema (1).

Scrivendo ora queste h equazioni come segue:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1h}x_h &= -(a_{1,h+1}x_{h+1} + \ldots + a_{1,n}x_n) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2h}x_h &= -(a_{2,h+1}x_{h+1} + \ldots + a_{2,n}x_n) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot &\quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{h1}x_1 + a_{h2}x_2 + \ldots + a_{hh}x_h &= -(a_{h,h+1}x_{h+1} + \ldots + a_{h,n}x_n) \end{aligned}$$

si vede che, dati a piacere alle $x_{h+1}, x_{h+2}, \ldots, x_n$ dei valori qualisivogliano, per determinare le h incognite rimanenti $x_1, x_2, \ldots, x_h$,

si avranno precisamente h equazioni di 1° grado col determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1h} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2h} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{h1} & a_{h2} & \dots & a_{hh} \end{vmatrix} = \mathrm{R}$$

che si è già detto essere diverso da zero. Quindi le altre incognite si potranno sempre determinare, ed in un unico modo (articolo 427.

442. È importante far rilevare che il sistema (1)′ non è più suscettibile di ulteriore riduzione, nel senso che nessuna delle sue equazioni potrebbe cancellarsi come superflua, cioè come conseguenza delle rimanenti. Questo fatto si esprime ordinariamente con dire che le equazioni (1)′ sono fra loro *indipendenti; definendosi in generale come indipendenti più equazioni tali che nessuna di esse sia conseguenza delle rimanenti.*

Esaminiamo infatti se sia possibile, che una delle (1)′, p. es. l'ultima, sia conseguenza delle rimanenti. Poichè il determinante R è diverso da zero, almeno uno degli aggiunti degli elementi dell'ultima orizzontale di R sarà diverso da zero, e ci sarà lecito ritenere (disponendo opportunamente dell'ordine di scrittura delle $x_1, x_2, \dots, x_h$) che esso sia proprio l' aggiunto dell' ultimo elemento a_{hh}. Le prime $h-1$ equazioni (1)′ si potranno allora scrivare come segue:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1,h-1}x_{h-1} &= -(a_{1h}x_h+a_{1,h+1}x_{h+1}+\dots+a_{1n}x_n) \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2,h-1}x_{h-1} &= -(a_{2h}x_h+a_{2,h+1}x_{h+1}+\dots+a_{2n}x_n) \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot & \quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \qquad (1)'' \\ a_{h-1,1}x_1+a_{h-1,2}x_2+\dots+a_{h-1,h-1} &= -(a_{h-1,h}x_h+\dots+a_{h-1,n}x_n) \end{aligned}$$

dove il determinante dei coefficienti dei primi membri è diverso da zero. Esse potranno quindi sempre risolversi scegliendo a piacere i valori delle $x_h, x_{h+1}, \dots, x_n$ e determinando quindi opportunamente quelli delle rimanenti h—1 incognite. Esiste dunque necessariamente qualche sistema di valori delle incognite che soddisfa alle (1)″ e non soddisfa alle (1)′; poichè, fissati a piacere i valori delle $x_{h+1}, \dots, x_n$, il valore della x_h non poteva, nella risoluzione del sistema (1)′, prendersi a piacere, ma bensì restava determinato in modo unico. Il sistema (1)′ non può dunque essere una conseguenza del sistema (1)″, ossia, che è la stessa cosa, l' ultima delle (1)′ non può essere una conseguenza delle rimanenti, c. d. d.

443. Questo risultato si può riassumere così: *affinchè le equazioni di un sistema lineare omogeneo siano indipendenti, è necessario e sufficiente che la caratteristica della sua matrice sia eguale al numero delle equazioni.*

444. Per quanto riguarda la risoluzione di un sistema lineare omogeneo qualunque, giungiamo dunque alle seguenti conclusioni:

Dato un sistema qualunque di m *equazioni lineari omogenee con* n *incognite, sia* h *la caratteristica della sua matrice.*

Allora delle m *equazioni date soltanto* h *saranno indipendenti; le altre* m — h *saranno una semplice conseguenza delle prime e potranno quindi trascurarsi. Per soddisfare poi alle* h *equazioni indipendenti, si potranno assegnare ad arbitrio i valori di* n — h *incognite, restando così perfettamente determinati i valori delle* h *incognite rimanenti.*

Le h *equazioni indipendenti non si potranno in generale scegliere a piacere fra le date; sarà bensì necessario e sufficiente sceglierle in modo che la matrice dei loro coefficienti sia di caratteristica* h, *cioè contenga almeno un minore di ordine* h *diverso da zero. Neanche le* n — h *incognite, cui si vogliono assegnare valori arbitrari, si possono in generale scegliere a piacere. Bisognerà sceglierle in modo che la matrice dei coefficienti relativi alle altre incognite sia di caratteristica eguale ad* h.

445. Corollario.—*Affinchè un sistema di equazioni lineari omogenee sia risolubile con valori delle incognite che non siano tutti nulli, è necessario e sufficiente che la caratteristica della sua matrice sia inferiore al numero delle incognite.*

446. *Affinchè una certa equazione, facente parte di un sistema lineare omogeneo, sia conseguenza delle rimanenti, è necessario e sufficiente che, cancellando dal sistema quell'equazione, la caratteristica del sistema resti inalterata.*

Che questa condizione sia sufficiente, risulta infatti evidentemente da quanto si è già esposto agli articoli 439 e 440. Per dimostrarne la necessità, supponiamo che la caratteristica h del sistema dato si riduca ad $h-1$, quando si cancelli una certa equazione $U=0$. Se, malgrado ciò, la $U=0$ fosse conseguenza delle rimanenti, dovrebbe anche essere conseguenza (art. 444) di sole $h-1$ fra le rimanenti, che si potrebbero sempre scegliere in modo da dare, unitamente alla $U=0$, una matrice di caratteristica h, quale per ipotesi deve esistere nel sistema completo. E ciò sarebbe in contraddizione col teorema dell'art. 443.

447. *Affinchè un' equazione lineare omogenea* $U=0$ *sia conseguenza di certe altre equazioni consimili* $V_1=0$, $V_2=0$, ..., *è necessario e sufficiente che il suo primo membro* U *sia identicamente uguale alla somma dei primi membri* V_1, V_2, ..., *moltiplicati per dei coefficienti costanti.*

La sufficienza di tale condizione è affatto evidente. Ma essa è anche necessaria, poichè, se la U=0 è conseguenza delle $V_1=0$, $V_2=0, \ldots$, la caratteristica h dell'intero sistema $U=0$, $V_1=0$, $V_2=0, \ldots$ coinciderà (art. 446) con quella del sistema $V_1=0$, $V_2=0, \ldots$; epperò il primo membro di $U=0$ si esprimerà linearmente (cfr. art. 440) coi primi membri di quelle fra le $V_1=0$, $V_2=0, \ldots$, che danno luogo ad una matrice di caratteristica h.

448. Dai risultati ottenuti emerge l'opportunità di dare altresì una definizione di *forme lineari indipendenti*, intendendosi per *forma lineare* a più variabili una funzione intera, lineare ed omogenea delle variabili. Noi diremo che *più forme lineari con* n *variabili sono fra loro indipendenti, quando nessuna di esse si può esprimere identicamente come somma delle altre moltiplicate per dei coefficienti costanti.*

Confrontando questa definizione con quella di *equazioni lineari omogenee indipendenti* data all'art. 442 discende infatti, come corollario, dal teorema stabilito all'art. precedente che: *se le* m *forme lineari* U_1, U_2, ..., U_m *sono fra loro indipendenti, anche le* m *equazioni* $U_1 = 0$, $U_2 = 0$, ..., $U_m = 0$ *saranno fra loro indipendenti, e reciprocamente.*

449. Un sistema di equazioni lineari omogenee *B* si dice *conseguenza* di un altro sistema *A*, quando tutti i sistemi di valori dell'incognite soddisfacenti al sistema *A* soddisfano anche al sistema *B*. In particolare poi i due sistemi si diranno *equivalenti*, se sia al tempo stesso il primo conseguenza del secondo e il secondo conseguenza del primo; o in altri termini *se essi ammettono precisamente gli stessi sistemi di soluzioni.*

450. *Se un sistema* B *è conseguenza di un sistema* A, *la caratteristica della matrice di* B *è* $\leqq$ *della caratteristica della matrice di* A.

Siano infatti *a* e *b* risp. le caratteristiche dei due sistemi A e B. Aggiungendo successivamente al sistema A tutte le equazioni di B, che ne sono per supposto una conseguenza, la sua caratteristica conserverà (art. 446) il valore *a*. Intanto il nuovo sistema così formato, contenendo entro di sè la matrice B, avrà evidentemente una caratteristica eguale o superiore a *b*. Sarà dunque $a \geqq b$, c. d. d.

451. Corollario. — *Se due sistemi di equazioni lineari omogenee sono equivalenti, le caratteristiche delle loro matrici sono uguali.*

452. *Se le equazioni lineari omogenee indipendenti* $V_1=0$, $V_2=0$,..., $V_i = 0$ *sono conseguenza necessaria del sistema* $U_1=0$, $U_2=0$, ..., $U_j = 0$, *sarà* $i \leqq j$.

Invero la matrice delle V ha per supposto (art. 443) la sua caratteristica eguale ad *i*. Sarà dunque *i* eguale o minore (art. 450) della caratteristica delle U. Ma questa è in ogni caso $\leqq$ del numero delle equazioni $U = 0$, cioè di *j*; quindi, ecc.

453. Chiuderemo con alcuni altri teoremi assai utili nel calcolo delle caratteristiche. Essi discendono quasi immediatamente da quelli già dimostrati.

E primieramente è senz'altro evidente che: *non si altera la caratteristica di una matrice moltiplicandone tutti gli elementi di una linea per uno stesso fattore diverso da zero.* Quest'operazione si chiama comunemente *moltiplicazione di una linea per un numero.*

Del resto questo teorema fa riscontro (cfr. art. 451) all'altro, del pari evidente, che: un sistema di equazioni lineari resta equivalente a se stesso, se una qualunque delle sue equazioni si moltiplichi per un fattore costante diverso da zero.

454. *La caratteristica di una matrice non si altera, se agli elementi di una linea si aggiungano gli elementi corrispondenti di una linea parallela moltiplicati per un fattore comune costante.*

Si consideri infatti il sistema di equazioni lineari omogenee che ha per matrice dei coefficienti la matrice data. E evidente che il sistema resta equivalente a sè stesso, se in luogo di una delle sue equazioni si ponga l'equazione stessa sommata membro a membro con un' altra qualunque delle rimanenti (anche moltiplicata, se si vuole, per un fattore costante). Resterà dunque inalterata (art. 451) anche la caratteristica della matrice, che ha appunto subito la trasformazione indicata nell'enunciato.

455. *Affinchè la caratteristica di una matrice non sia alterata dalla soppressione di una linea, è necessario e sufficiente che quella linea sia eguale alla somma di alcune delle altre linee parallele moltiplicate per dei numeri opportunamente scelti.* Per somma (o prodotto) di due linee s' intende una linea che abbia per elementi le somme (ovvero i prodotti) degli elementi corrispondenti delle due linee.

Invero, affinchè ciò accada, è necessario e sufficiente (art. 446) che l' equazione lineare omogenea corrispondente alla linea da cancellarsi sia conseguenza delle rimanenti; è quindi anche necessario e sufficiente (art. 447) che il primo membro di quell' equazione sia identicamente uguale alla somma di altri primi membri moltiplicati per opportune costanti.

456. *Se, aggiungendo separatamente ad una matrice certe nuove linee (tutte orizzontali o tutte verticali), non si altera la sua caratteristica, questa non verrà neanche alterata dall'aggiunzione simultanea di tutte queste linee.*

Infatti, ciascuna delle nuove equazioni aventi per coefficienti gli elementi delle nuove linee è, per il supposto (cfr. art. 446) conseguenza del sistema lineare omogeneo che ha per matrice la matrice proposta. Aggiungendo quindi simultaneamente a quel sistema tutte le nuove equazioni, si otterrà un sistema equivalente al primitivo. La caratteristica del nuovo sistema sarà dunque (articolo 451) uguale a quella del primitivo, c. d. d.

457. Corollario. — *Sia data una matrice di* n *linee e di* m *colonne, con* $\mathrm{m} > \mathrm{n}$; *e si supponga che le prime* $\mathrm{n} - 1$ *colonne contengano almeno un determinante di ordine* $\mathrm{n} - 1$ *diverso da zero. Per accertare che tutti i determinanti di ordine* n *contenuti nella matrice siano nulli, basta verificare che siano nulli gli* $\mathrm{m} - \mathrm{n} + 1$ *determinanti formati con quelle* $\mathrm{n} - 1$ *colonne combinate successivamente con una qualunque delle rimanenti.*

Ove ciò accada, la matrice delle prime $n - 1$ colonne avrà in-

fatti per caratteristica $n-1$, e tale caratteristica non sarà alterata dall'aggiunzione di una qualunque delle altre colonne.

Note ed Esercizi.

1. Risolvere il sistema:

$$x-2y+3z+4t+5v=0$$
$$x+4y+7t+2v=0$$
$$2x+2y+3z+11t+7v=0$$
$$3x+6y+3z+18t+9v=0$$

che si può ridurre a due sole equazioni indipendenti.

2. Risolvere il sistema:

$$U_1 \equiv x-3y+5z=0\ ,\ U_2 \equiv 2x-4y+2z=0\ ,\ U_3 \equiv 5x-11y+9z=0$$

che ha il determinante uguale a zero e la caratteristica $h=2$; e calcolare i coefficienti costanti α_1, α_2, α_3 della relazione:

$$\alpha_1 U_1+\alpha_2 U_2+\alpha_3 U_3=0$$

che ha luogo *identicamente* fra le tre funzioni U_1, U_2, U_3.

3. Si dimostri, come conseguenza dell'art. 455, che: *se la caratteristica di una matrice* A *non è alterata dalla soppressione di una sua linea* L, *non verrà alterata da tale soppressione neanche la caratteristica di qualsiasi matrice composta dalla matrice* A *e da altre nuove linee parallele ad* L.

Se ne deduca poi il metodo, praticamente più semplice, da seguirsi per il calcolo della caratteristica di una matrice data.

4. *Per una matrice di* m *righe ed* n *colonne, si sappia essere diverso da zero il determinante di ordine* h *formato dagli elementi nei quali le prime* h *righe s'incrociano colle prime* h *colonne. Allora, perchè siano nulli tutti i determinanti di ordine* h+1 *contenuti nella matrice, basterà che siano nulli gli* (m−h)(n−h) *determinanti formati dagli elementi d'incrociamento delle righe di posto* 1, 2, 3, . . . , h, i (*per* i > h) *colle colonne di posto* 1, 2, 3, . . . , h, j (*per* j > h). Si dimostri ciò come conseguenza degli articoli 456 e 457.

§ 6.° — Sistema di *m* equazioni lineari non omogenee con *n* incognite. Condizioni di compatibilità.

458. Teorema. — *Affinchè un sistema qualunque di* m *equazioni di 1° grado con* n *incognite*:

$$(1)\qquad \begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n&=\alpha_1\\ \ldots\ldots&\ldots\ldots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n&=\alpha_m \end{aligned}$$

sia risolubile con valori finiti delle incognite, è necessario e suf-

ficiente che le due matrici:

$$(2)\ \left\{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{matrix}\right. ,\quad (3)\ \left\{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & \alpha_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & \alpha_m \end{matrix}\right.$$

abbiano eguale caratteristica.

Questo teorema non differisce sostanzialmente da quello, da noi già dimostrato, dell'art. 455. Infatti, se il sistema (1) è risolubile con valori finiti delle $x_1, x_2, \ldots, x_n$, l'ultima colonna della matrice (3) è uguale alla somma delle colonne precedenti rispettivamente moltiplicate per $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e quindi la caratteristica di (3) resterà la stessa (art. 455) se si sopprima l'ultima sua colonna, cioè coinciderà colla caratteristica di (2). Reciprocamente, se le caratteristiche di (2) e di (3) sono eguali, ciò significa che la caratteristica di (3) non è alterata dalla soppressione dell'ultima colonna, onde l'ultima colonna sarà uguale (art. 455) alla somma delle precedenti moltiplicate per certi numeri finiti $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Il sistema (1) sarà dunque soddisfatto da tali valori delle x_1, $x_2, \ldots, x_n$; ossia esso sarà *compatibile* con valori finiti delle sue incognite.

459. Se nelle equazioni del sistema (1) si ponga:

$$x_1 = -\frac{y_1}{y_{n+1}},\ x_2 = -\frac{y_2}{y_{n+1}},\ \ldots,\ x_n = -\frac{y_n}{y_{n+1}}, \tag{4}$$

essendo y_{n+1} un numero *diverso da zero*, del resto arbitrariamente fissato, esse assumono la forma di m equazioni omogenee:

$$\begin{matrix} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n + \alpha_1 y_{n+1} = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \ldots + a_{mn}y_n + \alpha_m y_{n+1} = 0 \end{matrix} \tag{5}$$

fra le $n+1$ variabili $y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}$.

Fissato un valore non nullo di y_{n+1}, ad ogni sistema di valori delle $x_1, x_2, \ldots, x_n$ corrisponde, in virtù delle (4), un unico sistema di valori delle $y_1, y_2, \ldots, y_n$ e reciprocamente.

Dunque, se i valori delle x costituiscono una soluzione del sistema (1), i valori corrispondenti delle $y_1, y_2, \ldots, y_n$ unitamente a quello assegnato ad y_{n+1} costituiranno una soluzione del sistema (5). Reciprocamente, se un sistema di valori delle $y_1, y_2, \ldots, y_n$, y_{n+1}, con y_{n+1} diverso da zero, soddisfa alle (5), i rapporti:

$$-\frac{y_1}{y_{n+1}},\ -\frac{y_2}{y_{n+1}},\ \ldots,\ -\frac{y_n}{y_{n+1}}$$

costituiscono una soluzione delle (1).

Pertanto la ricerca delle soluzioni finite di un sistema di equazioni lineari non omogenee coincide con quella delle soluzioni finite di un sistema di equazioni lineari omogenee, per le quali una

incognita *assegnata* deve avere un valore non nullo. Dire che il sistema (1) è *incompatibile* per valori finiti delle incognite x_1, $x_2, \ldots, x_n$ equivale a dire che il sistema (5) ha per conseguenza necessaria $y_{n+1} = 0$.

Note ed Esercizi.

1. Si è usata l'espressione: *equazioni compatibili con valori finiti* delle incognite, e la qualifica di *finiti* potrà ragionevolmente essere sembrata oziosa, non essendosi mai parlato di quantità dotate di valore infinito. Bensì nella pratica si dice talora che *x è infinito* (e si scrive $x=\infty$), ma come semplice abbreviazione convenzionale di linguaggio; intendendosi con ciò di dire che x è una *variabile* avente per *limite* l'infinito (cfr. Capitolo VII).

Noi però abbiamo inteso a prevenire lo studioso contro qualche dubbio che potrebbe in seguito affacciarsi alla sua mente, quando in moltissime questioni troverà considerate come compatibili delle equazioni che non lo sarebbero affatto secondo il senso naturale dell'espressione. Gli è che in queste questioni si ammette che alcune delle incognite possano assumere anche valore infinito, secondo un certo senso convenzionale che cercheremo mettere in chiaro con quanto segue.

Punto di partenza è l'osservazione, affatto ovvia, che il sistema non omogeneo (1) è equivalente al sistema:

$$\begin{array}{c} a_{11}\dfrac{x_1}{x_i}+\ldots+a_{1,i-1}\dfrac{x_{i-1}}{x_i}+a_{1,i}+a_{1,i+1}\dfrac{x_{i+1}}{x_i}+\ldots+a_{1,n}\dfrac{x_n}{x_i}-\dfrac{a_1}{x_i}=0 \\ \cdot\ ,\ \cdot \\ a_{m1}\dfrac{x_1}{x_i}+\ldots+a_{m,i-1}\dfrac{x_{i-1}}{x_i}+a_{m,i}+a_{m,i+1}\dfrac{x_{i+1}}{x_i}+\ldots+a_{m,n}\dfrac{x_n}{x_i}-\dfrac{a_m}{x_i}=0 \end{array} \qquad (1)'$$

semprechè non si considerino valori nulli di x_i. Ora noi considereremo anzi dei valori sempre più grandi di x_i, supponendo che la x_i, unitamente ad alcune altre delle variabili (che potremo ritenere, senza nuocere alla generalità della questione, essere le $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}$) tenda all'infinito, in modo però che i loro rapporti tendano a dei limiti finiti e diversi da zero. Scriveremo pertanto (cfr. Cap. VII):

$$\lim x_1 = \infty \quad , \quad \lim x_2 = \infty, \ldots, \lim x_i = \infty$$

$$\lim x_1 : x_2 : \ldots : x_i = \lambda_1 : \lambda_2 : \ldots \lambda_i$$

essendo le $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_i$ dei numeri ben determinati, *finiti e diversi da zero*. Quanto alle rimanenti variabili, non sarà necessario supporre che tendano a dei limiti finiti o infiniti; soltanto si supporrà che sia, per $x_i = \infty$:

$$\lim\frac{x_{i+1}}{x_i} = 0, \quad \lim\frac{x_{i+2}}{x_i} = 0, \ldots, \lim\frac{x_n}{x_i} = 0 \quad (*).$$

In tali condizioni è chiaro che affinchè le (1) *tendano ad essere soddi-*

(*) Nel linguaggio del calcolo infinitesimale le ipotesi fatte si esprimerebbero più semplicemente dicendo che: le variabili $x_1, x_2, \ldots, x_i$ tendono a valori infiniti *dello stesso ordine*, nel mentre che le $x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_n$ tendono a divenire grandezze *di ordine inferiore* a quello delle prime.

sfatte col crescere indefinitamente delle $x_1, x_2, \ldots, x_i$, cioè affinchè i loro primi membri abbiano per limite lo zero, sarà necessario e sufficiente che siano soddisfatte le relazioni:

$$\begin{array}{c} a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + \ldots + a_{1i}\lambda_i = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1}\lambda_1 + a_{m2}\lambda_2 + \ldots + a_{mi}\lambda_i = 0. \end{array} \qquad (1)''$$

Se ciò accade, noi potremo dire *con una locuzione convenzionale,* il cui senso effettivo è quello testè spiegato, che le equazioni (1)', e anche le stesse (1), sono soddisfatte dal sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = \infty\ , x_2 = \infty, \ldots, x_i = \infty \\ x_1 : x_2 : \ldots : x_i = \lambda_1 : \lambda_2 : \ldots : \lambda_i \end{array}\right. ,\ \left\{ x_{i+1} = \frac{0}{0}, x_{i+2} = \frac{0}{0}, \ldots, x_n = \frac{0}{0} \right. (\alpha)$$

dove coi simboli $\frac{0}{0}$ intenderemo delle quantità *indeterminate* il cui ordine di grandezza è inferiore a quello delle $x_1, x_2, \ldots, x_i$; cioè delle quantità finite *che potranno fissarsi ad arbitrio*, o, più generalmente, delle quantità *che possano anche variare, e crescere a piacere, insieme colle* $x_1, x_2, \ldots, x_i$, *purchè si abbia però:* $\lim x_{i+h} : x_i = 0$ $(h = 1, 2, \ldots)$.

2. È manifesto che, alla soluzione del sistema (1) data dalle (4) corrisponde, pel sistema (5), la soluzione:

$$y_1 = \lambda_1\ , y_2 = \lambda_2, \ldots, y_i = \lambda_i\ , y_{i+1} = 0\ , y_{i+2} = 0, \ldots, y_n = 0\ , y_{n+1} = 0.$$

E, reciprocamente, ad ogni cosiffatta soluzione delle (5) corrisponderà per le (1) una soluzione che potrà essere rappresentata dalle (α), o anche potrà essere opportunamente simboleggiata dalle stesse (4), che prenderebbero la forma:

$$x_1 = \frac{\alpha_1}{0}\ ,\ \ x_2 = \frac{\alpha_2}{0} \ldots, x_i = \frac{\alpha_i}{0}\ ,\ \ x_{i+1} = \frac{0}{0}\ , \ldots, x_n = \frac{0}{0}.$$

Va eccettuato solamente il caso in cui il sistema omogeneo (3) *ammetta la sola soluzione* $y_1 = y_2 = \ldots = y_n = y_{n+1} = 0$. *In questo caso il sistema* (1) *sarà incompatibile, non solo con valori finiti, ma anche con valori infiniti delle incognite.*

Pertanto (cfr. art. 445), si conclude che: *affinchè un sistema di più equazioni lineari sia risolubile con valori finiti o infiniti delle incognite, è necessario e sufficiente che la caratteristica della matrice formata dai coefficienti delle incognite e dai termini noti non superi il numero delle incognite.*

Corollario. — *Un sistema di equazioni lineari è sempre risolubile con valori finiti o infiniti delle incognite, se il numero delle equazioni non supera quello delle incognite.*

3. Crediamo utile aggiungere qui un breve cenno della interpetrazione che si dà usualmente in geometria analitica di quei sistemi di soluzioni in cui qualche incognita assume valore infinito o indeterminato. Ci limiteremo al caso di due sole incognite x ed y, che interpetreremo come le ordinarie coordinate cartesiane di un punto del piano. E precisamente la coppia (x, y) rappresenterà:

1°) un punto a distanza finita, se x ed y hanno valori finiti;

2°) il punto all'infinito della retta $x : y = \alpha_1 : \alpha_2$, se $x = \infty$, $y = \infty$; $x : y = \alpha_1 : \alpha_2$ con α_1, α_2 finiti e diversi da 0.

3°) il punto all' infinito sull' asse delle y, se $x = \infty$, $y = \frac{0}{0}$;

4°) il punto all' infinito sull' asse delle y, se $x = \frac{0}{0}$, $y = \infty$.

4. Ciò premesso, sia data dapprima una sola equazione: $ax + by + c = 0$; la corrispondente equazione omogenea $ay_1 + by_2 + cy_3 = 0$, ci da, per $y_3 = 0$, un unico valore pel rapporto $y_1 : y_2$, se a e b non sono entrambi nulli. Se poi $a = b = 0$, è soddisfatta da valori qualisivogliano di y_1 ed y_2. Dunque:

1°) se a e b non sono entrambi nulli, l'equazione $ax + by + c = 0$ ammette una sola soluzione composta con valori infiniti di x od y. Questa soluzione è indipendente dal valore di c. Geometricamente: *ogni retta del piano finito ha un solo punto all' infinito, che si ritiene comune a tutte le rette ad essa parallele.*

2°) se $a = b = 0$, l' equazione prende la forma: cost. $= 0$. Essa si dovrà considerare come risoluta da ogni coppia di valori x, y di cui almeno uno sia infinito, nè avrà soluzioni nel finito. Geometricamente: *i punti all' infinito di tutte le rette del piano debbono considerarsi come situati su un unica retta, la retta all' infinito, avente per equazione*: cost. $= 0$.

5. Si abbia ora il sistema di due equazioni:

$$ax + by + c = 0 \quad , \quad \alpha x + \beta y + \gamma = 0,$$

Esisterà (secondo il corollario della nota 2ª) almeno una coppia di valori finiti o infiniti di x ed y che la soddisfano. Geometricamente: *due rette del piano hanno sempre un punto in comune* (a distanza finita, ovvero all' infinito, se le rette sono parallele).

6. Sia dato finalmente il sistema di tre equazioni:

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \ , \ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \ , \ a_3x + b_3y + c_3 = 0.$$

Dal corrispondente sistema omogeneo risulterà che, affinchè esso sia soddisfatto da un sistema di valori finiti, o infiniti, delle x ed y, è necessario e sufficiente che sia

$$\Sigma \pm a_1 b_2 c_3 = 0.$$

Lasciamo al lettore di trovare, per questo caso come per quello della nota precedente, le condizioni additive da soddisfarsi affinchè le incognite abbiano valore finito, ovvero esista un numero infinito di sistemi di soluzioni.

§ 7.° — Sviluppo di un determinante per mezzo di prodotti di minori complementari. — Regola per il prodotto di due determinanti.

460. Sia dato un determinante qualunque $D = \Sigma \pm a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$. In ciò che segue indicheremo per brevità con $[i_1, i_2, \dots, i_r; j_1, j_2, \dots, j_r]$ quello dei determinanti minori di D i cui elementi si trovano negli incrociamenti delle orizzontali di indice $i_1, i_2, \dots, i_r$ colle verticali di indice $j_1, j_2, \dots, j_r$. Indicheremo poi con $[i_1, i_2, \dots, i_r; j_1, j_2, \dots, j_r]'$ il suo *minore complementare*, cioè quel minore di D, di ordine $n - r$, che ha per matrice gli elementi di incrociamento delle rimanenti orizzontali colle rimanenti verticali. La sua matrice è, evidentemente, ciò che resta della matrice di

D, quando se ne cancellino le linee e colonne che hanno servito a individuare il primo minore.

461. Fra i minori di ordine r si chiamerà *principale* quello rappresentato dagli incrociamenti delle prime r orizzontali colle prime r verticali, cioè $[1\,,\,2\,,\ldots,\,r\,;\,1\,,\,2\,,\ldots,\,r]$. Per questo si ha evidentemente:

$$[1\,,2\,,\ldots,r\,;1\,,2\,,\ldots,r]'=[r+1\,,r+2\,,\ldots,n\,;r+1\,,r+2\,,\ldots,n]$$

È facile vedere che il prodotto di un minore principale per il suo minore complementare rappresenterà, quando lo si sviluppi, una parte dello sviluppo dell' intero determinante D. Infatti gli $\underline{|r}\,\underline{|n-r}$ termini così ottenuti coincidono manifestamente, fatta astrazione dal segno, con altrettanti termini, tutti distinti fra loro, del determinante D. Per convincersi poi che vi è anche la coincidenza dei segni, basta riflettere che, se P e P' sono due prodotti di elementi appartenenti rispettivamente alle due matrici parziali, i segni con cui essi si presentano come termini dei corrispondenti determinanti sono dati da $(-1)^\rho$ e $(-1)^{\rho'}$, essendo ρ il numero totale di inversioni negli indici di P', e che il numero totale di inversioni in PP' sarà appunto $\rho+\rho'$, giacchè gli indici in P, essendo tutti inferiori agli indici in P', non fanno con essi alcuna inversione. Al prodotto PP', considerato come termine di D, dovrà dunque premettersi il segno $(-1)^{\rho+\rho'}$, che è appunto il prodotto dei due segni $(-1)^\rho$ e $(-1)^{\rho'}$.

462. Si consideri ora un minore qualunque (*) $[i_1\,,\,i_2\,,\ldots,\,i_r\,;\,j_1\,,j_2\,,\ldots,j_r]$. È chiaro che, se nel determinante D si scambi la orizzontale i_1 successivamente con ciascuna delle i_1-1 precedenti fino ad occupare il posto della prima, poi la orizzontale i_2 similmente con ciascuna del i_2-2 precedenti fino ad occupare il secondo posto e così di seguito, finchè anche la orizzontale i_r venga al posto r^{mo}; e se si faccia, dopo di ciò, un analogo sistema di scambi fra le colonne, cosicchè quelle di posto $j_1\,,j_2\,,\ldots,j_r$ prendano rispettivamente i posti della 1ª, della 2ª, ecc., la matrice del minore considerato verrà precisamente ad occupare il posto della matrice del minore principale di ordine r, nel mentre che il minore complementare del primo occuperà il posto del complementare del secondo. D' altra parte il numero degli scambi eseguiti essendo dato da

$$(i_1-1)+(i_2-2)+\ldots+(i_r-r)+(j_1-1)+(j_2-2)+\ldots+j_r-r)$$
$$=\Sigma i+\Sigma j-2\,(1+2+\ldots r),$$

il determinante D avrà conservato il suo valore o avrà cambiato soltanto il segno, secondochè sia pari o dispari la somma $\Sigma i+\Sigma j$.

(*) Ci è lecito evidentemente di ritenere che sia $i_1<i_2<i_3<,\ldots,j_1<j_2<j_3<\ldots$

Per l'articolo precedente, il prodotto:

$$(-1)^{\Sigma i+\Sigma j}[i_1\,,i_2\ldots i_r\,;j_1\,,j_2\ldots j_r]\cdot[i_1\,,i_2\,,\ldots,i_r\,;j_1\,,j_2\ldots j_r]'$$

rappresenterà dunque una parte del determinante D.

Il minore complementare di $[i_1,..,i_r\,;\,.j_1,..,j_r]$ preso col segno $+$ o $-$, secondochè sia pari o dispari la somma $i_1+...+i_r+j_1+...+j_r$, si chiama il suo *complemento algebrico* o, più semplicemente, il suo *aggiunto*; cosicchè il risultato ottenuto si può esprimere brevemente con dire che *il prodotto di un minore qualunque pel suo aggiunto è uguale ad una parte dello sviluppo dell' intero determinante.*

Per i minori di prim' ordine ($r=1$), cioè per i semplici elementi del determinane D, la definizione ora data di aggiunto ricade evidentemente in quella del § 3.

463. *La somma di tutti i minori di ordine* k, *contenuti nella matrice parziale formata da certe* k *linee di un determinante* D, *moltiplicati per i rispettivi aggiunti è uguale a* D.

Supposto infatti, per fissare le idee, che la matrice parziale sia quella formata dalle prime k orizzontali, siano A, B, C, ... i diversi minori di ordine k in essa contenuti, ed A', B', C', ... i rispettivi aggiunti. Un termine qualunque di D, essendo della forma $a_{1\,,\,j_1} a_{2\,,\,j_2} \ldots a_{k\,,\,j_k}\,,\, a_{k+1\,,\,j_{k+1}} \ldots,$ non potrà evidentemente presentarsi che in uno soltanto dei prodotti;

$$AA'\,,\ BB'\,,\ CC'\,,\ldots$$

cioè in quello che ha per primo fattore il minore individuato dalle colonne di indici $j_1\,,j_2\,,\ldots,j_h$, ed in esso si presenterà (art. 462) una sola volta e col segno corrispondente alla sua classe. Sarà dunque appunto

$$D=AA'+BB'+CC'+\ldots$$

464. *È invece uguale a zero la somma dei minori di ordine* k, *contenuti in una stessa matrice parziale formata con* k *linee, moltiplicati per gli aggiunti dei corrispondenti minori di un' altra matrice parziale formata con* k *linee parallele alle prime, che non coincidano completamente con esse.*

Infatti, per l'articolo precedente, la somma di cui si tratta, altro non è che lo sviluppo del determinante che si otterrebbe dal primitivo sostituendo alle k linee della seconda matrice parziale le k linee della prima. Ora questo secondo determinante avrà evidentemente almeno due linee uguali, e sarà quindi eguale a zero.

465. Dati due determinanti di ordine n:

$$D=\Sigma\pm a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}\quad,\quad D'=\Sigma\pm b_{11}b_{22}\ldots b_{nn}\,,$$

il loro prodotto si può porre sotto la forma:

$$DD' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1n} & 0 & 0 & . & . & 0 \\ a_{21} & a_{22} & . & . & a_{2n} & 0 & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & a_{nn} & 0 & 0 & . & . & 0 \\ -1 & 0 & . & . & 0 & b_{11} & b_{21} & . & . & b_{n1} \\ 0 & -1 & . & . & 0 & b_{12} & b_{22} & . & . & b_{n2} \\ . & . & . & . & . & & & & & \\ 0 & 0 & . & . & -1 & b_{1n} & b_{2n} & . & . & b_{nn} \end{vmatrix}$$

come segue immediatamente dal teorema dell' art. 463, quando si sviluppi il secondo membro secondo i minori di ordine n contenuti nelle prime n orizzontali; i quali sono evidentemente tutti nulli all' infuori del principale, che è lo stesso D.

Ora senza alterare, come è noto (art. 419), il valore del secondo membro, possiamo aggiungere alla $(n+1)^{ma}$ colonna le prime n colonne rispettivamente moltiplicate per $b_{11}, b_{12}, \ldots, b_{1n}$, quindi alla colonna $(n+2)^{ma}$ le prime n colonne risp. moltiplicate per $b_{21}, b_{22}, \ldots, b_{2n}$, e così via, fino ad aggiungere all' ultima colonna le prime n risp. moltiplicate per $b_{n1}, b_{n2}, \ldots, b_{nn}$. Con ciò il determinante si trasforma manifestamente in quest' altro:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1n} & c_{11} & c_{12} & . & . & c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & a_{2n} & c_{21} & c_{22} & . & . & c_{2n} \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & a_{nn} & c_{n1} & c_{n2} & . & . & c_{nn} \\ -1 & 0 & . & . & 0 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & -1 & . & . & 0 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & -1 & 0 & 0 & . & . & 0 \end{vmatrix}$$

dove si è posto generalmente:

$$c_{rs} = a_{r1}b_{s1} + a_{r2}b_{s2} + \ldots + a_{rn}b_{sn}.$$

Si ha dunque, sviluppando nuovamente secondo i minori contenuti nelle prime n orizzontali:

$$DD' = (-1)^{n^2} \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ . & . & . & . \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -1 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ . & . & . & . \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{vmatrix}$$

poichè: $(-1)^{n^2}\cdot(-1)^n = (-1)^{n(n+1)} = 1$, essendo $n(n+1)$ un numero pari.

Siamo giunti così alla seguente importante regola, conosciuta sotto il nome di *regola di moltiplicazione dei determinanti:*

Il prodotto di due determinanti dello stesso ordine n *si può esprimere con un unico determinante, pure di ordine* n, *di cui l'elemento generico* c_{rs}, *che occupa cioè il posto* (r, s), *è uguale alla somma degli elementi della* r^ma^ *linea orizzontale del primo determinante moltiplicati risp. per gli elementi corrispondenti della* s^ma^ *orizzontale del secondo.*

466. La regola di moltiplicazione data nell'art. precedente può dirsi regola di moltiplicazione *per orizzontali;* ma si può anche procedere in modo analogo eseguendo le moltiplicazioni *per verticali*, ed anche *per orizzontali e verticali.* Infatti, se nell'uno o nell'altro dei determinanti D , D', od in entrambi, si scambino le orizzontali colle verticali, il che non ne altera il valore (art. 415), e quindi si eseguisca il prodotto nel modo già indicato, si ottengono per l'elemento c_{rs} altre definizioni, cioè rispettivamente:

$$c_{rs} = a_{1r}b_{1s} + a_{2r}b_{2s} + \ldots + a_{nr}b_{ns}$$

ovvero:

$$c_{rs} = a_{r1}b_{1s} + a_{r2}b_{2s} + \ldots + a_{rn}b_{ns}$$

ovvero:

$$c_{rs} = a_{1r}b_{s1} + a_{2r}b_{s2} + \ldots + a_{nr}b_{sn}.$$

Quindi gli elementi del determinante prodotto possono assumere, a seconda della regola che si applica, forme e valori diversi rimanendo sempre lo stesso il risultato. Per esempio:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\alpha + b\beta & a\gamma + b\delta \\ c\alpha + d\beta & c\gamma + d\delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a\alpha + c\beta & a\gamma + c\delta \\ b\alpha + d\beta & b\gamma + d\delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\alpha + c\gamma & a\beta + c\delta \\ b\alpha + d\gamma & b\beta + d\delta \end{vmatrix}.$$

467. Se i due determinanti fattori sono di ordini diversi, si potrà prima ridurli allo stesso ordine, e poscia applicare la regola di moltiplicazione.

Così, p. es.:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} m & n \\ m_1 & n_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} m & n & 0 \\ m_1 & n_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} am + bn & am_1 + bn_1 & c \\ a_1m + b_1n & a_1m_1 + b_1n_1 & c_1 \\ a_2m + b_2n & a_2m_1 + b_2n_1 & c_2 \end{vmatrix}.$$

468. Detto A_{ik} l'aggiunto di a_{ik} nel determinante:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

applicheremo la regola del prodotto a calcolare il valore del determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix}.$$

Se noi moltiplichiamo per orizzontali i due determinanti D e Δ fra loro, gli elementi del determinante prodotto verranno dati dalla formola:

$$c_{rs} = a_{r1}A_{s1} + a_{r2}A_{s2} + \dots + a_{rn}A_{sn}$$

cioè saranno nulli (art. 424) per $r \gtrless s$, e, per $r = s$, uguali a D (art. 423). Si ha dunque:

$$D \cdot \Delta = \begin{vmatrix} D & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & D \end{vmatrix} = D^n$$

onde $\Delta = D^{n-1}$; cioè: *il determinante aggiunto* (cfr. § 3.°, nota 6ª) *di un determinante di ordine* n *è uguale alla sua potenza* $(n-1)^{ma}$.

Note ed Esercizi.

1. Siano a_{ih} ed a_{kj} due elementi che non appartengano ad una stessa riga o colonna del determinante $D = \Sigma \pm a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$, e si indichi con $A_{ih, kj}$ quel minore, di ordine $n-2$, che ha per matrice ciò che resta della matrice di D, quando se ne cancellino le due linee che s'incrociano in a_{ih} e le due che s'incrociano in a_{kj}. Quella parte dello sviluppo di D che contiene il prodotto $a_{ih}\, a_{kj}$ sarà data, per quanto si è visto, da

$$\pm (-1)^{i+h+k+j} a_{ih} a_{kj} A_{ih, kj}$$

dovendosi prendere il segno + ovvero il segno −, secondochè il prodotto $a_{ih}\, a_{kj}$, considerato come termine del minore $[i, k; h, j]$ è di classe pari o dispari. Cioè, si prenderà il segno + o −, secondochè il numero $(i-k)(h-j)$ sia positivo o negativo.

2. In base a ciò si potrà fare lo sviluppo del determinante D *secondo gli elementi di una certa orizzontale*, p. es. la i^{ma}, *e di una certa verticale*, p. es. la j^{ma}; poichè ogni termine del determinante D (fatta astrazione da quei termini che contengono a_{ij}, il cui insieme è rappresentato da

$a_{ij} . A_{ij}$) dovrà contenere un certo elemento, p. es. a_{ih}, della verticale j, cioè appunto un prodotto $a_{ih}\, a_{kj}$.

Supposto per semplicità $i=j=1$, si potrà dunque fare lo sviluppo del determinante secondo gli elementi della prima verticale e della prima orizzontale mediante la formola:

$$D = a_{11}A_{11} - \sum_{k=2}^{k=n} \sum_{h=2}^{h=n} (-1)^{k+h} a_{1k} a_{h1} A_{1k\,,\,h1}.$$

3. Si sviluppino, mediante questa regola, i determinanti:

$$\begin{vmatrix} a & x & y & z \\ x' & b & 0 & 0 \\ y' & 0 & c & 0 \\ z' & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = abcd - xx'cd - yy'bd - zz'bc\,, \qquad \begin{vmatrix} a & f & e & u \\ f & b & d & v \\ e & d & c & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix}$$

ordinando il secondo sviluppo secondo i quadrati e i prodotti delle variabili u, v, w.

4. Riconoscere che *il quadrato di un determinante, eseguito mediante la regola di moltiplicazione, è simmetrico;* cioè che risultano in esso eguali due a due gli elementi conjugati.

5. Indicando con D_k il minore principale di ordine k nel determinante $D = \Sigma \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{nn}$ e con Δ'_k il minore complementare del minore principale di ordine k nel determinante reciproco $\Delta = \Sigma \pm A_{11} A_{22} \ldots A_{nn}$, si può scrivere evidentemente:

$$D \cdot \Delta'_k = \begin{vmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\, a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \ldots & 0 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & 1 \ldots & 0 & 0 \ldots & 0 \\ . & \ldots\ldots & 0 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & 0 \ldots & 1 & 0 \ldots & 0 \\ A_{k+1\,,\,1} & A_{k+1\,,\,2} \ldots & A_{k+1\,,\,k} & A_{k+1\,,\,k+1} & A_{k+1\,,\,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n1} & A_{n2} \ldots & A_{nk} & A_{n\,,\,k+1} & A_{nn} \end{vmatrix} \qquad (1)$$

ed eseguendo la moltiplicazione per orizzontali:

$$D \cdot \Delta'_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} & 0 & 0 \cdot 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} & 0 & 0 \cdot 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kk} & 0 & 0 \cdot 0 \\ a_{k+1\,,\,1} & a_{k+1\,,\,2} & \ldots & a_{k+1\,,\,k} & D & 0 \cdot 0 \\ a_{k\cdot 2\,,\,1} & a_{k+2\,,\,2} & \ldots & a_{k+2\,,\,k} & 0 & D \cdot 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nk} & 0 & 0 \cdot D \end{vmatrix} = D_k \cdot D^{n-k}$$

Si ha dunque la relazione: $\Delta'_k = D_k . D^{n-k-1}$, la quale seguiterà ad essere valida, se con D_k s'intenda un minore qualunque di ordine k del determinante D e con Δ'_k l'aggiunto del minore omologo nel determinante Δ. La dimostrazione si riconduce immediatamente a quella del caso precedente scambiando, in modo identico a quello dell'art. 462, le righe e le colonne di D in guisa che il minore D_k venga a prendere il posto del minore principale dello stesso ordine, ed eseguendo gli stessi scambi anche nel determinante reciproco.

Ponendo $n-k=h$, si vede poi che al risultato ottenuto si può anche dare il seguente enunciato:

Un minore di grado h *del reciproco è uguale all'aggiunto del minore omologo del primitivo, moltiplicato per la potenza* $(h-1)^{ma}$ *di esso primitivo.*

§ 8.° — Moltiplicazione delle matrici.

469. Date due matrici simili (composte ciascuna di n orizzontali e di m verticali):

$$(1)\left\{\begin{matrix} x_1 & x_2 & \dots & x_m \\ y_1 & y_2 & \dots & y_m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_1 & z_2 & \dots & z_m \end{matrix}\right. , \qquad (2)\left\{\begin{matrix} a_1 & a_2 & \dots & a_m \\ b_1 & b_2 & \dots & b_m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ e_1 & e_2 & \dots & e_m \end{matrix}\right.$$

si formi il determinante di ordine n:

$$P = \begin{vmatrix} a_x & b_x & \dots & e_x \\ a_y & b_y & \dots & e_y \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_z & b_z & \dots & e_z \end{vmatrix}$$

di cui l'elemento generico, di posto (r, s), è il prodotto della r^{esima} orizzontale della prima matrice per la s^{esima} della seconda, cioè:

$$a_x = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_mx_m \ , \ a_y = a_1y_1 + a_2y_2 + \dots + a_my_m \ , \text{ ecc.} \qquad (3)$$

Il determinante P *così costruito ha valore nullo, se* $m < n$. *Se poi* $m \geqq n$, *esso è uguale alla somma dei minori di ordine* n *contenuti nella prema matrice rispettivamente moltiplicati per i corrispondenti minori di ordine* n *contenuti nella seconda.*

Invero, se $m < n$, si immagini di rendere quadrate le due matrici, coll'aggiungere, alla destra di ciascuna di esse, altre $n-m$ colonne con elementi tutti nulli. Il prodotto dei due determinanti, aventi per matrice le due matrici così completate, sarà nullo, ed eseguito mediante la regola di moltiplicazione dell' art. 465 riuscirà manifestamente identico al determinante P. Resta così dimostrata la prima parte dell'asserto.

Sia ora $m \geqq n$. Dobbiamo dimostrare che:

$$P = \sum_{r_1 < r_2 < \dots < r_n} A_{r_1, r_2, \dots, r_n} \, X_{r_1, r_2, \dots, r_n}$$

designando $X_{r_1, r_2, \dots, r_n}$ il minore formato dalle colonne $r_1, r_2, \dots, r_n$ della matrice (1) ed $A_{r_1, r_2, \dots, r_n}$ il minore analogo nella matrice (2). In effetto, si vede dalle (3) che una colonna qualunque del determinante P è la somma delle m colonne della matrice (1) rispettivamente moltiplicate per un certo elemento della (2). Il determinante P si può dunque decomporre (art. 418) in una somma di determinanti più semplici; sicchè, raccogliendo poi in ognuno di questi i fattori comuni alle diverse colonne, si potrà scrivere:

$$P = \sum_{r_1 < r_2 < \dots < r_n} f_{r_1, r_2, \dots, r_n} X_{r_1, r_2, \dots, r_n} \tag{4}$$

essendo le f delle funzioni intere dei soli elementi della matrice (2). Per determinare la $f_{r_1, r_2, \dots, r_n}$ basta porre uguali a zero, nell'identità (4), tutti quegli elementi della matrice (1) che hanno indici diversi da $r_1, r_2, \dots, r_n$. Allora il determinante P si riduce, per la regola di moltiplicazione dei determinanti, al prodotto dei due minori $X_{r_1, r_2, \dots, r_n}$ ed $A_{r_1, r_2, \dots, r_n}$, nel mentre che il secondo membro di (4) si riduce ad $f_{r_1, r_2, \dots, r_n} X_{r_1, r_2, \dots, r_n}$. Dev'essere dunque:

$$X_{r_1, r_2, \dots, r_n} A_{r_1, r_2, \dots, r_n} = f_{r_1, r_2, \dots, r_n} X_{r_1, r_2, \dots, r_n}$$

d'onde si conclude appunto: $f_{r_1, r_2, \dots, r_n} = A_{r_1, r_2, \dots, r_n}$, c. d. d.

Il teorema ora dimostrato, conosciuto sotto il nome di *regola di moltiplicazione delle matrici*, non è che un'estensione della regola di moltiplicazione dei determinanti, colla quale viene a coincidere nel caso speciale di $m = n$.

§ 9.º—Sostituzioni lineari—Riduzione delle matrici.

470. Al § 4º del terzo capitolo si è discorso delle sostituzioni fra un numero limitato di oggetti. Nulla però impedisce di parlare anche di *sostituzioni fra un numero infinito di oggetti*. Per caratterizzare una infinità di oggetti, basterà p. es. considerare ogni numero reale (cfr. Cap. VII) come un oggetto e riguardare come diversi fra loro gli oggetti rappresentati da numeri diversi. Si ha così una così detta *semplice infinità* di oggetti. Si avrà invece una *doppia infinità* di oggetti, caratterizzando ogni oggetto per mezzo di due numeri (*parametri*) (*), ognuno dei quali possa assumere infiniti valori entro il campo di variabilità ad esso assegnato. Se, per un oggetto qualunque, sia x_1 il valore del suo *primo parametro*, x_2 il valore del *secondo parametro*, l'oggetto stesso si potrà rappresentare con P_{x_1, x_2}, e due oggetti P_{x_1, x_2}, P_{y_1, y_2} allora soltanto si riterranno essere uguali, quando sia $x_1 = y_1$ ed $x_2 = y_2$. Affatto analogamente si potrà, mediante n parametri variabili, definire un sistema *n volte infinito* di oggetti.

471. Consideriamo un sistema n volte infinito di oggetti $P_{x_1, x_2, \dots, x_n}$, potendo ogni parametro assumere tutti i valori possibili. Per definire

(*) I *parametri* si chiamano anche *indici*, quando la loro variabilità è limitata al campo dei numeri interi.

una ***sostituzione*** fra questi oggetti converrà trovare una certa legge mediante la quale dati i parametri dell'oggetto $P_{x_1, x_2, \ldots, x_n}$, si possano individuare i parametri $y_1, y_2, \ldots, y_n$ dell' oggetto $P_{y_1, y_2, \ldots, y_n}$ che lo deve sostituire. Questa legge però dovrà essere di tal natura che a due oggetti distinti non venga sostituito lo stesso oggetto. Tutto ciò si suol esprimere brevemente dicendo che *fra i due sistemi di variabili* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *ed* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *si stabilisce una corrispondenza univoca;* tale cioè che ad ogni sistema speciale di valori delle $x_1, x_2, \ldots, x_n$ corrisponda un unico sistema di valori delle $y_1, y_2, \ldots, y_n$, e reciprocamente.

472. Fra le infinite leggi atte a definire una corrispondenza univoca fra i sistemi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e i sistemi $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ha specialissima importanza quella fornita dalle formole:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n \\ x_2 &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n \end{aligned} \tag{1}$$

che costituiscono una così detta *sostituzione lineare.* In queste formole i coefficienti a_{ij} (*coefficienti della sostituzione*) sono dei numeri *costanti* fissati a piacere, colla sola restrizione che il determinante:

$$D = \Sigma \pm a_{11}a_{22} \ldots a_{nn} ,$$

che si chiama il *modulo* della sostituzione, abbia valore diverso da zero. È evidente che le (1) danno per ogni sistema di valori speciali delle y un unico sistema di valori per le x. Reciprocamente, dati a piacere i valori delle x, dalle stesse formole (1) *risolute rispetto alle* y, si ricaverà sempre, (art. 427) per la supposizione fatta circa il modulo, un unico sistema di valori, parimenti finiti, delle y.

473. Ciò premesso, se, dopo aver trasformato le $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nelle $y_1, y_2, \ldots, y_n$ mediante la sostituzione (1), si trasformino ulteriormente le $y_1, y_2, \ldots, y_n$ in altre nuove variabili mediante la sostituzione lineare:

$$\begin{aligned} y_1 &= b_{11}z_1 + b_{12}z_2 + \ldots + b_{1n}z_n \\ y_2 &= b_{21}z_1 + b_{22}z_2 + \ldots + b_{2n}z_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= b_{n1}z_1 + b_{n2}z_2 + \ldots + b_{nn}z_n \end{aligned} \tag{2}$$

che ha per modulo:

$$D' = \Sigma \pm b_{11}b_{22} \ldots b_{nn} ,$$

il risultato sarà evidentemente una sostituzione lineare delle x_1,

$x_2, \dots, x_n$ nelle $z_1, z_2, \dots, z_n$. E precisamente, si avrà:

$$\begin{aligned} x_1 &= c_{11}z_1 + c_{12}z_2 + \dots + c_{1n}z_n \\ x_2 &= c_{21}z_1 + c_{22}z_2 + \dots + c_{2n}z_n \\ &\dots\dots\dots\dots \\ x_n &= c_{n1}z_1 + c_{n2}z_2 + \dots + c_{nn}z_n \end{aligned} \tag{3}$$

dove:

$$c_{ih} = a_{i1}b_{1h} + a_{i2}b_{2h} + \dots + a_{in}b_{nh}, \tag{4}$$

come facilmente si riconosce sostituendo nelle (1) i valori delle y dati dalle (2).

Le relazioni (4) ci dicono (art. 466) che il determinante:

$$\Delta = \sum \pm c_{11}c_{22} \dots c_{nn}$$

della sostituzione (3) altro non è che il prodotto dei determinanti D e D' delle (1) e (2). Cioè che: *il modulo della sostituzione lineare ottenuta come risultante di più sostituzioni lineari eseguite successivamente è uguale al prodotto dei moduli delle singole sostituzioni componenti.*

La risultante di più sostituzioni lineari S, T, U, ... eseguite successivamente si indicherà con STU ... e si chiamerà il *prodotto* delle sostituzioni S, T, U, ... È importante notare che tale prodotto non è, in generale, indipendente dall'ordine dei fattori.

In base a questa definizione, se si rappresenti brevemente la sostituzione (1) col simbolo $[a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}]$, la relazione fra le sostituzioni (1), (2) e (3) verrà espressa dalla scrittura:

$$[a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}][b_{11}, b_{22}, \dots, b_{nn}] = [c_{11}, c_{22}, \dots, c_{nn}]$$

ed il teorema relativo ai loro moduli dalla formula:

$$\begin{aligned} &\bmod\{[a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}][b_{11}, b_{22}, \dots, b_{nn}]\} = \\ &= \bmod[a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}] \cdot \bmod[b_{11}, b_{22}, \dots, b_{nn}]. \end{aligned}$$

474. Se i coefficienti a_{ij} della matrice di (1) sono tutti nulli per $i \gtreqless j$, e i coefficienti $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots$ tutti eguali ad 1, ad eccezione di a_{hh}, cui si potrà assegnare un valore qualunque ε, purchè diverso da zero, la sostituzione (1) prende la forma semplicissima:

$$x_1 = y_1, \dots, x_{h-1} = y_{h-1}, x_h = \varepsilon y_h, x_{h+1} = y_{h+1}, \dots, x_n = y_n.$$

Questa sostituzione, che noi designeremo per brevità col simbolo ε_h, ha evidentemente per modulo lo stesso numero ε.

Se anche $a_{hh} = 1$, cioè per $\varepsilon = 1$, la ε_h si riduce alla così detta sostituzione *identica,* che lascia inalterati i valori di tutte le variabili. La sostituzione identica si chiama anche sostituzione *unità* e si designa conseguentemente con 1. Così, ad esempio, l'eguaglianza $\varepsilon_h \cdot (\varepsilon^{-1})_h = 1$ esprimerà che la risultante di ε_h e di $(\varepsilon^{-1})_h$ lascia inalterati i valori di tutte le variabili.

È manifesto che: *la matrice di un prodotto* $S \cdot \varepsilon_h$ *non differisce dalla matrice della sostituzione* S *se non in questo che tutti gli elementi della* h^{ma} *colonna della matrice di* S *sono stati moltiplicati per* ε.

475. Va poi rilevata la sostituzione speciale, che designeremo col simbolo $S_{h,k}$, rappresentata dalle formole:

$$\ldots, x_{h-1} = y_{h-1}, x_h = y_h + y_k, x_{h+1} = y_{h+1}, \ldots, (h \lesseqgtr k).$$

Il suo modulo ha evidentemente il valore 1. È poi facile riconoscere che *la matrice di un prodotto* $S \cdot S_{h,k}$ *non è altro che la stessa matrice di* S *in cui agli elementi della colonna* k^{ma} *si siano aggiunti i corrispondenti elementi della colonna* h^{ma}.

Potrà giovare di distinguere le sostituzioni $S_{h,k}$ in *destrorse* e *sinistrorse* secondochè sia $h < k$ ovvero $h > k$.

476. Le sostituzioni dei tipi ε_h ed $S_{h,k}$ si chiamano *elementari*, perchè, come ora verrà dimostrato, *ogni sostituzione lineare è il prodotto di successive sostituzioni lineari dei due tipi* ε_h *ed* $S_{h,k}$.

477. Per dimostrare questo teorema basterà dimostrare quest'altro, che si può considerare come suo equivalente:

Se un determinante $\Sigma \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{nn}$ *non è nullo, la sua matrice si può sempre dedurre dalla matrice (matrice fondamentale di ordine* n*) che ha gli elementi della diagonale principale uguali ad* 1 *e tutti gli altri eguali a zero, mediante le seguenti operazioni:*

a) *moltiplicazione di una colonna per un numero* ε *diverso da zero;*

b) *aggiunzione agli elementi di una colonna degli elementi corrispondenti di altra colonna.*

Invero, ove si fosse dimostrato ciò, le successive matrici dedotte colle operazioni *a*) e *b*) dalla matrice fondamentale (che rappresenta la sostituzione identica) si presenterebbero (art. 474 e 475) come matrici di successive risultanti di sostituzioni dei tipi ε_h ed S_{hk} e la risultante finale sarebbe appunto la sostituzione $[a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}]$.

478. Venendo ora alla dimostrazione dell'ultimo teorema, cominciamo dal notare che gli elementi della prima orizzontale del determinante dato $\Sigma \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{nn}$ non possono essere tutti nulli, chè altrimenti lo stesso determinante dato sarebbe nullo contro il supposto. Per conseguenza, se il primo elemento a_{11} fosse nullo, si potrà surrogarlo con un numero diverso da zero aggiungendo alla prima colonna un'altra colonna il cui primo elemento non sia nullo. Si potrà poi ottenere che gli altri elementi della prima orizzontale diventino tutti nulli, ove già non lo fossero, aggiungendo alla colonna h^{ma}, se p. es. a_{1h} non fosse nullo, la prima colonna moltiplicata per il rapporto fra $-a_{1h}$ ed il primo elemento, che è diverso da zero. Dopo ciò il determinante dato avrà assunto la

forma:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

ed il suo valore sarà ancora diverso da zero; cosicchè gli $n-1$ elementi $\alpha_{22}, \alpha_{23}, \dots, \alpha_{2n}$ non potranno essere tutti nulli.

Se α_{22} fosse nullo, lo si potrà dunque surrogare con un numero differente da zero aggiungendo alla 2ª colonna una delle consecutive il cui secondo elemento non sia nullo; dopodichè aggiungendo alle $n-2$ colonne consecutive la stessa seconda colonna, moltiplicata ogni volta per un opportuno fattore, si potrà ottenere che gli elementi $\alpha_{23}, \alpha_{24}, \dots, \alpha_{2n}$ si riducano ad essere tutti nulli. Si troverà con ciò il determinante dato ridotto alla forma:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} & \dots & \alpha_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

con valore ancora diverso da zero, talchè almeno uno degli elementi $\alpha_{33}, \alpha_{34}, \dots, \alpha_{3n}$ sarà differente da zero.

Procedendo allo stesso modo si perverrà evidentemente alla forma:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} \tag{5}$$

con le $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{nn}$ tutte differenti da zero.

Ci resta a vedere come si passi dalla matrice fondamentale:

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{matrix} \tag{6}$$

alla matrice (5). Per ottenere ciò, si comincierà dal moltiplicare la prima colonna di (6) per α_{11}. Si aggiungerà poi alla prima colonna di (6) la seconda moltiplicata per α_{21} e si moltiplicherà quindi la seconda colonna per α_{22}. In terzo luogo si aggiungerà alla prima colonna la terza moltiplicata per α_{31}, alla seconda la terza moltiplicata per α_{32} e si moltiplicherà quindi la terza colonna per α_{33}. Dopo ciò le prime tre orizzontali di (6) si saranno cangiate nelle prime tre di (5), restando le altre affatto inalterate. Operando poi allo stesso modo sulla quarta orizzontale di (6), la

si cangierà nella quarta di (5), e così di seguito finchè l'intera matrice (6) si trovi cangiata nella (5).

479. Non è senza importanza di notare che la seconda parte della riduzione, cioè la riduzione della forma (6) alla forma (5) è stata fatta, per quanto riguarda l'operazione (*b*) dell'art. 477, in modo che a qualsiasi colonna si sono soltanto aggiunte le colonne di indice più elevato. Questa osservazione si traduce infatti, per quanto si è detto all'art. 477, nel seguente teorema:

Ogni sostituzione lineare del tipo:

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_{11}y_1 \\ x_2 &= \alpha_{21}y_1 + \alpha_{22}y_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= \alpha_{n1}y_1 + \alpha_{n2}y_2 + \ldots + \alpha_{nn}y_n \end{aligned}$$

è la risultante di sostituzioni lineari del tipo ε_h *e di sostituzioni* $S_{h,k}$ *del tipo sinistrorso (in cui cioè* $h > k$*).*

Note ed Esercizi.

1. Se le equazioni (1) dell'art. 472 si risolvono rispetto alle y e dopo ciò si considerino le y come le variabili *da trasformarsi* e le x come le *trasformate*, le formole così ottenute rappresenteranno una sostituzione lineare che si chiama la *reciproca* della (1).

La reciproca di una sostituzione S si suole designare con S^{-1}. Riconoscere che $S^{-1}.S = 1$, e che:

$$S^{-1}_{h,k} = (-1)_k \cdot S_{hk} \cdot (-1)_k = (-1)_h \, S_{hk}(-1)_h.$$

2. Dimostrare che:

$$S_{h,h+2} = S_{h,h+1} \cdot S_{h+1,h+2} \cdot S^{-1}_{h,h+1} \cdot S^{-1}_{h+1,h+2}$$

e dedurne che *ogni sostituzione destrorsa* $S_{h,k}$ *è la risultante di sostituzioni del tipo* $S_{i,i+1}$ *e del tipo* $(-1)_h$.

3. Stabilire, per $h < k-2$, la formola generale:

$$S_{hk} = T_{h,k} \cdot T^{-1}_{h,k-1} \cdot T_{h+1,k-1} \cdot T^{-1}_{h+1,k}$$

in cui:

$$T_{i,j} = S_{i,i+1} \cdot S_{i+1,i+2} \ldots S_{j-2,j-1} \cdot S_{j-1,j}, \qquad (i < j)$$

4. È importante di notare che *lo scambio di due colonne in una matrice è un'operazione che si può sempre considerare come risultante dalle due specie di operazioni già considerate all'art.* 477. Invero, si riconoscerà facilmente che lo scambio fra la colonna di posto h e quella di posto k è uguale al prodotto operativo:

$$C_{hk} \cdot [-1]_k \cdot C_{kh} \cdot [-1]_k \cdot C_{hk} \cdot [-1]_h$$

dove C_{ij} significa aggiungere la colonna di posto i a quella di posto j, ed $[\varepsilon]_i$ moltiplicare per ε la colonna di posto i.

5. Si deduca di qui che: se S e T sono due sostituzioni lineari, le cui matrici differiscono soltanto per lo scambio fra la h^{ma} e k^{ma} colonna, si ha:

$$S^{-1}T = S_{h,k} \cdot S^{-1}_{k,h} \cdot S_{h,k} \cdot (-1)_h = T^{-1}S.$$

6. Dimostrare che: affinchè una sostituzione lineare $[a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}]$ sia permutabile con $S_{h,k}$, è necessario e sufficiente che sia $a_{hh} = a_{kk}$ e che siano nulli tutti quegli altri coefficienti che hanno per primo indice k o per secondo indice h.

7. Supposto, per fissare le idee, $n = 3$, si interpretino le variabili x_1, x_2, x_3 come le ordinarie coordinate cartesiane ortogonali di un punto qualunque P appartenente ad una certa figura A dello spazio a tre dimensioni; le y_1, y_2, y_3 come le coordinate di un altro punto P' appartenente ad un'altra figura A'. È chiaro che la sostituzione lineare $[a_{11}, a_{22}, a_{33}]$ rappresenterà una corrispondenza fra le due figure A ed A' tale che ad ogni punto P di A corrisponda un unico punto P' di A' e reciprocamente. La stessa sostituzione si potrà quindi interpretare geometricamente come una trasformazione o *deformazione* della figura A, cioè come il passaggio della figura *primitiva* A alla figura *deformata* A'.

Secondo questa interpretazione, la sostituzione elementare $(\varepsilon)_i$ ci rappresenta una così detta *dilatazione secondo l'asse delle* x_i. Ogni retta parallela all'asse delle x_i viene trasformata in se stessa; però ogni segmento della retta viene dilatato di una quantità proporzionale al segmento stesso, cioè, precisamente di una quantità eguale al segmento stesso moltiplicato pel numero costante $\varepsilon - 1$, il così detto *coefficiente di dilatazione*.

Le sostituzioni elementari $S_{h,k}$ rappresentano invece i così detti *scorrimenti*. Considerando la figura A come l'insieme di tanti fogli piani tutti fra loro paralleli, si chiama scorrimento quella deformazione che consiste nel far scorrere ogni foglio piano sopra se stesso in modo che tutti i suoi punti si muovano secondo una unica direzione fissa (*direzione dello scorrimento*), cosicchè una retta qualunque normale ai piani di scorrimento venga deviata dalla primitiva direzione di un certo angolo costante ω (*angolo di scorrimento*). È facile riconoscere che una siffatta deformazione cambia bensì la forma, ma *lascia inalterato il volume di ogni porzione della figura* A. Si riconoscerà agevolmente che $S_{h,k}$ rappresenta appunto uno scorrimento che ha per direzione la direzione negativa dell'asse delle x_h, coi piani di scorrimento perpendicolari all'asse delle x_k, e con un angolo di scorrimento di 45°.

Il teorema dell'art. 476 si traduce dunque in quest'altro, assai importante in meccanica ed in fisica matematica: *ogni deformazione lineare si può sempre ottenere come la risultante di successive dilatazioni e scorrimenti aventi, così quelle come questi, le loro direzioni parallele a quelle di tre assi ortogonali fissi ed essendo i piani di scorrimento perpendicolari all'uno od all'altro di questi stessi assi.*

8. Si dimostri che, per ottenere uno scorrimento che abbia la stessa direzione e gli stessi piani di scorrimento di $S_{h,k}$ ma un angolo di scorrimento qualsivoglia φ, basta considerare, in luogo di $S_{h,k}$, la sostituzione:

$$(\varepsilon^{-1})_k \cdot S_{h,k} \cdot (\varepsilon)_k \,, \text{ cioè: } \ldots, x_h = y_h + \varepsilon y_k \,, x_k = y_k \ldots$$

determinando convenientemente il valore di ε.

9. Una sostituzione lineare $[a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}]$ si dirà *simmetrica*, se si abbia $a_{ij} = a_{ji}$ per tutti i valori degli indici i ed j.

La deformazione rappresentata da una sostituzione lineare simmetrica equivale a tre dilatazioni secondo certi tre assi fra loro ortogonali, e reciprocamente.

Lo studioso, che abbia già qualche familiarità colla geometria analitica dello spazio, riconoscerà facilmente che i tre assi di dilatazione corrispondenti alla sostituzione simmetrica $[a_{11}, a_{22}, a_{33}]$ altro non sono che i tre assi della superficie di 2° ordine che ha per equazione:

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = \text{cost.}^e.$$

10. Nel definire, in modo generico, la deformazione della figura A, non si è escluso il caso particolare in cui, pur cambiandosi le posizioni dei

singoli punti della figura, restino però invariate le distanze degli uni rispetto agli altri. In questo caso non vi è cambiamento di forma, ma soltanto un movimento o meglio uno *spostamento rigido* di tutta la figura. È facile riconoscere che *qualsiasi spostamento rigido, nel quale però resti fermo quel punto che si trova nell'origine delle coordinate, è sempre rappresentato da una sostituzione lineare.*

Indicando in genere con un'unica lettera ξ quel punto che ha le coordinate ξ_1, ξ_2, ξ_3, siano infatti x, α due punti qualunque della figura A ed y, β i corrispondenti punti di A'. Dovendo restare inalterata la distanza fra x ed α, come pure la distanza di ciascuno di tali punti dall'origine, che resta fissa, si avrà:

$$(x_1-\alpha_1)^2+(x_2-\alpha_2)^2+(x_3-\alpha_3)^2=(y_1-\beta_1)^2+(y_2-\beta_2)^2+(y_3-\beta_3)^2$$

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=y_1^2+y_2^2+y_3^2$$

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2=\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2$$

e sottraendo dalla prima eguaglianza le altre due membro a membro:

$$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3=\beta_1y_1+\beta_2y_2+\beta_3y_3.$$

A questa relazione se ne potranno aggiungere altre due consimili:

$$\alpha'_1x_1+\alpha'_2x_2+\alpha'_3x_3=\beta'_1y_1+\beta'_2y_2+\beta'_3y_3$$

$$\alpha''_1x_1+\alpha''_2x_2+\alpha''_3x_3=\beta''_1y_1+\beta''_2y_2+\beta''_3y_3$$

considerando altre due coppie di punti corrispondenti α', β' ed α'', β''. Si vede dunque che le x_1, x_2, x_3 sono legate alle y_1, y_2, y_3 da tre relazioni lineari, le quali, risolute rispetto alle x, daranno appunto una sostituzione lineare del tipo da noi considerato, c. d. d.

Le sostituzioni lineari rappresentanti uno spostamento rigido si chiamano *ortogonali*. Di queste sostituzioni tratteremo in seguito più diffusamente. Per ora ci limitiamo ad osservare che esse costituiscono un altro sotto-gruppo (*gruppo ortogonale*). È infatti evidente che il risultato di due successivi spostamenti rigidi è ancora uno spostamento rigido.

11. Se i coefficienti a_{ij} della sostituzione (1) sono tutti numeri interi, è facile riconoscere che la riduzione, fatta all'art. 478, della sua matrice alla forma (5) si potrà effettuare per mezzo di semplici addizioni e sottrazioni di colonne, giacchè con queste operazioni si potranno rendere nulli tutti gli elementi della prima orizzontale a cominciare dal secondo, dipoi similmente tutti quelli della seconda a cominciare dal terzo e così via. Dunque *se una sostituzione lineare ha tutti i coefficienti interi, essa è la risultante di una sostituzione a coefficienti pure interi, del tipo* (5) *dell'art.* 478 *e di altre successive sostituzioni del tipo* S_{hk} *od* $S^{-1}{}_{hk}$.

12. Se i coefficienti a_{ij} sono numeri interi, la riduzione fatta poi nella seconda parte dell'art. 478 si traduce nella formola:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \dots 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \dots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \cdot\cdot\, a_{nn} \end{bmatrix} \begin{aligned} &=(a_{11})_1\cdot S_{21}{}^{a_{21}}(a_{22})_2\times \\ &\times(S_{31})^{a_{31}}(S_{32})^{a_{32}}(a_{33})_3\times \\ &\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ &\times(S_{n1})^{a_{n1}}(S_{n2})^{a_{n2}}\dots(S_{n,n-1})^{a_{n,n-1}}(a_{nn})_n. \end{aligned}$$

13. Dall'insieme delle due note che precedono risulta il seguente teorema: *ogni sostituzione lineare a coefficienti interi è la risultante di sostituzioni del tipo* $S_{h,k}$ *ed* $S^{-1}{}_{h,k}$, *e di sole* n *sostituzioni del tipo* ε_h, *per le quali* ε *è un numero intero.*

CAPITOLO VI.

ELEMENTI DEL CALCOLO DELLE FUNZIONI RAZIONALI INTERE.

§ 1.° — Il determinante delle differenze e il principio di identità per le funzioni intere di una o più variabili.

480. Sia $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ una funzione intera di grado n della variabile x, che designeremo brevemente con $f(x)$. Supponiamo, se è possibile, che l'equazione:

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

ammetta un numero di soluzioni distinte superiore al suo grado. Esisteranno allora $n+1$ numeri distinti x_1, x_2, ..., x_{n+1} tali da aversi simultaneamente:

$$\begin{array}{c} a_0x_1^n + a_1x_1^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x_1 + a_n = 0 \\ a_0x_2^n + a_1x_2^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x_2 + a_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_0x_{n+1}^n + a_1x_{n+1}^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x_{n+1} + a_n = 0. \end{array} \tag{2}$$

Ora queste equazioni, se si considerino come conosciute le x_1, x_2, ..., x_{n+1} e come incognite le a_0, a_1, ..., a_n, altro non sono che un sistema di $n+1$ equazioni lineari ed omogenee fra le $n+1$ incognite a_0, a_1, ..., a_n, e il determinante del sistema è:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \ldots & x_{n+1}^n \end{vmatrix}$$

Noi dimostreremo fra poco che questo determinante è sempre diverso da zero, qualora, come si è supposto, i valori x_1, x_2, ..., x_{n+1} siano tutti distinti fra loro. Possiamo dunque concludere (art. 432) che le equazioni (2) non possono essere soddisfatte che per valori nulli delle incognite. Si avrà cioè:

$$a_0 = 0 \ , \ a_1 = 0 \ , \ a_2 = 0 \ , \ \ldots \ , \ a_n = 0.$$

È dunque assurdo il supporre che l'equazione (1) ammetta più di n soluzioni, a meno che i coefficienti tutti della (1) siano eguali a zero, nel qual caso l'equazione (1) sarebbe evidentemente soddisfatta da qualsiasi valore di x Dunque: *un'equazione algebrica di grado* n *ad un'incognita, i cui coefficienti non siano tutti nulli, non può ammettere più soluzioni distinte di quanto è il suo grado.*

481. Il determinante nel quale ci siamo incontrati all'art. prec. è della forma:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots 1 & 1 \\ a & b & c & d & \dots g & e \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 & \dots g^2 & e^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 & \dots g^3 & e^3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \qquad (3)$$

Ora noi possiamo (art. 419), senza alterarne il valore, sottrarre dalla sua ultima orizzontale la penultima moltiplicata per a, fatto ciò dalla penultima sottrarre la terzultima moltiplicata per a, e così di seguito, finchè per ultimo dalla seconda orizzontale sottrarremo la prima orizzontale moltiplicata per a. Ci è dunque lecito di scrivere:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots 1 \\ 0 & b-a & c-a & \dots e-a \\ 0 & b^2-ab & c^2-ac & \dots e^2-ae \\ 0 & b^3-ab^2 & c^3-ac^2 & \dots e^3-ae^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & c-a & \dots e-a \\ b^2-ab & c^2-ac & \dots e^2-ae \\ b^3-ab^2 & c^3-ac^2 & \dots e^3-ae^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

come è chiaro, se si sviluppa poi secondo gli elementi della prima orizzontale; e dividendo tutti gli elementi della prima colonna pel fattore comune $b-a$, quelli della seconda pel fattore comune $c-a$, e così via, (cfr. art. 417):

$$D = (b-a)(c-a)(d-a)\dots(e-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots 1 \\ b & c & \dots e \\ b^2 & c^2 & \dots e^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \qquad (4)$$

Il determinante nel secondo membro è ancora di forma affatto simile a quella del determinante (3); soltanto è di un ordine inferiore di un'unità. Si dimostrerà quindi in modo affatto identico che:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots 1 \\ b & c & d & \dots e \\ b^2 & c^2 & d^2 & \dots e^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = (c-b)(d-b)\dots(e-b) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots 1 \\ c & d & \dots e \\ c^2 & d^2 & \dots e^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix},$$

onde, sostituendo ciò in (4), si avrà:

$$D = (b-a)(c-a)(d-a)\dots(e-a)(c-b)(d-b)\dots(e-b) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots 1 \\ c & d & \dots e \\ c^2 & d^2 & \dots e^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

Così procedendo si otterrà evidentemente per il primitivo determinante (3) l'espressione:

$$\begin{aligned} D = (b-a)(c-a)(d-a)\ . \ . \ . \ (g-a)(e-a) \\ (c-b)(d-b)\ . \ . \ . \ (g-b)(e-b) \\ (d-c)\ . \ . \ . \ (g-c)(e-c) \\ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ (e-g) \end{aligned}$$

cioè: *il valore del determinante* (3) *è uguale al prodotto delle differenze che si ottengono sottraendo da uno qualunque dei numeri* a, b, c, . . . , e *uno qualunque di quelli che lo precedono.*

Per questa ragione il determinante (3) è conosciuto sotto il nome di *determinante delle differenze.* E spesso anche chiamato determinante di *Vandermonde.*

482. Corollario. — *Il determinante* (3) *non può avere il valore zero, ad eccezione del caso in cui almeno due delle* a, b, c , ... , e *abbiano valore uguale.* In questo caso infatti, e soltanto in questo, si annulla almeno una delle differenze di cui D è il prodotto.

Resta così dimostrata l'asserzione fatta pocanzi (art. 480).

483. Due funzioni intere $f(x)$ e $\varphi(x)$ di una variabile x si dicono *identicamente uguali* quando esse prendono lo stesso valore per ogni valore speciale dato alla variabile.

Ciò premesso, è facile dimostrare, dopo quanto precede, che: *affinchè due funzioni intere di una variabile sieno identicamente uguali, è necessario e sufficiente che siano fra loro eguali i coefficienti delle potenze omologhe di* x *nelle due funzioni.*

Siano infatti:

$$f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \ldots + a_{m-1}x + a_m$$

e

$$\varphi(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \ldots + b_{m-1}x + b_m$$

le due funzioni intere supposte identicamente uguali, che noi potremo sempre rappresentare sotto la forma ora scritta, poichè se esse fossero di gradi differenti (m ed $n < m$), si potrebbero sempre ritenere di egual grado m sostituendo con lo zero i coefficienti delle più alte potenze di x mancanti in una delle due funzioni.

Poichè per supposto si ha per ogni valore di x,

$$f(x) = \varphi(x)$$

si avrà anche:

$$f(x) - \varphi(x) = 0\,,$$

cioè si avrà per ogni valore di x:

$$(a_0-b_0)x^m+(a_1-b_1)x^{m-1}+\ldots+(a_{m-1}-b_{m-1})x+(a_m-b_m)=0.$$

Quest'ultima equazione, che è di grado m, avrebbe dunque infinite

soluzioni. Ora ciò non è possibile, se non quando i coefficienti delle singole potenze di x siano tutti eguali a zero; poichè noi sappiamo (art. 480) che un'equazione di grado m con coefficienti non tutti nulli non può ammettere più di m soluzioni differenti.

Dev' essere dunque:

$$a_0 - b_0 = 0\ ,\ a_1 - b_1 = 0\ ,\ \ldots\ ,\ a_m - b_m = 0,$$

onde:

$$a_0 = b_0\ ,\ a_1 = b_1\ ,\ .\ \ .\ ,\ a_m = b_m\ ,$$

come appunto dovevasi dimostrare.

484. Più generalmente si dice che due funzioni intere $f(x, y, z, \ldots)$ e $\varphi(x, y, z, \ldots)$ di più variabili sono identicamente uguali, quando esse assumono egual valore per ogni speciale sistema di valori che si dia alle variabili.

Ora è facile dedurre dalla dimostrazione precedente, relativa al caso di una sola variabile, che *affinchè due funzioni intere:*

$$=\sum(x)f\ A_{\alpha\beta\gamma\ldots} x^\alpha y^\beta z^\gamma \ldots\ ,\quad \varphi(x) = \sum B_{\alpha\beta\gamma\ldots} x^\alpha y^\beta z^\gamma \ldots$$

di più variabili siano identicamente uguali, è necessario e sufficiente che siano eguali i coefficienti dei termini omologhi (contenenti cioè le stesse potenze di x, y, z, ...).

Cioè dev' essere:

$$A_{\alpha\beta\gamma\ldots} = B_{\alpha\beta\gamma\ldots}$$

per tutti i sistemi di indici α, β, γ....

Consideriamo p. es. due funzioni intere $f(x\ , y)$ e $\varphi(x\ , y)$ di due variabili, che supporremo avere valore uguale per ogni sistema di valori di x ed y.

Ordinando tali funzioni secondo le potenze decrescenti di x si potrà scrivere come nel caso precedente:

$$f(x\ , y) = p_0 x^m + p_1 x^{m-1} + \ldots + p_m$$
$$\varphi(x\ , y) = q_0 x^m + q_1 x^{m-1} + \ldots + q_m$$

colla differenza che le p e q, anzichè essere delle *costanti*, saranno ora delle funzioni intere della sola y. Tenendo fissa la y e facendo variare la sola x si potranno però momentaneamente riguardare come costanti anche le p e q; onde si avrà, pel teorema dell'art. prec., dovendo le due funzioni di x riuscire identicamente uguali:

$$p_i = q_i.$$

Poichè ora quest' uguaglianza deve aver luogo comunque sia stato fissato il valore di y, ciò significa che le due funzioni intere di y rappresentate con p_i e q_i devono essere identicamente uguali; onde, sempre per l' art. prec., dovranno coincidere i coefficienti delle potenze omonime di y in queste due funzioni. Concludiamo dunque evidentemente che i due termini omologhi di $f(x\ , y)$ e $\varphi(x\ , y)$ contenenti una stessa potenza di x ed una stessa potenza di y avranno necessariamente lo stesso coefficiente numerico.

In modo affatto simile può ora condursi la dimostrazione per il caso di funzioni di tre variabili, e così via.

Note ed Esercizi.

1. Dimostrare che:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & \dots & n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1^{n-1} & 2^{n-1} & 3^{n-1} & \dots & n^{n-1} \end{vmatrix} = \lfloor\underline{2}\,\lfloor\underline{3}\,\lfloor\underline{4} \dots \lfloor\underline{n-1}.$$

2. Dimostrare che:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 & \delta^2 \\ \alpha^4 & \beta^4 & \gamma^4 & \delta^4 \end{vmatrix} = -(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)(\gamma-\delta) \times (\alpha+\beta+\gamma+\delta).$$

3. Verificare le identità:

$$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$$

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$$

4. Verificare l'identità:

$$(x-y)(z-t) + (y-z)(x-t) + (z-x)(y-t) = 0$$

e dedurne poi l'altra:

$$2(x-z)(x-t)(y-z)(y-t) = (x-z)^2(y-t)^2 + (x-t)^2(y-z)^2 - (x-y)^2(z-t)^2.$$

5. Dimostrare e generalizzare l'identità:

$$(abc)d_x = (dbc)a_x + (adc)b_x + (abd)c_x$$

in cui la parentesi (abc) sta in luogo del determinante $\Sigma \pm a_1 b_2 c_3$ ed a_x rappresenta la forma lineare $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$.

6. Verificare l'identità:

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)(p^2+q^2+r^2+s^2) = (ap-bq+cr-ds)^2 + (aq+bp-cs-dr)^2 + (ar-bs-cp+dq)^2 + (as+br+cq+dp)^2.$$

7. Verificare l'identità:

$$(a_1^2+\dots+a_n^2)(b_1^2+\dots+b_n^2) - (a_1b_1+\dots+a_nb_n)^2 = (a_1-b_1)^2 + \dots + (a_n-b_n)^2.$$

8. Verificare che $\dfrac{A^2}{B^2} =$

$$\frac{[2aBC - cCA - dBA - eA^2]^2 - 4[aB^2 + bA^2 - cAB][aC^2 - dCA + gA^2]}{[2bAC - cCA - eBA + dB^2]^2 - 4[bA^2 + aB^2 - cAB][bC^2 - eCB + gB^2]}.$$

9. Il prodotto di n fattori

$$x(x-h)(x-2h)\dots(x-(n-1)h)$$

dei quali ognuno differisce dal precedente di una costante h (detta *differenza*), si chiama *potenza fattoriale* n^{ma} *del numero* x. Fissata, una volta per sempre, la costante h, questo prodotto si potrà designare brevemente con $x^{\overline{n}}$. Del resto, oltre al caso di $h=0$, nel quale si ricade nell'ordinaria potenza n^{ma} di x, il solo caso importante si può ridurre a quello di $h=-1$; pel quale si definirà:

$$x^{\overline{n}} = x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1).$$

Si dimostrerà facilmente che, data una funzione intera del grado n in x

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n,$$

si possono sempre, ed in un unico modo, determinare altri $n+1$ coefficienti $A_0, A_1, \dots, A_n$ pei quali si abbia identicamente:

$$f(x) = A_0x^{\overline{n}} + A_1x^{\overline{n-1}} + \dots + A_{n-1}x + A_n,$$

cosicchè *il principio di identità seguita a sussistere con enunciato affatto analogo a quello già dato, quando le funzioni intere di* x *si ordinano secondo le potenze fattoriali, anzichè secondo le potenze ordinarie della variabile* x.

§ 2.° — Il principio delle diseguaglianze.

485. Introducendo per maggiore comodità la notazione $A =|= B$ per esprimere che A non è uguale a B, un sistema qualunque di disuguaglianze fra funzioni intere di $x, y, z, \dots, u$ si può evidentemente ridurre alla forma:

$$\begin{array}{ll} f_1(x, y, z, \dots, t) =|= 0 & \\ f_2(x, y, z, \dots, t) =|= 0 & \\ \dots\dots\dots\dots & (1 \\ f_m(x, y, z, \dots, t) =|= 0, & \end{array}$$

essendo le $f_1, f_2, \dots, f_m$ simboli di funzioni intere delle k variabili $x, y, z, \dots, t$.

Ci proponiamo di dimostrare che *qualunque sia il numero* m *delle disuguaglianze* (1) *ed il numero* k *delle variabili* x, y, z,..., u *in esse contenute, esistono sempre dei valori* (*interi e positivi*) *delle* x, y, z, ..., t *per le quali il sistema* (1) *è soddisfatto.*

Ben inteso s'intende escluso il caso in cui qualcuna delle funzioni $f_1, f_2, \dots, f_m$ fosse nulla identicamente (art. 483); giacchè in tal caso il sistema (1) non potrebbe evidentemente, essere soddisfatto per alcun sistema di valori delle $x, y, z, \dots, u$.

486. Cominciamo dal caso più semplice in cui $k=1$. Detti $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ i gradi delle funzioni intere $f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)$ rispettivamente, è chiaro che, per soddisfare il sistema di diseguaglianze:

$$f_1(x) =|= 0, f_2(x) =|= 0, \dots, f_m(x) =|= 0,$$

basterà prendere per x un numero naturale che non sia radice di alcuna delle equazioni:

$$f_1(x)=0\ ,\ f_2(x)=0\ ,\ \ldots\ ,\ f_m(x)=0. \qquad (2)$$

Ora ciò è possibile, ed anzi in infiniti modi, giacchè i numeri naturali sono in numero infinito nel mentre che i valori di x soddisfacenti l'uno o l'altro delle (2) non può in ogni caso (art. 480) superare la somma $\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_m$ dei gradi delle singole equazioni (2).

487. Stabiliremo ora il teorema generale enunciato all'art. 485 col metodo dell'induzione matematica, supponendolo cioè già dimostrato per i sistemi di diseguaglianze che contengono $k-1$ variabili $y\ ,z\ ,\ldots,u$ e facendo vedere che, in tale supposto, esso è valido anche pel sistema (1) che contiene le k variabili $x, y, z,\ldots,t$.

Invero, poichè, per supposto, nessuna delle m funzioni $f_i(x\ ,y,\ z\ ,\ldots,u)$ è nulla identicamente, si potrà scrivere:

$$f_1(x\ ,y\ ,z\ ,\ldots,u)=\varphi_1\cdot x^{\mu_1}+\psi_1\cdot x^{\mu_1-1}+\ldots$$

$$f_2(x\ ,y\ ,z\ ,\ldots,u)=\varphi_2\cdot x^{\mu_2}+\psi_2\cdot x^{\mu_2-1}+\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f_m(x\ ,y\ ,z\ ,\ldots,u)=\varphi_m\cdot x^{\mu_m}+\psi_m\cdot x^{\mu_m-1}+\ldots$$

essendo $\varphi_1\ ,\varphi_2\ ,\ldots,\varphi_m$ funzioni delle sole $y\ ,z\ ,\ldots,u$, nessuna delle quali è identicamente nulla.

Per l'ipotesi fatta, esisteranno dei valori interi e positivi delle $y\ ,z\ ,\ldots,u$ pei quali sia:

$$\varphi_1 =|= 0\ ,\ \varphi_2 =|= 0\ ,\ \ldots\ ,\ \varphi_m =|= 0\ ;$$

e, determinate in questo modo le $y\ ,z\ ,\ldots,u$, si potrà poi sempre risolvere il sistema di disuguaglianze:

$$\varphi_1 x^{\mu_1}+\psi_1 x^{\mu_1-1}+\ldots =|= 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\varphi_m x^{\mu_m}+\psi_m x^{\mu_m-1}+\ldots =|= 0$$

coll'unica incognita x, precisamente come all'art. 486, giacchè nessuno dei primi membri è nullo identicamente rispetto ad x, essendo almeno i coefficienti delle più alte potenze di x certamente diversi da zero.

Esercizi.

1. Dimostrare l'esistenza di k numeri $A_1\ ,A_2\ ,\ldots,A_k$ tali che il sistema (1) dell'art. 485 è soddisfatto da ogni sistema $x\ ,y\ ,z\ ,\ldots,u$ pel quale sia:

$$x \gtreqless A_1\ ,\ y \gtreqless A_2\ ,\ \ldots\ ,\ z \gtreqless A_k.$$

2. Essendo $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dei numeri assegnati fra loro tutti distinti, dimostrare che gli $\lfloor n$ valori che può assumere la forma lineare:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$$

per tutte le possibili sostituzioni fra le $x_1, x_2, \ldots, x_n$, saranno tutti distinti fra loro, purchè si fissino opportunamente i valori (interi e positivi) dei coefficienti $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

§ 3.º – Sulla determinazione delle funzioni intere. Interpolazione.

488. *Esiste sempre una funzione della variabile* x, *intera e del grado* n, *ed una soltanto, la quale, per certi* n+1 *valori distinti* $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ *della variabile, assume certi* n + 1 *valori prefissati* $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$.

Infatti, perchè:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

sia la funzione richiesta, è necessario e sufficiente che siano soddisfatte le condizioni:

$$a_0x_1{}^n + a_1x_1{}^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x_1 + a_n = A_1$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_0x_{n+1}{}^n + a_1x_{n+1}{}^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x_{n+1} + a_n = A_{n+1}$$

Sono queste $n+1$ equazioni di primo grado rispetto alle $n+1$ incognite: $a_0, a_1, \ldots, a_{n+1}$, col determinante diverso da zero (articolo 482). È dunque sempre possibile di soddisfarle ed in un unico modo (art. 427).

489. È poi facile verificare, colla sostituzione diretta dei valori speciali $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$, che la funzione richiesta ammette la seguente espressione:

$$\sum_{i=1}^{i=n+1} A_i \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_{n+1})}{(x_i-x_1)(x_i-x_2)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_{n+1})}.$$

Questa formola notevolissima è conosciuta col nome di *formola d'interpolazione di Lagrange;* giacchè col vocabolo *interpolazione* si designa in generale il problema di determinare una funzione di una o più variabili, la quale assuma valori prefissati per certi dati valori delle variabili.

490. Passiamo ora a vedere come il teorema dell'art. 488 si possa estendere alla determinazione delle funzioni intere di più variabili. Noi supporremo, per fissare le idee, che si tratti della determinazione di una funzione intera $f(x, y\, z)$ di tre sole variabili x, y, z, la quale sia del grado m nella x, del grado n nella y, e del grado r nella z.

Se il valore di x si scelga a piacere fra $m+1$ numeri distinti dati $x_1, x_2, \ldots, x_{m+1}$ e così si scelga a piacere il valore di y fra certi $n+1$ numeri $y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}$ e quello di z fra certi $r+1$ valori speciali $z_1, z_2, \ldots, z_{r+1}$, è chiaro che in tutto si potranno così prestabilire $(m+1)(n+1)(r+1)$ sistemi speciali di valori delle tre variabili x, y, z. Ciò posto: *se* x_i, y_i, z_i *è una qualunque di queste terne, ed* $A_{i,j,h}$ *il corrispondente valore della funzione, gli* $(m+1)(n+1)(r+1)$ *valori* $A_{i:j,h}$ *si possono sempre prefissare ad arbitrio; dopodichè la funzione resterà completamente determinata.*

Sia infatti:

$$\varphi_0(x, y)\cdot z^r + \varphi_1(x, y)\cdot z^{r-1} + \ldots + \varphi_{r-1}(x, y)\cdot z + \varphi_r(x, y) \quad (1)$$

la funzione richiesta, ordinata secondo le potenze della z; cosicchè ognuna delle φ esser deve una funzione intera di x ed y di grado non superiore ad m nelle x e non superiore ad n nelle y. Le condizioni necessarie e sufficienti affinchè la (1) soddisfi al problema, sono date dagli $(m+1)(n+1)$ sistemi di equazioni del tipo:

$$\begin{aligned} &\varphi_0(x_i, y_j)z_1^r + \varphi_1(x_i, y_j)z_1^{r-1} + \ldots \\ &\qquad + \varphi_{r-1}(x_i, y_j)z_1 + \varphi_r(x_i, y_j) = A_{ij1} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (2) \\ &\varphi_0(x_i, y_j)z_{r+1}^r + \varphi_1(x_i, y_j)z_{r+1}^{r-1} + \ldots \\ &\qquad + \varphi_{r-1}(x_i, y_j)z_{r+1} + \varphi_r(x_i, y_j) = A_{ij, r+1} \end{aligned}$$

quanti cioè se ne deducono da quello ora scritto scegliendo a piacere i due indici i ed j entro i rispettivi limiti.

Le equazioni (2) risolute rispetto alle $\varphi(x_i, y_j)$ ci daranno per $\varphi_h(x_i, x_j)$, precisamente come all'art. 488, un valore perfettamente determinato che indicheremo con $B_{i,j}^{(h)}$. È dunque necessario e sufficiente che ogni funzione $\varphi_h(x, y)$ soddisfi alle $(m+1)(n+1)$ condizioni:

$$\varphi_h(x_i, y_j) = B_{ij}^{(h)}, \quad i = 1, 2, \ldots, m+1, \ j = 1, 2, \ldots, n+1. \quad (3)$$

Il teorema da dimostrarsi è così ricondotto al caso di funzioni intere di due sole variabili; e questo caso si ricondurrà poi allo stesso modo a quello di funzioni di una sola variabile, cioè al teorema, già dimostrato vero, dell'art. 488.

Note ed Esercizi.

1. Secondo l'art. 489 la funzione intera di secondo grado in x che per i valori a, b, c di x prende risp. i valori A, B, C è data da:

$$A\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + B\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + C\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}.$$

Si identifichi questa espressione con quella che si otterrebbe applicando il metodo dell'art. 488. Per $A=a$, $B=b$, $C=c$ si otterrà, in particolare, la identità:

$$(a-b)(b-c)(c-a) = a(b^2-c^2) + b(c^2-a^2) + c(a^2-b^2).$$

2. **Verificare l'identità:**

$$(b-c)(a-x)(a-y)+(c-a)(b-x)(b-y)+(a-b)(c-x)(c-y)=$$
$$(a-b)(b-c)(a-c).$$

3. **La formola d'interpolazione di Lagrange si estende facilmente al caso di due o più variabili. Se $f(x, y)$ è una funzione intera di x ed y, del grado m in x ed n in y, la quale per la coppia di valori:**

$$x = x_i\,,\ y = y_j\ ;\ i = 1, 2, \ldots, m+1\,,\ j = 1, 2, \ldots, n+1$$

assuma il valore A_{ij}, e si ponga per brevità:

$$\varphi(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{m+1})\ ,\ \psi(y)=(y-y_1)(y-y_2)\ldots(y-y_{n+1})$$

$$\varphi'(x) = \sum_{i=1}^{i=m+1}\frac{\varphi(x)}{(x-x_i)},\ \psi'(y) = \sum_{j=1}^{j=n+1}\frac{\psi(y)}{(y-y_j)},$$

applicando due volte di seguito la formola di Lagrange, si troverà:

$$f(x,y) = \sum_{j=1}^{j=n+1}\sum_{i=1}^{i=m+1}\left\{\frac{A_{ij}}{\varphi'(x_i)\,\psi'(y_j)}\cdot\frac{\varphi(x)\,\psi'(y)}{(x-x_i)(y-y_j)}\right\}.$$

4. **La formola di Lagrange si può anche generalizzare in un altro senso proponendosi di *trovare una funzione razionale* $f(x)$, *quoziente di una funzione intera del grado* m *e di una funzione intera del grado* n, *conoscendo gli* $m+n+1$ *valori* $A_1, A_2, \ldots, A_{m+n+1}$ *di* $f(x)$ *corrispondenti a certi* $m+n+1$ *valori distinti* $x_1, x_2, \ldots, x_{m+n+1}$ *della variabile* x. Questo problema è risoluto in generale dalla formola (di *Cauchy*):**

$$f(x) = \frac{\sum A_1 A_2 \ldots A_{n+1}\dfrac{(x-x_{n+2})(x-x_{n+3})\ldots(x-x_{m+n+1})}{D(x_1, \ldots, x_{n+1}\,;\,x_{n+2}, \ldots, x_{n+m+1})}}{\sum A_1 A_2 \ldots A_n\dfrac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{D(x_1, \ldots, x_n\,;\,x_{n+1}, \ldots, x_{n+m+1})}}$$

dove $D(p, q, \ldots, r\,;\,p', q', \ldots, r')$ rappresenta il prodotto di tutte le differenze che si ottengono sottraendo una qualunque delle $p, q, \ldots, r$ da una qualunque delle $p', q', \ldots, r'$; la prima sommatoria dovendo estendersi a tutte le possibili ripartizioni degli indici $1, 2, \ldots, m+n+1$ in due gruppi, l'uno composto di soli $n+1$ indici e l'altro composto coi rimanenti; e analogamente per la seconda sommatoria.

Si verifichi che l'espressione ora scritta soddisfa in generale al problema. Si vegga poi, per quanto riguarda l'univocità della sua risoluzione, l'art. 485 delle *Teorie Introduttorie* pubblicate da A. Capelli e G. Garbieri (Padova — Tip. Sacchetto, 1886).

5. **Esistono altre funzioni razionali $f(x)$, oltre alla funzione $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$, per le quali si abbia identicamente $f(x).f(-x)=1$?**

§ 4.° — La regola di Ruffini. — Abbassamento del grado di un'equazione di cui si conosca una soluzione.

491. Se:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \qquad (1)$$

è una funzione intera di x del grado n, e si dia ad x un valore speciale qualunque α, si avrà:

$$f(\alpha) = a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\alpha + a_n \qquad (2)$$

e sottraendo quest'uguaglianza dalla (1):

$$f(x)-f(\alpha)=a_0(x^n-\alpha^n)+a_1(x^{n-1}-\alpha^{n-1})+\ldots+a_{n-1}(x-\alpha). \qquad (3)$$

Poichè ora, come è facile verificare, si ha identicamente:

$$x^\mu-\alpha^\mu=(x-\alpha)\cdot[x^{\mu-1}+\alpha x^{\mu-2}+\alpha^2x^{\mu-3}+\ldots+\alpha^{\mu-2}x+\alpha^{\mu-1}],$$

sostituendo ciò nella (3) si ha:

$$\begin{aligned} f(x) - f(\alpha) = & \; a_0(x-\alpha)[x^{n-1} + \alpha x^{n-2} + \alpha^2x^{n-3} + \ldots + \alpha^{n-1}] \\ & + a_1(x-\alpha)[x^{n-2} + \alpha x^{n-3} + \alpha^2x^{n-4} + \ldots + \alpha^{n-2}] \\ & + a_2(x-\alpha)[x^{n-3} + \alpha x^{n-4} + \alpha^2x^{n-5} + \ldots + \alpha^{n-3}] \\ & + \ldots \\ & + a_{n-1}(x-\alpha) \end{aligned}$$

e raccogliendo il fattore comune $(x-\alpha)$ nel secondo membro e ordinando l'altro fattore secondo le potenze decrescenti di x:

$$f(x)-f(\alpha)=(x-\alpha)[p_0x^{n-1}+p_1x^{n-2}+p_2x^{n-3}+\ldots+p_{n-1}] \qquad (4)$$

dove si è posto per brevità:

$$\begin{aligned} p_0 &= a_0 \\ p_1 &= a_0\alpha + a_1 = p_0\alpha + a_1 \\ p_2 &= a_0\alpha^2 + a_1\alpha + a_2 = p_1\alpha + a_2 \\ p_3 &= a_0\alpha^3 + a_1\alpha^2 + a_2\alpha + a_3 = p_2\alpha + a_3 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_{n-1} &= a_0\alpha^{n-1} + a_1\alpha^{n-2} + \ldots + a_{n-1} = p_{n-2}\cdot\alpha + a_{n-1}. \end{aligned}$$

Come si vede, i cofficienti p_1, p_2, p_3, ... si ottengono colla regola semplicissima che *ogni coefficiente* p_i *è uguale al precedente* p_{i-1} *moltiplicato per* α *più* a_i. Questa regola è conosciuta sotto il nome di *regola di Ruffini.*

492. Applicando un' altra volta ancora a p_{n-1} la regola di Ruf-

fini, si otterrebbe:

$$p_n = a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\alpha + a_n,$$

cioè:

$$p_n = f(\alpha).$$

493. Supponiamo ora, come caso particolare, che α sia una soluzione dell'equazione:

$$f(x) = 0. \qquad (5)$$

Si avrà allora $f(\alpha) = 0$, onde la (4) diventa:

$$f(x) = (x - \alpha)\cdot[p_0x^{n-1} + p_1x^{n-2} + \ldots + p_{n-2}x + p_{n-1}].$$

Dunque: *se* α *è una soluzione dell'equazione* $f(x) = 0$, *il primo membro* $f(x)$ *è divisibile esattamente per la funzione* (di primo grado in x): $x - \alpha$, *cioè è uguale identicamente ad* $x - \alpha$ *moltiplicato per una funzione intera di grado* $n-1$ *in* x.

494. In questo stesso supposto, potendosi all'equazione (5) dare la forma:

$$(x - \alpha)(p_0x^{n-1} + p_1x^{n-2} + \ldots + p_{n-2}x + p_{n-1}) = 0,$$

è chiaro che, ove essa ammetta anche altre soluzioni differenti da α, quest'ultime dovranno soddisfare all'equazione di grado $n-1$:

$$p_0x^{n-1} + p_1x^{n-2} + \ldots + p_{n-2}x + p_{n-1} = 0. \qquad (6)$$

La conoscenza di una soluzione dell'equazione (5) permette dunque di abbassarne il grado di un'unità.

Note ed Esercizi.

1. L'osservazione dell'art. 492 è di molta importanza pel calcolo pratico del valore che prende una data funzione intera di x per un certo valore speciale della variabile.

Si calcoli, ad esempio, il valore di $3x^5-8x^4+13x^3-11x+20$ per $x=7$.

2. Si risolva l'equazione del terzo grado:

$$2x^3 - 6x^2 + 5x - 2 = 0$$

che ammette la soluzione $x = 2$, e quella del quarto:

$$x^4 + 3x^3 - 7x^2 - 27x - 18 = 0$$

che ammette le soluzioni $x = 3$ ed $x = -3$.

3. Abbassare al quarto grado l'equazione:

$$x^5 - 3x^4 - 12x + 40 = 0$$

che ammette la soluzione $x = 2$.

§ 5.° — Altra dimostrazione del principio d'identità.

495. Sia $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots$ una funzione intera di x del grado n, cosicchè $a_0 =|= 0$, e supponiamo che l'equazione $f(x) = 0$ ammetta n soluzioni distinte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Si ha primieramente, secondo il precedente §, un'identità della forma:

$$f(x) = (x - \alpha_1)f_1(x), \qquad (1)$$

dove:

$$f_1(x) = a_0x^{n-1} + p_1x^{n-2} + \ldots$$

è una funzione intera di x annullata dai valori $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ di x. Quindi poi un'identità analoga:

$$f_1(x) = (x - \alpha_2)(a_0x^{n-2} + q_1x^{n-3} + \ldots),$$

cosicchè sostituendo in (1) si può scrivere identicamente:

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(a_0x^{n-2} + q_1x^{n-3} + \ldots).$$

Poichè l' equazione:

$$a_0x^{n-2} + q_1x^{n-3} + \ldots = 0$$

ammette le soluzioni $\alpha_3, \alpha_4, \ldots, \alpha_n$, è chiaro che, così procedendo, si giungerà all'identità:

$$f(x) = a_0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \ldots (x - \alpha_n). \qquad (2)$$

496. L'identità (2) ci dice che l'equazione $f(x) = 0$ non può ammettere altre soluzioni all'infuori di $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Infatti, ogni soluzione di $f(x) = 0$ deve soddisfare, in virtù dell' identità (2), l' equazione:

$$a_0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \ldots (x - \alpha_n) = 0$$

ossia anche, poichè a_0 è diverso da zero, l'equazione:

$$(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \ldots (x - \alpha_n) = 0$$

la quale ci dice che x deve coincidere con l'uno o con l'altro dei numeri $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Abbiamo ottenuto con ciò una nuova dimostrazione del principio di identità per le funzioni intere di una variabile, giacchè questo principio non è, come già si è visto (art. 483) che un'immediata conseguenza del teorema che qualunque equazione non può ammettere più soluzioni di quanto è il suo grado.

Nota.

1. Per dimostrare il principio di identità bastando far vedere che l' identità:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n = 0 \qquad (\alpha)$$

ha per conseguenza necessaria $a_0 = 0$, $a_1 = 0$, . . . , $a_n = 0$, può, a prima vista, sembrare lecita la seguente dimostrazione semplicissima. Poichè la (α) è per supposto soddisfatta da ogni valore di x, lo sarà in particolare dal valore $x=0$, onde dev'essere intanto $a_0=0$; cosicchè la (α) si riduce ad

$$a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = 0$$

e, dividendo per x, ad

$$a_1 + a_2 x + \ldots + a_n x^{n-1} = 0. \qquad (\beta)$$

Ripetendo sull'identità (β) lo stesso raziocinio si avrà poi $a_1 = 0$, e così di seguito. Perchè questa dimostrazione non è ammissibile?

In seguito (Capitolo XI) sarà facile di riconoscere come questo procedimento dimostrativo si possa rendere rigoroso considerando, in luogo del valore nullo, un valore *piccolissimo* di x.

§ 6.° — Nuova dimostrazione e generalizzazione della formola del binomio.

497. Il numero delle combinazioni n ad n di $m + m'$ oggetti: A_1 , A_2 , . . . , A_m , B_1 , B_2 , . . . , B_n si può ottenere computando dapprima quelle combinazioni che contengono solo elementi A, il cui numero è (art. 216):

$$\binom{m}{n} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n};$$

poi quelle che contengono $n-1$ elementi A ed un elemento B, il cui numero è $\binom{m}{n-1}\binom{m'}{1}$; in terzo luogo quelle con $n-2$ elementi A e due elementi B, che sono in numero di $\binom{m}{n-2}\binom{m'}{2}$; e così di seguito. Si ha dunque la relazione:

$$\binom{m+m'}{n} = \binom{m}{n} + \binom{m}{n-1}\binom{m'}{1} + \binom{m}{n-2}\binom{m'}{2} + \ldots + \binom{m'}{n}. \qquad (2)$$

498. Poichè i due membri della (2) sono evidentemente due funzioni intere (del grado n) dei due numeri arbitrarii m ed m', questa relazione, sussistendo per tutti gli infiniti valori interi e positivi di m ed m', non può essere (cfr. § 1°) che un'identità rispetto ad m ed m'. Sarà cioè, qualunque siano i valori interi o frazionarii, positivi o negativi, che si attribuiscano alle variabili x ed y:

$$\binom{x+y}{n} = \binom{x}{n} + \binom{x}{n-1}\binom{y}{1} + \binom{x}{n-2}\binom{y}{2} + \ldots + \binom{y}{n}. \qquad (3)$$

499. È assai utile, in molti calcoli algebrici, di considerare, oltre alla *potenza ennesima ordinaria* di x, anche la *potenza ennesima fattoriale*, che noi indicheremo con $x^{\overline{n}}$, definita dall'uguaglianza:

$$x^{\overline{n}} = x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1). \qquad (4)$$

Si vede dalla (1) che, mediante questa notazione, si può anche scrivere:

$$\binom{-x}{n} = \frac{-x(-x-1)(-x-2)\dots(-x-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\dots n} = (-1)^n \frac{x^{\overline{n}}}{\lfloor n}. \quad (5)$$

Pertanto se nell'identità (3) si cangia, come è lecito, x in $-x$ ed y in $-y$, e se ne moltiplicano i due membri per $(-1)^n \lfloor n$, essa prende la forma:

$$(x+y)^{\overline{n}} = x^{\overline{n}} + \binom{n}{1} x^{\overline{n-1}} y + \binom{n}{2} x^{\overline{n-2}} y^{\overline{2}} + \dots + y^{\overline{n}} \quad (6)$$

che ci da per la potenza fattoriale ennesima di un binomio uno sviluppo del tutto analogo a quello che si ha per la potenza ennesima ordinaria (cfr. art. 219).

500. Poichè la (6) è un'identità, la somma dei termini della più alta dimensione (cfr. art. 225) in x ed y nel primo membro dev'essere uguale alla corrispondente somma nello sviluppo del secondo membro. Uguagliando queste due somme si deduce dalla (6):

$$(x+y)^n = x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \dots + y^n \quad (6)'$$

cioè l'ordinaria formola del binomio.

Note ed Esercizi.

1. Le formole (6) e (6)' non sono che casi particolari della formola di *Vandermonde*:

$$(x+y)^{n|h} = x^{n|h} + \binom{n}{1} x^{n-1|h} y + \binom{n}{2} x^{n-2|h} y^2 + \dots + y^{n|h}$$

relativa alla definizione più generale di potenza fattoriale ennesima (a differenza h):

$$x^{n|h} = x(x+h)(x+2h)\dots(x+(n-1)h),$$

i casi particolari $h=1$ ed $h=0$. Del resto la formola di Vandermonde si deduce immediatamente dalla (6) cangiando x ed y risp. in $\frac{x}{h}$ ed $\frac{y}{h}$, e moltiplicando poi entrambi i membri per h^n.

2. Come analoga generalizzazione della formola dell'art. 218 si ha l'identità:

$$(x_1+y+1)(x_2+y+2)\dots(x_n+y+n) = y^{\overline{n}} + y^{\overline{n-1}} \sum_{i=1}^{i=n}(x_i+1)$$

$$+ y^{\overline{n-2}} \sum_{i<j \leqq n} (x_i+1)(x_j+2) + y^{\overline{n-3}} \sum_{i<j<h \leqq n} (x_i+1)(x_j+2)(x_h+3)$$

$$+ \dots + (x_1+1)(x_2+2)\dots(x_n+n)$$

(Cfr. *Sopra certi sviluppi di determinanti*, nei Rendiconti della R.ª Accademia delle Scienze di Napoli. Marzo, 1889).

3. Se nell'identità dell'art. 220, oltre a porre successivamente $x=1$, $2, \ldots, n$ e poi sommare i risultati, si ponga poi anche successivamente $x=-1, -2, \ldots, -n$ e si sommino del pari i risultati membro a membro, si ottengono le due uguaglianze:

$$(n+1)^{k+1}-1=n+\binom{k+1}{1}\sigma_{1,n}+\binom{k+1}{2}\sigma_{2,n}+\ldots+\binom{k+1}{k}\sigma_{k,n}$$

$$(-1)^k n^{k+1}=n-\binom{k+1}{1}\sigma_{1,n}+\binom{k+1}{2}\sigma_{2,n}-\ldots+(-1)^k\binom{k+1}{k}\sigma_{k,n}$$

dalle quali si deducono per via di somma e sottrazione le seguenti:

$$\frac{1}{2}\left\{(n+1)^{k+1}+(-1)^k n^{k+1}-1\right\}=n+\binom{k+1}{2}\sigma_{2,n}+\binom{k+1}{4}\sigma_{4,n}+\ldots$$
$$+\frac{1}{2}\left[1+(-1)^k\right]\binom{k+1}{k}\sigma_{k,n}$$

$$\frac{1}{2}\left\{(n+1)^{k+1}-(-1)^k n^{k+1}-2\right\}=\binom{k+1}{1}\sigma_{1,n}+\binom{k+1}{3}\sigma_{3,n}+\ldots$$
$$+\frac{1}{2}\left[1-(-1)^k\right]\binom{k+1}{k}\sigma_{k,n}$$

che sono evidentemente preferibili alla formola dell'art. 220 per il calcolo successivo delle $\sigma_2, \sigma_4, \sigma_6, \ldots$ e delle $\sigma_1, \sigma_3, \sigma_5, \ldots$.

4. S'immaginino scritte le combinazioni $k+1$ a $k+1$ degli $m+1$ elementi $a_1, a_2, \ldots, a_{m+1}$ in modo che gli indici si seguano sempre nell'ordine naturale. È chiaro che ve ne saranno $\binom{m}{k}$ che cominciano con a_1, $\binom{m-1}{k}$ che cominciano con a_2, e così via. Si ha dunque la relazione:

$$\binom{m+1}{k+1}=\binom{m}{k}+\binom{m-1}{k}+\binom{m-2}{k}+\ldots+\binom{k}{k}$$

che moltiplicata per $\lfloor k$ può anche scriversi:

$$\frac{(m+1)^{\underline{k+1}}}{k+1}=m^{\underline{k}}+(m-1)^{\underline{k}}+\ldots+3^{\underline{k}}+2^{\underline{k}}+1^{\underline{k}}.$$

5. Riconoscere come la formola ora data si possa scrivere, senza modificazioni essenziali, sotto la forma:

$$1^{\overline{k}}+2^{\overline{k}}+3^{\overline{k}}+\ldots+m^{\overline{k}}=\frac{m^{\overline{k+1}}}{k+1}$$

che ci da immediatamente la somma delle potenze fattoriali $\overline{k}^{me}$ *dei primi* n *numeri naturali.*

6. *La somma* $\sigma_{k,n}$ *delle potenze ordinarie* k^{me} *dei primi* n *numeri naturali ammette la seguente espressione:*

$$\sigma_{k,n}=\frac{\mathrm{n}^{\overline{k+1}}}{\mathrm{k+1}}+\mathrm{A}_1\frac{\mathrm{n}^{\overline{k}}}{\mathrm{k}}+\mathrm{A}_2\frac{\mathrm{n}^{\overline{k-1}}}{\mathrm{k-1}}+\ldots+\mathrm{A}_{k-1}\frac{\mathrm{n}^{\overline{2}}}{2}+\mathrm{A}_k\mathrm{n}$$

ove le A sono quei numeri (indipendenti da n e dipendenti soltanto da k) che verificano l'identità:

$$x^k = x^{\overline{k}} + A_1 x^{\overline{k-1}} + A_2 x^{\overline{k-2}} + \dots + A_{k-1}x + A_k.$$

Ponendo infatti successivamente in questa identità $x=1, 2, \dots, n$, sommando poi i risultati ottenuti membro a membro ed applicando la formola della nota precedente, si ottiene appunto l'espressione di cui si tratta.

7. Si riconosca, mediante quest'ultima espressione di $\sigma_{k,n}$, che:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1^k + 2^k + \dots + n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1}.$$

Quest' uguaglianza sussiste del resto per ogni valore reale di k, eccetto $k=-1$. (Cfr. il *Messenger of mathematics*, XII, 87-88).

8. Si dimostri la formola:

$$\binom{n}{1}1^i - \binom{n}{2}2^i + \binom{n}{3}3^i - \dots \pm \binom{n}{n}n^i = 0$$

per i intero e positivo minore di n.

9. Qualunque sia l'intero positivo i, si ha:

$$\binom{n}{1}1^{\overline{i}} - \binom{n}{2}2^{\overline{i}} + \binom{n}{3}3^{\overline{i}} - \dots \pm \binom{n}{n}n^{\overline{i}} = (-1)^{n+1}\underline{|i}\binom{i-1}{n-1}$$

(Cfr. *L' analisi algebrica e l' interpretazione fattoriale delle potenze*, § VII. Giornale di Matematiche. Vol. XXXI).

10. Dimostrare l'identità:

$$x^{\overline{m}}x^{\overline{n}} = x^{\overline{m+n}} - \binom{m}{1}\binom{n}{1}x^{\overline{m+n-1}} + \underline{|2}\binom{m}{2}\binom{n}{2}x^{\overline{m+n-2}} - \dots$$

Si giungerà facilmente al risultato ponendo il prodotto $x^{\overline{m}}x^{\overline{n}}$ sotto la forma $x^{\overline{m}}\left[(x+m)-m\right]^{\overline{n}}$, sviluppando quindi col teorema di Vandermonde e tenendo poi presente l' identità:

$$x^{\overline{m}}(x+m)^{\overline{k}} = x^{\overline{m+k}}.$$

§ 7.° — Legge di derivazione — Sviluppo di Taylor.

501. Sia:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n \tag{1}$$

una funzione intera, di grado n, dell'unica variabile x.

Dando ad x un *incremento* (positivo o negativo) h, si avrà:

$$f(x+h) = a_0(x+h)^n + a_1(x+h)^{n-1} + \dots + a_{n-1}(x+h) + a_n. \tag{2}$$

Sviluppando ora le potenze contenute nel secondo membro col teorema del binomio ed ordinando il risultato secondo le potenze

crescenti di h si trova:

$$\begin{aligned} f(x+h)=&(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n)\\ &+[na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+(n-2)a_2x^{n-3}+\dots+a_{n-1}]h\\ &+[\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots]h^2\\ &+\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Si vede dunque che la parte del secondo membro che non contiene h altro non è che la stessa $f(x)$; e che il coefficiente della prima potenza di h è dato dalla funzione, di grado $n-1$ in x, che si deduce da $f(x)$ portando in ogni termine di $f(x)$ l'esponente di x a coefficiente e diminuendo al tempo stesso l'esponente di un'unità. La funzione dedotta così da $f(x)$ con questa legge, che chiameremo *legge di derivazione*, si suole designare con $f'(x)$ e si chiama *derivata* di $f(x)$. Cosicchè, se la $f(x)$ è definita dalla (1), si ha:

$$f'(x)=na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+\dots+2a_{n-2}x+a_{n-1}. \tag{3}$$

Applicando la legge di derivazione al termine a_n, ossia in generale ad una *costante*, si ottiene lo zero, poichè scrivendo $a_n=a_n\cdot x_0$ si ottiene appunto come risultato $0\cdot a_nx^{-1}$, cioè zero.

502. Applicando alla nuova funzione $f'(x)$ la stessa legge di derivazione si otterrà una funzione di grado $n-2$ in x, che si chiama la ***seconda derivata*** di $f(x)$ e si designa conseguentemente con $f''(x)$. Essa è data da:

$$\begin{aligned} f''(x)=n(n-1)a_0x^{n-2}&+(n-1)(n-2)a_1x^{n-3}+\dots\\ &+3\cdot 2a_{n-3}x+2a_{n-2}. \end{aligned} \tag{4}$$

In generale si indica con $f^{(k)}(x)$ la funzione, di grado $n-k$, che si ottiene applicando k volte successivamente ad $f(x)$ la legge di derivazione.

Si avrà dunque:

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x)=n(n-1)\dots(n-k+1)a_0x^{n-k}&\\ +(n-1)(n-2)\dots(n-k)a_1x^{n-k-1}+\dots& \end{aligned}$$

dove ogni coefficiente numerico è il prodotto di k interi consecutivi; onde, dividendo entrambi i membri per $\underline{|k}$, si può scrivere più comodamente:

$$\begin{aligned} \frac{f^{(k)}(x)}{\underline{|k}}=\binom{n}{k}a_0x^{n-k}+\binom{n-1}{k}a_1x^{n-k-1}&\\ +\binom{n-2}{k}a_2x^{n-k-2}+\dots.& \end{aligned} \tag{5}$$

Per $k=n$ si ha una semplice costante:

$$f^{(n)}(x)=n\cdot n-1\cdot n-2\dots 2a_0=\underline{|n}\cdot a_0,$$

onde per $k>n$ sarà poi sempre $f^{(k)}(x)=0$.

503. Vediamo ora quale sia in generale il coefficiente di h^k nello sviluppo di $f(x+h)$ secondo le potenze di h. Sviluppando ciascuna potenza nel secondo membro della (2) col teorema del binomio si trova subito come coefficiente di h^k l'espressione:

$$\binom{n}{k}a_0x^{n-k}+\binom{n-1}{k}a_1x^{n-k-1}+\binom{n-2}{k}a_2x^{n-k-2}+\dots$$

cioè, per la (5), precisamente $\frac{f^{(k)}(x)}{\lfloor k}$. Questo sviluppo (detto sviluppo di *Taylor*) sarà dunque:

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+h^2\frac{f''(x)}{\lfloor 2}+h^3\frac{f'''(x)}{\lfloor 3}+\dots+h^n\frac{f^{(n)}(x)}{\lfloor n}. \qquad (6)$$

504. Se nell'eguaglianza (6), che vale qualunque siano i valori di x e di h, scambiamo x con h, il che non altera evidentemente il primo membro, si deduce altresì:

$$f(x+h)=f(h)+xf'(h)+x^2\frac{f''(h)}{\lfloor 2}+x^3\frac{f'''(h)}{\lfloor 3}+\dots+x^n\frac{f^{(n)}(h)}{\lfloor n} \qquad (7)$$

e facendo ora $h=0$:

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{\lfloor 2}f''(0)+\dots+\frac{x^n}{\lfloor n}f^{(n)}(0). \qquad (8)$$

505. Finalmente, se nella eguaglianza (7), che vale qualunque sia x, sostituiamo $x-h$ in luogo di x, essa ci dà (poichè $f[(x-h)+h]=f(x)$):

$$f(x)=f(h)+(x-h)f'(h)+(x-h)^2\frac{f''(h)}{\lfloor 2}+\dots+(x-h)^n\frac{f^{(n)}(h)}{\lfloor n} \qquad (9)$$

formola di cui in seguito avremo a far uso più di una volta.

506. Supponiamo si voglia calcolare la somma dei valori che assume una certa funzione intera $f(x)$ per gli n valori: $x=t+1$ $t+2$, $t+3$, ..., $t+n$, cioè il valore di:

$$\sum_{x=t+1}^{x=t+n}f(x)=\sum_{i=1}^{i=n}f(t+i).$$

Per il teorema di Taylor si ha:

$$f(t+x)=f(t)+\frac{f'(t)}{1}x+\frac{f''(t)}{\lfloor 2}x^2+\dots+\frac{f^{(k)}(t)}{\lfloor k}x^k$$

se k è il grado della funzione $f(x)$. Se ora in questa identità poniamo successivamente $x=1, 2, \dots, n$, e sommiamo poi i risultati membro a membro, otteniamo:

$$\sum_{i=1}^{i=n}f(t+i)=nf(t)+\frac{f'(t)}{1}\sigma_{1,n}+\frac{f''(t)}{\lfloor 2}\sigma_{2,n}+\dots+\frac{f^{(k)}(t)}{\lfloor k}\sigma_{k,n}$$

dove le $\sigma_{i\,,\,n}$ sono le stesse somme delle potenze i^{me} dei primi n numeri naturali, della cui valutazione ci siamo occupati (all'art. 220).

507. Esempio. — Si voglia valutare la somma S_n dei primi n termini della serie:

$$11\cdot 13 + 15\cdot 17 + 19\cdot 11 + \dots .$$

Si scriverà:

$$S_n = \sum_{x=1}^{x=n} (7 + 4x)(9 + 4x) = 63\cdot n + 64\,\sigma_{1\,,\,n} + 16\,\sigma_{2\,,\,n}$$

onde:

$$S_n = 63\cdot n + 32\cdot n(n+1) + \frac{8}{3}\,n(n+1)(2n+1).$$

Note ed Esercizi.

1. Data la funzione $f(x)=x^5-3x^4+2x^2+10$, calcolare i valori di

$$f(0)\,, f'(0)\,, f''(0)\,, \dots ; f(1)\,, f'(1)\,, f''(1)\,, \dots ; f(-1)\,, f'(-1)\,, f''(-1), \dots$$

2. Calcolare i valori delle somme:

$$1\cdot 3+2\cdot 4+3\cdot 5+4\cdot 6+5\cdot 7+ \dots +n(n+2)$$

$$1\cdot 3+3\cdot 5+5\cdot 7+7\cdot 9+ \dots +(2n-1)(2n+1)$$

$$1\cdot 3\cdot 5+3\cdot 5\cdot 7+5\cdot 7\cdot 9+ \dots +(2n-1)(2n+1)(2n+3).$$

3. Se, come già si è fatto altre volte, si ponga per brevità:

$$x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1) = x^{\overline{n}}$$

e una funzione intera di x, del grado n, sia data (come del resto è sempre lecito supporre) sotto la forma:

$$f(x) = A_0 x^{\overline{n}} + A_1 x^{\overline{n-1}} + \dots + A_{n-1}x + A_n \qquad (\alpha)$$

ove le A sono coefficienti costanti, si potrà definire una nuova funzione $f'(x)$ (*derivata fattoriale*) come segue:

$$\overline{f'(x)} = n\,A_0 x^{\overline{n-1}} + (n-1)A_1 x^{\overline{n-2}} + \dots + A_{n-1}.$$

Si ha allora una formola di sviluppo affatto analoga all'ordinaria di Taylor, cioè:

$$f(x+h)=f(x)+h\overline{f'(x)}+h^{\bar 2}\frac{\overline{f''(x)}}{|\underline{2}}+h^{\bar 3}\frac{\overline{f'''(x)}}{|\underline{3}}+ \dots + h^{\bar n}\frac{\overline{f^{(n)}(x)}}{|\underline{n}} \qquad (\beta)$$

che si dimostrerà con procedimento identico a quello tenuto per la formola di Taylor, colla sola differenza che in luogo dello sviluppo binomiale di Newton, si dovrà far uso di quello di Vandermonde (cfr. la Nota 1ª del § precedente).

4. Il problema dell'art. 506 si risolve in modo molto più semplice, quando si parta dalla funzione $f(x)$ ordinata, come nella (α) della nota

precedente:

$$f(x) = A_0 x^{\overline{k}} + A_1 x^{\overline{k-1}} + \ldots + A_{k-1} x + A_k.$$

Si troverà infatti, applicando la (β) e la formola data nella nota 7ª del § precedente:

$$\sum_{i=1}^{i=n} f(t+i) = n\overline{f(t)} + n^{\overline{2}} \frac{\overline{f'(t)}}{\underline{|2}} + n^{\overline{3}} \frac{\overline{f''(t)}}{\underline{|3}} + \ldots + n^{\overline{k+1}} \frac{\overline{f^{(k)}(t)}}{\underline{|k+1}}.$$

Introducendo la nuova funzione:

$$F(x) = A_0 \frac{x^{\overline{k+1}}}{k+1} + A_1 \frac{x^{\overline{k}}}{k} + \ldots + A_{k-1} \frac{x^{\overline{2}}}{2} + A_k x$$

per la quale si ha evidentemente (cfr. la nota 3ª):

$$\overline{F'(x)} = f(x)\ ,\ \overline{F''(x)} = \overline{f'(x)}\,,\ \overline{F'''(x)} = \overline{f''(x)}\,, \ldots,$$

si potrà anche scrivere:

$$\sum_{i=1}^{i=n} f(t+i) = n \frac{\overline{F'(t)}}{\underline{|1}} + n^{\overline{2}} \frac{\overline{F''(t)}}{\underline{|2}} + n^{\overline{3}} \frac{\overline{F'''(t)}}{\underline{|3}} + \ldots$$

onde si concluderà per la (β):

$$\sum_{i=1}^{i=n} f(t+i) = F(t+n) - F(t).$$

§ 8.º — Nuova dimostrazione della formola per la potenza di un polinomio

508. Le cose dette al § 6º si estendono senza difficoltà in modo da condurre a dimostrazioni affatto analoghe per la potenza n^{esima}, ordinaria o fattoriale, di un polinomio.

Invero, il numero delle combinazioni n ad n di $x_1 + x_2 + \ldots + x_m$ oggetti:

$$A_1\,, A_2\,, \ldots, A_{x_1}\,;\ B_1\,, B_2\,, \ldots, B_{x_2}\,;\ \ldots;\ D_1\,, D_2\,, \ldots, D_{x_m}$$

(essendo per ora $x_1, x_2, \ldots, x_m$ numeri interi positivi) si può ottenere riunendo in un sol gruppo tutte quelle combinazioni che contengono lo stesso numero α_1 di oggetti A, lo stesso numero α_2 di oggetti B, ..., lo stesso numero α_m di oggetti D, il cui numero è evidentemente:

$$\binom{x_1}{\alpha_1}\binom{x_2}{\alpha_2} \cdots \binom{x_m}{\alpha_m}$$

e sommando i numeri delle combinazioni di ogni gruppo. Poichè i numeri $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ che definiscono ogni singolo gruppo sono soltanto soggetti alla condizione:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m = n,$$

si avrà evidentemente:

$$\binom{x_1 + x_2 + \dots x_m}{n} = \sum_{\alpha_1+\dots+\alpha_m=n} \binom{x_1}{\alpha_1}\binom{x_2}{\alpha_2}\dots\binom{x_m}{\alpha_m}. \qquad (1)$$

Questa formola, sussistendo già per tutti gl'infiniti valori interi e positivi delle $x_1, \dots, x_n$, non può essere, analogamente a quanto si è osservato al § 6°), che un'identità rispetto alle stesse $x_1, \dots, x_n$ considerate come variabili affatto arbitrarie.

509. Se nella (1) si cangiano le $x_1, x_2, \dots, x_n$ risp. in $-x_1$, $-x_2, \dots, -x_n$ e si tien presente, come al § 6° che:

$$\binom{-x}{n} = (-1)^n \frac{x^{\overline{n}}}{\underline{|n}},$$

se ne deduce, moltiplicandone i due membri per $(-1)^n \underline{|n}$:

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^{\overline{n}} = \sum \frac{\underline{|n}}{\underline{|\alpha_1}\,\underline{|\alpha_2}\dots\underline{|\alpha_m}} x_1^{\overline{\alpha_1}} x_2^{\overline{\alpha_2}} \dots x_n^{\overline{\alpha_n}} \qquad (2)$$

cioè la formola per lo sviluppo della potenza fattoriale n^{esima} del polinomio $x_1 + x_2 + \dots + x_n$.

Uguagliando poi, dei due membri dell' identità (2), le parti di sviluppo contenenti le $x_1, x_2, \dots, x_m$ alla massima dimensione (cioè n) se ne trae immediatamente l'altra:

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n = \sum \frac{\underline{|n}}{\underline{|\alpha_1}\,\underline{|\alpha_2}\dots\underline{|\alpha_m}} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_m^{\alpha_m} \qquad (2)'$$

cioè la formola (cfr. art. 224) per lo sviluppo della potenza n^{esima} ordinaria del polinomio.

§ 9.° — Derivazione parziale — Sviluppo di Taylor per funzioni intere di più variabili.

510. Sia $f(x, y, z)$ una funzione razionale intera di più variabili, per es. di tre variabili indipendenti x, y, z. Se per un momento si imagini che di queste tre variabili una sola si faccia variare effettivamente mantenendo invece costanti le altre, è chiaro che la $f(x, y, z)$ si presenterà allora come funzione intera di una sola variabile, quella che varia effettivamente, e potrà derivarsi colla regola ordinaria rispetto a tale variabile considerando le altre come incorporate nei coefficienti costanti. Si ottengono così delle funzioni *derivate parziali* della funzione $f(x, y, z)$ rispetto alla quale si fa la derivazione.

Tali derivate si sogliono designare risp. con f'_x, f'_y, f'_z od anche con $D_x f$, $D_y f$, $D_z f$.

Questa seconda notazione, nella quale D_x, D_y, D_z si possono considerare come ***simboli operativi*** (cioè come simboli di operazioni speciali da applicarsi alle funzioni cui si premettano) è specialmente vantaggiosa quando occorra di rappresentare il risultato di più derivazioni parziali eseguite successivamente sulle $f(x, y, z)$ ora rispetto ad una, ora rispetto ad altra variabile.

Così, ad esempio, con

$$D_x D_x D_y D_y D_y D_z D_z f(x, y, z)$$

o, più brevemente, con

$$D_x^2 D_y^3 D_z^2 f(x, y, z)$$

verrà a significarsi quella funzione che si deduce da f derivando questa parzialmente, prima due volte rispetto alla z, poi tre volte rispetto ad y e finalmente due volte rispetto ad x.

Es: se $\quad f(x, y, z) = 3x^2y - 4x^3y^2z^2 - 3z^2y + 4,$

si avrà:

$$D_x f = 6xy - 12x^2y^2z^2$$
$$D_y f = 3x^2 - 8x^3yz^2 - 3z^2$$
$$D_z f = -8x^3y^2z - 6zy$$
$$D_x D_x f = D^2_x f = 6y - 24xy^2z^2$$
$$D_y D_x f = 6x - 24x^2yz^2, \text{ ecc.}$$

511. ***La funzione dedotta da* f *mediante un numero qualunque di successive derivazioni parziali rimane la stessa benchè si cangi in un modo qualunque l'ordine delle derivazioni.*** Per dimostrare ciò basterà evidentemente di far vedere che

$$D_y D_x f(x, y, z) = D_x D_y f(x, y, z).$$

Invero, se

$$f = \sum A_{\alpha, \beta, \gamma} x^\alpha y^\beta z^\gamma,$$

se ne deduce primieramente:

$$D_x f = \sum \alpha \cdot A_{\alpha\beta\gamma} x^{\alpha-1} y^\beta z^\gamma$$
$$D_y f = \sum \beta \cdot A_{\alpha\beta\gamma} x^\alpha y^{\beta-1} z^\gamma$$

onde appunto:

$$D_y D_x f = \sum \beta\alpha \cdot A_{\alpha\beta\gamma} x^{\alpha-1} y^{\beta-1} z^\gamma = D_x D_y f.$$

512. Teorema di Eulero.—***Se* f *è una funzione intera omogenea di grado* m *di più variabili, la somma delle sue derivate parziali rispetto alle variabili, moltiplicate per le variabili stesse, coincide colla primitiva funzione* f *moltiplicata per* m.**

Sia infatti per fissare le idee:

$$f = \sum A_{\alpha\beta\gamma} x^\alpha y^\beta z^\gamma$$

una funzione omogenea del grado m di tre variabili x, y, z; cosicchè gli esponenti α, β, γ sono soggetti in ogni suo termine alla condizione:

$$\alpha + \beta + \gamma = m. \tag{1}$$

Si ha come sopra:

$$D_x f = \sum \alpha \cdot A_{\alpha\beta\gamma} x^{\alpha-1} y^\beta z^\gamma$$

$$D_y f = \sum \beta \cdot A_{\alpha\beta\gamma} x^\alpha y^{\beta-1} z^\gamma$$

$$D_z f = \sum \gamma \cdot A_{\alpha\beta\gamma} x^\alpha y^\beta z^{\gamma-1}$$

e quindi moltiplicando queste espressioni risp. per x, y, z, e sommando:

$$x \cdot D_x f + y \cdot D_y f + z \cdot D_z f = \sum (\alpha + \beta + \gamma) \cdot A_{\alpha\beta\gamma} x^\alpha y^\beta z^\gamma ,$$

ossia appunto per la (1):

$$x \cdot D_x f + y \cdot D_y f + z \cdot D_z f = m \sum A_{\alpha\beta\gamma} x^\alpha y^\beta z^\gamma = m \cdot f.$$

513. Ci proponiamo ora di estendere il teorema di Taylor, già stabilito (art. 503) per funzioni intere di una variabile, ad una funzione intera $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ di un numero qualunque n di variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Si tratta, cioè, di sviluppare $f(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \ldots, x_n + h_n)$ secondo le potenze e i prodotti degli incrementi $h_1, h_2, \ldots, h_n$.

Noi giungeremo al risultato in modo assai semplice applicando più volte di seguite il teorema di Taylor pel caso di una sola variabile. A tale oggetto però, in luogo di scrivere:

$$\varphi(x + h) = \varphi(x) + h\varphi'(x) + \frac{h^2}{\underline{|2}}\varphi''(x) + \ldots$$

ci gioverà scrivere, secondo la nuova notazione:

$$\varphi(x + h) = \left\{1 + \frac{hD_x}{1} + \frac{h^2 D^2_x}{\underline{|2}} + \frac{h^3 D^3_x}{\underline{|3}} + \ldots\right\}\varphi(x).$$

Se m è il grado di $\varphi(x)$ rispetto ad x, il numero dei termini contenuti nella parentesi sarebbe $m + 1$; nulla però ci impedisce di considerare una serie indefinita di termini, poichè:

$$D_x{}^{m+1}\varphi(x) = D_x{}^{m+2}\varphi(x) = \ldots = 0.$$

Possiamo anche scrivere:

$$\varphi(x + h) = \left\{1 + \frac{hD_x}{1} + \frac{(hD_x)^2}{\underline{|2}} + \frac{(hD_x)^3}{\underline{|3}} + \ldots\right\}\varphi(x).$$

514. Sia primieramente una funzione razionale intera di due sole variabili $f(x_1, x_2)$, il cui grado complessivo in x_1 ed x_2 sia m. Si ha per l' articolo precedente:

$$f(x_1 + h_1, x_2) = \left\{1 + \frac{h_1 D_{x_1}}{\underline{|1}} + \ldots + \frac{h_1{}^m D_{x_1}{}^m}{\underline{|m}}\right\} f(x_1, x_2)$$

ed

$$f(x_1+h_1\,,x_2+h_2)=\left\{1+\frac{h_2 D_{x_2}}{\lfloor 1}+\ldots+\frac{h_2^m D^m_{x_2}}{\lfloor m}\right\}f(x_1+h_1\,,x_2)$$

d' onde segue:

$$f(x_1+h_1\,,x_2+h_2)=$$

$$\left\{1+\frac{h_2 D_{x_2}}{\lfloor 1}+\ldots+\frac{h_2^m D^m_{x_2}}{\lfloor m}\right\}\cdot\left\{1+\frac{h_1 D_{x_1}}{\lfloor 1}+\ldots+\frac{h_1^m D^m_{x_m}}{\lfloor m}\right\}f(x_1\,,x_2)$$

e indicando con Δ_k l'insieme di tutti quei termini dello sviluppo del prodotto delle due parentesi che sono di uno stesso grado k di derivazione complessiva rispetto ad x_1 e ad x_2:

$$f(x_1+h_1\,,x_2+h_2)=\{1+\Delta_1+\Delta_2+\ldots+\Delta_m\}f(x_1\,,x_2).$$

Ma evidentemente si ha:

$$\Delta_k=1\cdot\frac{h_1^k D^h_{x_1}}{\lfloor k}+\frac{h_2 D_{x_2}}{\lfloor 1}\cdot\frac{h_1^{k-1} D_{x_1}^{k-1}}{\lfloor k-1}$$

$$+\frac{h^2_2 D^2_{x_2}}{\lfloor 2}\cdot\frac{h_1^{k-2} D^{k-2}_{x_1}}{\lfloor k-2}+\ldots+\frac{h_2^k D^k_{x_2}}{\lfloor k}\cdot 1$$

$$=\frac{1}{\lfloor k}\left\{\left(h_1 D_{x_1}\right)^k+\binom{k}{1}\left(h_1 D_{x_1}\right)^{k-1}\left(h_2 D_{x_2}\right)\right.$$

$$\left.+\binom{k}{2}\left(h_1 D_{x_1}\right)^{k-2}\left(h_2 D_{x_2}\right)^2+\ldots+\left(h_2 D_{x_2}\right)^k\right\}$$

$$=\frac{1}{\lfloor k}\left[h_2 D_{x_1}+h_2 D_{x_2}\right]^k.$$

Posto per brevità: $h_1 D_{x_1}+h_2 D_{x_2}\equiv D_{xh}$, resta così dimostrato che:

$$f(x_1+h_1\,,x_2+h_2)=\left\{1+\frac{D_{xh}}{\lfloor 1}+\frac{D^2_{xh}}{\lfloor 2}+\ldots+\frac{D^2_{xh}}{\lfloor m}\right\}f(x_1\,,x_2).$$

515. Passando ora ad una funzione $f(x_1\,,x_2\,,x_3)$ di tre variabili, si avrà primieramente, per quanto si è ora dimostrato, (detto m il grado di f in $x_1\,,x_2\,,x_3$):

$$f(x_1+h_1\,,x_2+h_2\,,x_3)=\left\{1+\frac{D_{xh}}{\lfloor 1}+\ldots+\frac{D^m_{xh}}{\lfloor m}\right\}f(x_1\,,x_2\,,x_3)$$

e per l' art. 513:

$$f(x_1+h_1\,,x_2+h_2\,,x_3+h_3)=\left[1+\frac{h_3 D_{x_3}}{\lfloor 1}+\ldots\right]f(x_1+h_1\,,x_2+h_2\,,x_3)$$

onde:

$$f(x_1+h_1\,,x_2+h_2\,,x_3+h_3)=$$

$$\left[1+\frac{h_3 D_{x_3}}{\lfloor 1}+\ldots+\frac{h_3^m D^m_{x_3}}{\lfloor m}\right]\left[1+\frac{D_{xh}}{\lfloor 1}+\ldots+\frac{D^m_{xh}}{\lfloor m}\right]f(x_1\,,x_2\,,x_3)$$

$$=\{1+\Delta_1+\Delta_2+\ldots+\Delta_m\}f(x_1\,,x_2\,,x_3)$$

dove, con procedimento identico a quello tenuto sopra si troverà:

$$\Delta_k = \frac{1}{\underline{|1}} \left[h_3 D_{x_3} + D_{xh}\right]^k$$

cioè:

$$\Delta_k = \frac{1}{\underline{|k}} \left[h_1 D_{x_1} + h_2 D_{x_2} + h_3 D_{x_3}\right]^k.$$

Se dunque poniamo, analogamente a quanto si è fatto nel precedente articolo:

$$h_1 D_{x_1} + h_2 D_{x_2} + h_3 D_{x_3} = D_{xh} ,$$

si ha il risultato di forma affatto simile:

$$f(x_1 + h_1 , x_2 + h_2 , x_3 + h_3) = \left\{ 1 + \frac{D_{xh}}{\underline{|1}} + \frac{D^2_{xh}}{\underline{|2}} + \ldots + \frac{D^m_{xh}}{\underline{|m}} \right\} f(x_1, x_2, x_3).$$

516. Così procedendo si giungerà evidentemente alla formola generale, per una funzione intera, del grado m, di n variabili $x_1 , x_2 , \ldots , x_n$:

$$(2) \qquad \begin{aligned} f(x_1 + h_1 , \ldots , x_n + h_n) &= f(x_1 , \ldots , x_n) + D_{xh} f(x_1 , \ldots , x_n) \\ &+ \frac{1}{\underline{|2}} D^2_{xh} f(x_1 , \ldots , x_n) + \ldots + \frac{1}{\underline{|m}} D^m_{xh} f(x_2 , \ldots , x_m), \end{aligned}$$

essendo l'operatore D_{xh} definito dall'uguaglianza:

$$D_{xh} \equiv h_1 D_{x_1} + h_2 D_{x_2} + \ldots + h_n D_{x_n}$$

517. La formola (2) ci da lo sviluppo di $f(x_1 + h_1 , \ldots , x_n + h_n)$ già ordinato secondo *i gruppi di termini omogenei* rispetto alle $h_1 , h_2 , \ldots , h_n$.

Si ha infatti, considerando, per fissare le idee, tre sole variabili x_1 , x_2 , x_3.

$$(3) \qquad \begin{aligned} f(x_1 + h_1 , x_2 + h_2 , x_3 + h_3) &= f + \frac{D_{xh} f}{\underline{|1}} + \frac{D^2_{xh} f}{\underline{|2}} + \ldots \\ &= f + \left[h_1 D_{x_1} f + h_2 D_{x_2} f + h_3 D_{x_3} f\right] + \\ &+ \frac{1}{\underline{|2}} \left[h^2_1 D^2_{x_1} f + h^2_2 D^2_{x_2} f + 2 h_1 h_2 D_{x_1} D_{x_2} f + \ldots\right] \\ &+ \frac{1}{\underline{|3}} \left[h^3_1 D^3_{x_1} f + 3 h^2_1 h_2 D^2_{x_1} D_{x_2} f + \ldots\right] \\ &+ \ldots . \end{aligned}$$

Richiamando la formola che da lo sviluppo della potenza di un

polinomio (art. 224), si ha in generale:

$$\frac{D^{\lambda}_{xh}f}{\lfloor\lambda} = \frac{1}{\lfloor\lambda}[h_1D_{x_1} + h_2D_{x_2} + h_3D_{x_3}]^{\lambda}f$$

(4)

$$= \sum \frac{h_1^{\alpha_1}h_2^{\alpha_2}h_3^{\alpha_3}}{\lfloor\alpha_1\lfloor\alpha_2\lfloor\alpha_3} \cdot D_{x_1}^{\alpha_1}D_{x_2}^{\alpha_2}D_{x_3}^{\alpha_3}f.$$

Sostituendo per ogni termine di (3) la corrispondente espressione (4), si ottiene dunque il completo sviluppo di $f(x_1 + h_1, x_2 + h_2, x_3 + h_3)$ rappresentato come segue:

$$f(x_1 + h_1, x_2 + h_2, x_3 + h_3) = \sum \frac{h_1^{\alpha_1}h_2^{\alpha_2}h_3^{\alpha_3}}{\lfloor\alpha_1\lfloor\alpha_2\lfloor\alpha_3} \cdot D_{x_1}^{\alpha_1}D_{x_2}^{\alpha_2}D_{x_3}^{\alpha_3}f$$

dove ora non è necessario imporre alcuna restrizione alla variabilità degli esponenti $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Bensì, se m è il grado di $f(x_1, x_2, x_3)$ nelle x_1, x_2, x_3, basterà estendere la sommatoria ai sistemi di valori delle $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ soddisfacenti la condizione:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \gtreqless m.$$

518. Se $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ è omogenea, del grado m, nelle $x_1, x_2, \ldots, x_n$, si ha, come è facile riconoscere:

$$[h_1D_{x_1} + \ldots + h_nD_{x_n}]^m f(x_1, \ldots, x_n) = \lfloor m \cdot f(h_1, \ldots, h_n).$$

La formola (2) ci da dunque in particolare, se $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ è una funzione intera omogenea, del secondo grado, delle $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$f(x_1 + h_1, \ldots, x_n + h_n) =$$

$$= f(x_1, \ldots, x_n) + D_{xh}f(x_1, \ldots, x_n) + f(h_1, \ldots, h_n)$$

$$= f(x_1, \ldots, x_n) + h_1f'_{x_1} + h_2f'_{x_2} + \ldots + h_nf'_{x_n} + f(h_1, \ldots, h_n).$$

§ 10.° — Teoremi sulle funzioni simmetriche intere di più variabili.

519. Una funzione ben determinata $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ si dice *simmetrica* rispetto alle variabili $x_1, \ldots, x_n$, se rimane identicamente uguale a se stessa, quando si eseguisca fra le variabili una qualsivoglia sostituzione.

Se

$$S = \begin{pmatrix} x_{i_1} & x_{i_2} & \ldots & x_{i_n} \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{pmatrix}$$

è una sostituzione qualunque (cfr. art. 228) fra le $x_1, x_2, \ldots, x_n$, il risultato di questa sostituzione eseguita fra gli argomenti della

funzione f si suole rappresentare con Sf, cosicchè si potrà scrivere brevemente:

$$f(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}) = S \cdot f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Se la funzione f è simmetrica, dovranno dunque verificarsi le $\lfloor n$ identità:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = S \cdot f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

corrispondenti alle $\lfloor n$ possibili sostituzioni S.

520. Sarà però sufficiente di accertare che sono soddisfatte le $\frac{n(n-1)}{2}$ identità corrispondenti alle $\frac{n(n-1)}{2}$ trasposizioni T_1, $T_2, \ldots$ (cfr. art. 238) fra le $x_1, x_2, \ldots, x_n$; poichè noi sappiamo (art. 238) che ogni sostituzione si può sempre riguardare come il risultato di successive trasposizioni.

521. Del resto è facile di riconoscere che ogni sostituzione fra le $x_1, x_2, \ldots, x_n$ si può ottenere come risultante delle sole $n-1$ trasposizioni:

$$(x_1 x_2), (x_1 x_3), \ldots, (x_1 x_n)$$

opportunamente combinate. Quindi, per esempio, per accertare che $f(x, y, z)$ è simmetrica, basterà accertare che essa non è alterata dalle trasposizioni (xy) ed (xz), cioè basterà verificare che è identicamente:

$$f(x, y, z) = f(y, x, z) = f(z, y, x)$$

522. Fra le funzioni simmetriche intere delle n variabili, che designeremo per maggiore comodità con $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$, le più semplici sono quelle del tipo:

$$\alpha^k + \beta^k + \gamma^k + \ldots + \lambda^k$$

dove k è un esponente intero e positivo. Esse portano appunto il nome di *funzioni simmetriche semplici* o di *somme semplici*. Noi le rappresenteremo brevemente con S_k.

Chiameremo poi somme *doppie*, *triple*, ecc. (ovvero a due, tre indici, ecc.) le somme del tipo:

$$S_{p,q} \equiv \sum \alpha^p \beta^q = \alpha^p \beta^q + \beta^p \alpha^q + \alpha^p \gamma^q + \beta^p \gamma^q + \ldots$$

$$S_{p,q,r} \equiv \sum \alpha^p \beta^q \gamma^r = \alpha^p \beta^q \gamma^r + \beta^p \alpha^q \gamma^r + \ldots$$

. . . .

dove, cioè, $S_{p,q}$ indica la somma degli $n(n-1)$ termini, generalmente distinti, che si ottengono moltiplicando la potenza p^{ma} di una variabile qualunque per la potenza q^{ma} di un'altra variabile; così $S_{p,q,r}$ la somma degli $n(n-1)(n-2)$ termini che si otten-

gono moltiplicando la potenza p^{ma} di una qualsivoglia variabile α per la potenza q^{ma} di una qualsivoglia variabile β diversa dalla α e per la potenza r^{ma} di una qualsivoglia variabile γ diversa da α e da β, ecc.

Così, ad esempio, per $n=3$, si avrà, dette α, β, γ le tre variabili:

$$S_{p,q} = \alpha^p\beta^q + \beta^p\alpha^q + \alpha^p\gamma^q + \gamma^p\alpha^q + \beta^p\gamma^q + \gamma^p\beta^q$$

ed in particolare:

$$S_{p,q} = 2(\alpha^p\beta^q + \alpha^p\gamma^q + \beta^p\gamma^q).$$

Inoltre:

$$S_{p,q,r} = \alpha^p\beta^q\gamma^r + \beta^p\gamma^q\alpha^r + \gamma^p\alpha^q\beta^r + \alpha^p\gamma^q\beta^r + \gamma^p\beta^q\alpha^r + \beta^p\alpha^q\gamma^r$$

ed in particolare:

$$S_{p,p,r} = 2(\alpha^p\beta^p\gamma^r + \beta^p\gamma^p\alpha^r + \gamma^p\alpha^p\beta^r),\ S_{p,p,p} = 6\alpha^p\beta^p\gamma^p.$$

523. La nozione testè data di somme *multiple* è specialmente importante, inquantochè: *ogni funzione simmetrica intera di più variabili è identicamente uguale ad una somma di somme multiple rispettivamente moltiplicate per dei coefficienti costanti.*

Infatti, se $A\cdot\alpha^{p_1}\beta^{p_2}\gamma^{p_3}$ sia p. es. un termine qualunque della funzione intera $F(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots, \lambda)$ di cui si tratta, essendo F per supposto simmetrica rispetto a tutte le $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$, si dovranno trovare, fra gli altri termini distinti di F, tutti quei termini distinti che si deducono da questo permutando in un modo qualunque le tre variabili α, β, γ fra di loro e colle rimanenti $\delta, \ldots, \lambda$. In altre parole l'insieme di tutti quei termini di F che contengono tre sole variabili elevate agli esponenti p_1, p_2, p_3, altro non sarà che la somma tripla S_{p_1,p_2,p_3} moltiplicata per un certo coefficiente costante. Cancellati per un momento tutti questi termini, i quali già costituiscono una funzione simmetrica, ciò che resta sarà ancora evidentemente una funzione simmetrica intera, da cui si potrà similmente separare un'altra somma multipla $S_{p,q,r,\ldots}$ moltiplicata per un coefficiente costante. Così procedendo si conclude evidentemente che l'intera funzione F non è che una somma di somme multiple moltiplicate per dei coefficienti costanti.

524. *Ogni funzione simmetrica intera delle variabili* $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ *si può esprimere identicamente come una funzione intera, a coefficienti costanti, delle somme semplici* S_1, S_2, S_3, ...

Dopo quanto si è visto testè, è chiaro che per istabilire questo teorema, che è d'importanza fondamentale nella teoria delle funzioni simmetriche, basterà considerare, come ora faremo, il caso in cui la funzione simmetrica data sia una somma multipla.

525. *Una somma simmetrica multipla si può sempre esprimere come una funzione intera, a coefficienti numerici interi, delle somme semplici* S_1, S_2, S_3, ...

Cominciamo infatti dal considerare le somme doppie $S_{p,q}$. Poichè:

$$S_p = \alpha^p + \beta^p + \gamma^p + \ldots + \lambda^p\ ,\ S_q = \alpha^q + \beta^q + \ldots + \lambda^q\ ,$$

si deduce:

$$S_p S_q = (\alpha^p + \beta^p + \gamma^p + ...)(\alpha^q + \beta^q + \gamma^q + ...) = \alpha^{p+q} + \beta^{p+q} + ... + \lambda^{p+q} +$$
$$+ \alpha^p\beta^q + \beta^p\alpha^q + \alpha^p\gamma^q + ...$$

cioè:

$$S_p S_q = S_{p+q} + S_{p,q},$$

e di qui si cava:

$$S_{p,q} = S_p S_q - S_{p+q}, \qquad (1)$$

onde si vede che la somma doppia $S_{p,q}$ si esprime colle somme semplici S_p, S_q, S_{p+q} nel modo indicato.

526. Venendo ora alle somme triple $S_{p,q,r}$, partiamo similmente dall'eguaglianza:

$$S_{p,q} S_r = (\alpha^p\beta^q + \alpha^p\gamma^q + ...)(\alpha^r + \beta^r + \gamma^r + ...). \qquad (a)$$

Facendo lo sviluppo del prodotto dei due polinomi del secondo membro, si otterranno dei termini che appartengono all'uno o all'altro dei tre tipi distinti seguenti:

1°) termini del tipo $\alpha^p\beta^q\gamma^r$, che si ottengono moltiplicando un termine qualunque $\alpha^p\beta^q$ del primo polinomio per un termine γ^r del secondo comprendente una variabile diversa da α e da β. L'insieme di tutti questi termini ci dà evidentemente la somma tripla $S_{p,q,r}$.

2°) termini del tipo $\alpha^{p+r}\beta^q$, che si ottengono moltiplicando un termine qualunque $\alpha^p\beta^q$ del primo fattore per il termine α^r del secondo che contiene la stessa variabile che sta sotto l'esponente p del primo fattore. L'insieme di questi termini ci dà evidentemente la somma doppia $S_{p+r,q}$.

3°) termini del tipo $\alpha^p\beta^{q+r}$, che si ottengono moltiplicando un termine qualunque $\alpha^p\beta^q$ del primo polinomio per il termine β^r del secondo. La somma di questi termini si vede similmente essere $S_{p,q+r}$.

Il prodotto dei due polinomi sarà dunque uguale ad

$$S_{p,q,r} + S_{p+r,q} + S_{p,q+r},$$

onde la (a) ci dà:

$$S_{p,q} S_r = S_{p,q,r} + S_{p+r,q} + S_{p,q+r},$$

e di qui si deduce ora

$$S_{p,q,r} = S_{p,q} S_r - S_{p+r,q} - S_{p,q+r}. \qquad (2)$$

Questa formola ci esprime la somma tripla $S_{p,q,r}$ per mezzo di somme doppie e di somme semplici. Se dunque sostituiamo in luogo delle somme doppie le loro espressioni già trovate:

$$S_{p,q} = S_p S_q - S_{p+q}$$

$$S_{p+r,q} = S_{p+r} S_q - S_{p+q+r}, \quad S_{p,q+r} = S_p S_{q+r} - S_{p+q+r},$$

otteniamo appunto la seguente espressione di $S_{p,q,r}$ in funzione

delle somme semplici:

$$S_{p,q,r} = S_p S_q S_r - S_{p+q} S_r - S_{p+r} S_q - S_{q+r} S_p + 2S_{p+q+r}. \qquad (3)$$

527. Ed ora si potrà procedere in modo affatto analogo per calcolare la somma quadrupla $S_{p,q,r,s}$.

Cioè, partendo dall' eguaglianza:

$$S_{p,q,r} S_s = (\alpha^p \beta^q \gamma^r + \ldots)(\alpha^s + \beta^s + \ldots)$$

si dedurrà primieramente:

$$S_{p,q,r} S_s = S_{p,q,r,s} + S_{p+s,q,r} + S_{p,q+s,r} + S_{p,q,r+s}$$

d'onde si conclude che $S_{p,q,r,s}$ si esprime per mezzo di somme con tre indici e di somme semplici; onde, sostituendo per le somme con tre indici le espressioni già trovate, si avrà appunto un'espressione, della forma voluta, di $S_{p,q,r,s}$ in funzione delle somme semplici.

E così procedendo si stabilirà il teorema per qualsiasi somma multipla.

528. È importante di notare che in tutte le uguaglianze testè scritte la somma di tutti gli indici delle S in ogni termine del primo o del secondo membro di una stessa eguaglianza è *costante*. Di quì segue che anche l'espressione finale di una somma multipla qualunque

$$S_{p,q,r,s,\ldots} = \sum A \cdot S_1^{\alpha_1} S_2^{\alpha_2} S_3^{\alpha_3} S_4^{\alpha_4} \ldots$$

si comporrà soltanto di termini nei quali gli esponenti $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ soddisfino all' uguaglianza:

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 + \ldots = p + q + r + s + \ldots.$$

La somma $\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \ldots$ è il così detto *peso* del prodotto letterale $S_1^{\alpha_1} S_2^{\alpha_2} S_3^{\alpha_3} \ldots$, definendosi come peso di un unico fattore S_i l'indice i da cui è affetto e, come peso di un prodotto, la somma dei pesi dei singoli fattori.

Possiamo dunque dire, a complemento del teorema dell'art. 525, che *i termini che si presentano nell' espressione di una somma multipla* $S_{p,q,r,\ldots}$ *in funzione intera delle* $S_1, S_2, S_3, \ldots$, *sono tutti dello stesso peso* $p + q + r + \ldots$.

Note ed Esercizi.

1 Si applichi la teoria esposta alla funzione simmetrica delle quattro variabili $\alpha, \beta, \gamma, \delta$:

$$F = (\alpha\beta + \gamma\delta)(\alpha\gamma + \beta\delta)(\alpha\delta + \beta\gamma) = \frac{1}{6} S_{3,1,1,1} + \frac{1}{6} S_{2,2,2}.$$

2. Riconoscere che:

$$S_{p,p,p,p} = S_p^4 - 6S_p^2 S_{2p} + 8S_p S_{3p} + 3S_{2p}^2 - 6S_{4p}.$$

3. Ci riserviamo di dimostrare in luogo più opportuno, cioè al Cap. X quando tratteremo delle funzioni simmetriche delle n variabili considerate come le n soluzioni di un'equazione, che le infinite somme semplici $S_1, S_2, \ldots$ si possono sempre esprimere come funzioni intere, a coefficienti costanti, delle $S_1, S_2, \ldots, S_n$.

4. *Per accertare che* $f(x, y, z, \ldots, u)$ *è simmetrica, basta verificare* (cfr. Cap. III, § 4°, Nota 4ª) *che essa non è alterata dalle due sostituzioni circolari* $(xyzt \ldots u)$ *ed* $(yzt \ldots u)$.

5. Si riconosca, mercè questo criterio, la simmetria della funzione $(\alpha\beta - \gamma\delta)(\alpha\gamma - \beta\delta)(\alpha\delta - \beta\gamma)$.

§ 11.° — Funzioni a due o più valori.

529. Sia $f(x, y, z, \ldots, u)$ una funzione ben determinata delle n variabili $x, y, z, \ldots, u$, ed S una qualunque delle $\underline{|n}$ sostituzioni che si possono eseguire fra le medesime. Noi diremo che la funzione f *ammette la sostituzione* S (oppure anche che la sostituzione S lascia inalterato il *valore algebrico* di f) quando la funzione Sf (cioè la funzione che si deduce da f eseguendo fra i suoi argomenti la sostituzione S) è identicamente uguale ad f (cioè prende lo stesso valore di f per tutti i valori delle variabili).

530. È facile riconoscere che *le sostituzioni ammesse da una data funzione* f *costituiscono un gruppo* (art. 240), che si dirà il *gruppo appartenente ad* f.

Siano infatti $H_1 = 1, H_2, \ldots, H_h$ quelle sostituzioni che non alterano il valore algebrico di f. Avendosi, per supposto, comunque si scelga H_i, l'identità: $H_i f = f$, si avrà anche, comunque si scelga poi H_j, l'identità:

$$H_j(H_i f) = H_j f ,$$

poichè è evidente che *se due funzioni sono identicamente uguali, sono identicamente uguali anche le due funzioni che si deducono da esse mediante una stessa sostituzione* (*).

Ma era anche, per supposto, $H_j = f$. Quindi:

$$H_j(H_i f) = f$$

Il prodotto $H_j H_i$ (**) delle due sostituzioni H_i ed H_j soddisfa dunque all' identità:

$$(H_j H_i) f = f ;$$

epperò la sostituzione da esso rappresentata deve far parte delle

(*) Questo principio non è più vero quando in luogo dei valori algebrici si considerino i valori *numerici* delle funzioni, quando cioè le $x, y, z, \ldots, u$ non rappresentino delle variabili arbitrarie, ma certi determinati numeri. Ed invero le sostituzioni che lasciano inalterato il valore numerico così definito, *non costituiscono, generalmente parlando, un gruppo.*

(**) Per maggiore comodità intenderemo d'ora innanzi che le sostituzioni di un prodotto si eseguano da destra verso sinistra.

$H_1, \ldots, H_h$. Si avrà, cioè, per un certo valore di r:

$$H_j H_i = H_r$$

c. d. d.

531. Sia (H) il gruppo ora considerato appartenente alla funzione f. Il suo ordine h dovendo essere (art. 241) un divisore di $\lfloor n$, esisterà un intero k (che si chiama l' *indice* del gruppo) tale da essere $hk = \lfloor n$, e tutte le $\lfloor n$ sostituzioni fra le $x_1, x_2, \ldots, x_n$ si potranno rappresentare (art. 241) col quadro:

$$\begin{array}{c} 1, H_2, \ldots, H_h \\ K_2, K_2H_2, \ldots, K_2H_h \\ \cdots\cdots\cdots \\ K_k, K_kH_2, \ldots, K_kH_h \end{array} \qquad (1)$$

essendo $K_2, K_3, \ldots, K_k$ certe sostituzioni opportunamente scelte.

Ora una qualunque delle (1), p. es. K_jH_i, applicata alla funzione f dà per risultato:

$$(K_jH_i)f = K_j(H_if) = K_jf.$$

Si vede dunque come tutte le possibili funzioni, algebricamente distinte, che si possono dedurre da $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ mediante sostituzioni fra i suoi argomenti, debbono essere comprese fra le k funzioni:

$$f, K_2f, K_3f, \ldots, K_kf. \qquad (2)$$

D' altra parte è facile riconoscere che le funzioni (2) sono tutte distinte; poichè se fosse p. es.:

$$K_if = K_jf,$$

se ne dedurrebbe, operando sui due membri con K_j^{-1} (cfr. articolo 236):

$$K_j^{-1}K_if = f,$$

onde, per un certo valore dell' indice r:

$$K_j^{-1}K_i = H_r, \quad \text{cioè:} \quad K_i = K_jH_r$$

e le sostituzioni del quadro (1) non sarebbero tutte distinte, contrariamente a quanto si è già detto.

Concludiamo dunque che: *il numero delle funzioni distinte, che si possono dedurre da una funzione ben determinata* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *mediante sostituzioni fra i suoi argomenti, si ottiene dividendo* $\lfloor n$ *per l'ordine del gruppo appartenente ad* f.

532. *Se* $F(f_1, f_2, \ldots, f_k)$ *è una funzione simmetrica ben determinata dei* k *valori algebricamente distinti che può prendere la funzione* f *mediante sostituzioni fra i suoi argomenti* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, p. es. *se* F *è la somma*:

$$f_1 + f_2 + \ldots + f_k$$

essa F *è anche una funzione simmetrica delle* $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Infatti, se S è una sostituzione qualunque fra le $x_1, x_2, \ldots, x_n$, si ha:

$$S \cdot F(f_1, f_2, \ldots, f_k) = F(Sf_1, Sf_2, \ldots, Sf_k). \tag{3}$$

Ma le $Sf_1, Sf_2, \ldots, Sf_k$ sono ancora tutte distinte; poichè, se fosse p. es. $Sf_i = Sf_j$, se ne dedurrebbe $S^{-1}(Sf_i) = S^{-1}(Sf_j)$, cioè $f_i = f_j$. Esse coincidono dunque, fatta astrazione dall'ordine, colle stesse $f_1, f_2, \ldots, f_k$. Si ha dunque, per la supposta simmetria di F:

$$F(Sf_1, Sf_2, \ldots, Sf_k) = F(f_1, f_2, \ldots, f_k)$$

e per conseguenza, confrontando con (3):

$$S \cdot F(f_1, f_2, \ldots, f_k) = F(f_1, f_2, \ldots, f_k).$$

533. Come esempio importante per ciò che seguirà, notiamo che: *se* $f_1, f_2, \ldots, f_k$ *sono i valori algebricamente distinti che può prendere la* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *mediante sostituzioni fra i suoi argomenti, il prodotto*:

$$(z - f_1)(z - f_2) \ldots (z - f_k), \tag{4}$$

ove z *è una nuova variabile indipendente dalle* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *resterà inalterato da ogni sostituzione fra le* $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Saranno del pari funzioni simmetriche delle $x_1, x_2, \ldots, x_n$ le somme:

$$f_1 + f_2 + \ldots + f_k \quad , \quad f_1f_2 + f_1f_3 + f_2f_3 + \ldots \quad , \quad f_1f_2f_3 + \ldots$$

che si presentano (cfr. art. 218) come coefficienti del prodotto (4) sviluppato secondo le potenze di z.

534. *Se* $H'_1 = 1, H'_2, \ldots, H'_h$, *sono le sostituzioni di un gruppo* (H') *contenuto nel gruppo* (H), *appartenente alla funzione* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, *e l'insieme di tutte le* $\underline{|n}$ *sostituzioni fra le* $x_1, \ldots, x_n$ *si rappresenti col quadro*:

$$\begin{matrix} H'_1, H'_2, \ldots, H'_{h'} \\ K'_2H'_1, K'_2H'_2, \ldots, K'_2H'_{h'} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ K'_{k'}H'_1, K'_{k'}H'_2, \ldots, K'_{k'}H'_{h'} \end{matrix} \tag{5}$$

la somma:

$$f + K'_2f + K'_3f + \ldots + K'_{k'}f \tag{6}$$

(e, più generalmente, una funzione simmetrica qualunque di queste k' *funzioni) è una funzione simmetrica delle* $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Basterà dimostrare che applicando alle k' funzioni:

$$f, K'_2f, K'_3f, \ldots, K'_{k'} \tag{7}$$

una stessa sostituzione qualunque S, le nuove funzioni ottenute non differiscono dalle (7) che per l'ordine. Ora ciò sarà senz'altro

evidente, quando avremo dimostrato che *le* k′ *funzioni* (7) *altro non sono che le* k *funzioni algebricamente distinte* $f_1, f_2, \ldots, f_k$ (dell'art. 531), *ognuna però ripetuta lo stesso numero di volte.*

Invero, se le sostituzioni del gruppo (H) si rappresentano, col procedimento dell'art. 241, col quadro:

$$\begin{array}{c} 1\,,\ H'_2\,,\ \ldots\,,\ H'_{h'} \\ L_2\,,\ L_2H'_2\,,\ \ldots\,,\ L_2H'_h \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ L_\lambda\,,\ L_\lambda H'_2\,,\ \ldots\,,\ L_\lambda H'_h \end{array}$$

è chiaro, confrontando col quadro (1), che le $k'h'$ sostituzioni (5) coincideranno colle $k\cdot\lambda\cdot h'$ sostituzioni del tipo:

$$K_i\cdot L_j\cdot H'_\delta\,, \qquad (K_1=L_1=H'_1=1)$$

cosicchè, per le k' sostituzioni: $K'_2\,, K'_3\,, \ldots$ si potranno scegliere i k' prodotti del tipo $K_i\cdot L_j$. Ora, di questi $k\lambda$ prodotti, quelli che hanno per primo fattore uno stesso K_i, cioè:

$$K_iL_1\,,\ K_iL_2\,,\ \ldots\,,\ K_iL_\lambda$$

applicati alla funzione f, danno evidentemente per risultato la stessa funzione K_if, giacchè le L, appartenendo al gruppo (H), non possono alterare la f. Concludiamo dunque appunto che le (7) coincidono colle (2) ripetute ciascuna λ volte.

Nel caso speciale della somma (6), è chiaro che si avrà:

$$f + K'_2f + \ldots + K'_{k'}f = \frac{k'}{k}\left\{ f + K_2f + \ldots + K_kf \right\}.$$

535. Se mediante la funzione $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ si formi il composto razionale:

$$\frac{A_0f^\lambda + A_1f^{\lambda-1} + \ldots + A_{\lambda-1}f + A_\lambda}{B_0f^\mu + B_1f^{\mu-1} + \ldots + B_{\mu-1}f + B_\mu}$$

che indicheremo con $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, in cui le $A_0, A_1, \ldots,$ $B_0, B_1, \ldots$ sono delle semplici costanti, ovvero delle funzioni simmetriche ben determinate delle $x_1, x_2, \ldots, x_n$, è senz'altro evidente che tutte quelle sostituzioni fra le variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$, che lasciano inalterata la f, lascieranno del pari inalterata la F. Per conseguenza il gruppo di F conterrà come suo sotto-gruppo il gruppo di f (che potrebbe anche coincidere collo stesso gruppo di F).

È assai importante di dimostrare, come appunto passiamo a fare, la verità della proposizione reciproca.

536. **Teorema di Lagrange.** — *Date le due funzioni* $F(x_1, \ldots, x_n)$ *ed* $f(x_1, \ldots, x_n)$, *affinchè la* F *si possa esprimere identicamente come un composto razionale della* f, *i cui coefficienti siano delle funzioni simmetriche delle* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *è necessario e sufficiente che la* F *non*

sia alterata da quelle sostituzioni, fra le variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *che lasciano inalterata la* f.

Si è visto or ora che la condizione enunciata è necessaria. Ci resta a far vedere che essa è anche sufficiente; cioè che è possibile un'espressione di F sotto la forma indicata, quando il gruppo di F contiene tutte le sostituzioni del gruppo di f.

Siano $f, f_2, f_3, \ldots, f_k$ i valori algebricamente distinti che può prendere la f mediante sostituzioni fra le $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e siano $F_1, F_2, F_3, \ldots, F_k$ i corrispondenti valori di F; con che intendiamo di dire che F_i è quella funzione che nasce applicando ad F quella stessa sostituzione che ha servito per dedurre da f la f_1.

Se poniamo per brevità:

$$\varphi(z) = (z-f)(z-f_2)(z-f_3)\ldots(z-f_k) \tag{8}$$

ove z è una nuova variabile indipendente dalle $x_1, \ldots, x_n$, il prodotto:

$$F\frac{\varphi(z)}{z-f}$$

sarà una funzione delle $x_1, x_2, \ldots, x_n$ il cui gruppo contiene evidentemente il gruppo di f; cosicchè la somma:

$$\Phi(z) = F\frac{\varphi(z)}{z-f} + F_2\frac{\varphi(z)}{z-f_2} + \ldots + F_k\frac{\varphi(z)}{z-f_k} \tag{9}$$

sarà (art. 534) una funzione simmetrica rispetto alle $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Sostituendo in questa identità f in luogo di z e tenendo presente la (8), se ne ricava:

$$F = \frac{\Phi(f)}{(f-f_2)(f-f_3)\ldots(f-f_k)}. \tag{10}$$

Intanto, se nell'identità (8) si ponga $z+h$ in luogo di z, si sviluppino i due membri secondo le potenze di h e si eguaglino quindi i coefficienti di h nel primo e secondo membro, si ottiene (art. 501):

$$\varphi'(z) = \frac{\varphi(z)}{z-f} + \frac{\varphi(z)}{z-f_2} + \ldots + \frac{\varphi(z)}{z-f_k},$$

d'onde si deduce per $z=f$:

$$\varphi'(f) = (f-f_2)(f-f_3)\ldots(f-f_k).$$

Se dunque introduciamo le funzioni simmetriche (cfr. art. 533):

$$A_1 = -(f_1 + f_2 + \ldots + f_k)$$
$$A_2 = f_1f_2 + f_1f_3 + f_2f_3 + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

cosicchè la (8) si può scrivere:

$$\varphi(z) = z^k + A_1z^{k-1} + A_2z^{k-2} + \ldots + A_k,$$

abbiamo:

$$(f-f_2)(f-f_3)\ldots(f-f_k)=kf^{k-1}+(k-1)A_1f^{k-2}+\ldots+A_{k-1}.$$

Sostituendo ciò in (10) veniamo così a conseguire per F l'espressione della forma desiderata, cioè:

$$F=\frac{\Phi(f)}{\varphi'(f)}=\frac{\Phi(f)}{kf^{k-1}+(k-1)A_1f^{k-2}+\ldots+A_{k-1}} \qquad (11)$$

Il teorema resta così dimostrato.

537. Volendo precisare maggiormente la funzione Φ, si svolgano i quozienti della formola (9) mediante la regola di Ruffini, che ci dà:

$$\frac{\varphi(z)}{z-f_i}=z^{k-1}+(f_i+A_1)z^{k-2}+(f_i^2+A_1f_i+A_2)z^{k-3}+\ldots.$$

Introducendo le funzioni simmetriche di $x_1,\ldots,x_n$:

$$\psi_i=Ff^i+F_2f_2^i+F_3f_3^i+\ldots+F_kf_k^i, \qquad (12)$$

si otterrà così:

$$\Phi(z)=\psi_0z^{k-1}+(\psi_1+A_1\psi_0)z^{k-2}+(\psi_2+A_1\psi_1+A_2\psi_0)z^{k-3}+\ldots,$$

onde la (11) si potrà scrivere:

$$F=\frac{\psi_0f^{k-1}+(\psi_1+A_1\psi_0)f^{k-2}+(\psi_2+A_1\psi_1+A_2\psi_0)f^{k-3}+\ldots}{kf^{k-1}+(k-1)A_1f^{k-2}+(k-2)A_2f^{k-3}+\ldots+A_{k-1}}. \qquad (11)'$$

538. Come applicazione della teoria esposta ci occuperemo ora della ricerca di quelle funzioni razionali delle variabili $x_1,x_2,\ldots,x_n$, che possono prendere due soli valori per tutte le sostituzioni fra le variabili. Ciò equivale a ricercare (art. 531) quelle funzioni razionali il cui gruppo ha per ordine la metà di $\lfloor n$.

Conviene dunque innanzi tutto investigare se, oltre al gruppo alternato da noi già conosciuto (art. 245), che è appunto di ordine $\frac{\lfloor n}{2}$, possano esistere altri gruppi di questo stesso ordine, composti con sostituzioni appartenenti al gruppo simmetrico (G), formato da tutte le $\lfloor n$ sostituzioni fra le $x_1,\ldots,x_n$. La risposta è negativa.

Siano infatti:

$$H_1=1\ ,\ H_2\ ,\ H_3\ ,\ldots,\ H_N \qquad (13)$$

le sostituzioni di un gruppo (H), di ordine $N=\frac{\lfloor n}{2}$, contenuto nel gruppo simmetrico (G).

Esisterà almeno una trasposizione T non compresa fra le (13); poichè se il gruppo (H) contenesse tutte le trasposizioni, dovrebbe anche contenerne i prodotti, cioè (art. 238) tutte le $\lfloor n$ sostituzioni fra le $x_1,\ldots,x_n$. Per conseguenza il gruppo (G), sarà costituito

(art. 241) dalle N sostituzioni (13) e dalle N sostituzioni:

$$H_1T\ ,\ H_2T\ ,\ H_3T\ ,\ \ldots\ ,\ H_NT \qquad (14)$$

o anche dalle sostituzioni (13) e dalle sostituzioni:

$$TH_1\ ,\ TH_2\ ,\ TH_3\ ,\ \ldots\ ,\ TH_N. \qquad (14)'$$

Di qui segue evidentemente che le (14) coincider debbono, fatta astrazione dall'ordine, colle (14)', sicchè si avrà per ogni valore di i e per un opportuno valore di j:

$$H_iT = TH_j. \qquad (15)$$

Si vede inoltre che il prodotto di un numero pari di sostituzioni scelte fra le (14) darà sempre una sostituzione appartenente ad H; poichè se una qualunque delle (14), p. es. H_rT, si moltiplichi per un'altra qualunque delle (14)', che sia p. es. TH_s, si otterrà come prodotto, essendo $T^2 = 1$:

$$H_rT \cdot TH_s = H_rT^2H_s = H_rH_s.$$

Se dunque noi dimostreremo che tutte le possibili trasposizioni, fra le $x_1, \ldots, x_n$, si trovano comprese fra le (14), ne seguirà che tutte le sostituzioni equivalenti ad un numero pari di trasposizioni faranno parte del gruppo (H), il quale dovrà perciò coincidere (art. 245) col gruppo alternato, come si ha in mira di dimostrare.

Se sia p. es. (x_1x_2) la trasposizione T, che già, per ipotesi, fa parte delle (14), ci basterà dimostrare che fra le stesse (14) è contenuta anche la (x_1x_3); poichè in modo simile si dedurrà poi successivamente che si trova fra esse compresa qualsiasi altra trasposizione.

Ora, per $(x_2x_3) = \vartheta$, si può scrivere:

$$(x_1x_3) = \vartheta\, T\vartheta. \qquad (16)$$

Ma, se ϑ appartiene al gruppo H, e sia p. es. $\vartheta = H_i$, si ha, per quanto si è già notato:

$$\vartheta\, T\vartheta = H_i \cdot TH_i = H_i \cdot H_jT = H_rT\ ,$$

onde la (x_1x_3) farà appunto parte delle (14). Se poi ϑ appartiene alle (14), e sia p. es. $\vartheta = H_iT$, si avrà del pari:

$$\vartheta\, T\vartheta = H_iT \cdot T \cdot H_iT = H_iT^2H_iT = H_i^2T = H_rT$$

Resta così dimostrato quanto si voleva, cioè che *esiste un unico gruppo (il gruppo alternato), che sia di ordine uguale alla metà dell'ordine del gruppo simmetrico.*

539. *Ogni funzione razionale delle variabili* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *che sia suscettibile di prendere due soli valori algebricamente distinti, per tutte le sostituzioni fra le* $x_1, \ldots, x_n$, *è contenuta nell'espressione* $\varphi + D\psi$, *in cui* φ *e* ψ *sono funzioni razionali e simmetriche*

delle $x_1, \ldots, x_n$ *e*

$$D = \prod_{j>i} (x_j - x_i) \tag{17}$$

è il prodotto delle $\frac{n(n-1)}{2}$ *differenze fra le variabili combinate due a due.*

Sia infatti F una funzione razionale, a due valori, delle variabili $x_1, \ldots, x_n$. Il suo gruppo, dovendo essere dell' ordine $\frac{\lfloor n}{2}$, coinciderà necessariamente col gruppo alternato, giacchè si è or ora dimostrato essere questo l' unico gruppo di quest' ordine fra le $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

D' altra parte, anche la funzione D sopra definita appartiene allo stesso gruppo alternato; come si vede chiaramente prendendo per D l'altra espressione equivalente (art. 481):

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots & x_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \end{vmatrix} \tag{17'}$$

la quale resta inalterata per un numero pari di scambi fra le colonne, cioè per le sostituzioni equivalenti ad un numero pari di trasposizioni fra le $x_1, \ldots, x_n$ (il cui insieme è appunto il gruppo alternato) e cambia invece di segno per un numero dispari di scambi fra le colonne, cioè per le sostituzioni di classe dispari fra le $x_1, \ldots, x_n$.

La funzione F si può dunque esprimere (art. 536) sotto la forma:

$$F = \frac{A_0 D^\lambda + A_1 D^{\lambda-1} + \ldots + A_\lambda}{B_0 D^\mu + B_1 D^{\mu-1} + \ldots + B_\mu} \tag{18}$$

essendo le $A_0, A_1, \ldots, B_0, B_1, \ldots$ funzioni razionali simmetriche delle $x_1, \ldots, x_n$.

Ma la potenza D^i è ancor essa una funzione simmetrica delle $x_1, \ldots, x_n$, se l'esponente intero i è pari; e, se i è dispari, per es. $i = 2j + 1$, si può scrivere più semplicemente:

$$D^i = D^{2j+1} = D^{2j} \cdot D = A \cdot D$$

dove A è funzione razionale e simmetrica delle $x_1, \ldots, x_n$.

Si può, per conseguenza, prendere per F, in luogo della (18), l' espressione più semplice:

$$F = \frac{A_0 D + A_1}{B_0 D + B_1}$$

e quindi anche:

$$F = \frac{(A_0 D + A_1)(B_0 D - B_1)}{B_0^2 D^2 - B_1^2} = \varphi + D\psi$$

dove:

$$\varphi = \frac{A_0B_0D^2 - A_1B_1}{B_0D^2 - B_1^2} \quad e \quad \psi = \frac{A_1B_0 - A_0B_1}{B_0D^2 - B_1^2}$$

sono appunto funzioni simmetriche delle $x_1, \ldots, x_n$; c. d. d.

540. Chiuderemo questo § con una proposizione che si può riguardare come la reciproca di quella dell'art. 530, cioè: *se* H *è un gruppo di sostituzioni fra le variabili* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *esiste sempre una funzione intera* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *il cui valore algebrico resta inalterato per le sostituzioni di* H *ed è invece alterato da ogni altra sostituzione.*

Invero, se $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sono n coefficienti costanti fra loro tutti distinti, la funzione:

$$\varphi = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n$$

prenderà evidentemente $\underline{|n}$ valori algebricamente distinti per le $\underline{|n}$ sostituzioni fra le $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Ciò posto, se $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_h$ sono i valori che nascono da φ mediante le sostituzioni di H, è chiaro che la funzione:

$$(\rho - \varphi_1)(\rho - \varphi_2) \ldots (\rho - \varphi_h) \qquad (19)$$

resterà inalterata per tutte le sostituzioni di H, comunque si determini il parametro costante ρ.

Perchè la (19) sia la funzione desiderata, basterà dunque escludere, dagli infiniti valori che si potrebbero scegliere per ρ, quei valori, manifestamente in numero finito (cfr. art. 480), per i quali la (19) resterebbe altresì inalterata da qualcuna delle $\underline{|n} - h$ sostituzioni che non appartengono ad H.

§ 12.° — Quoziente di due funzioni intere.

541. *Siano*:

$$f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m, \quad e \quad \varphi(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_n$$

due funzioni intere date della variabile x *e sia, per fissare le idee,* $m \geqq n$. *Si possono sempre determinare, ed in un unico modo, due funzioni intere, l'una*:

$$Q(x) = q_0x^{m-n} + q_1x^{m-n-1} + \ldots + q_{m-n}$$

del grado $m - n$, *l'altra*:

$$R(x) = r_0x^{n-1} + r_1x^{n-2} + \ldots + r_{n-1}$$

del grado $n - 1$, *tali da avere identicamente*:

$$f(x) = Q(x)\varphi(x) + R(x). \qquad (1)$$

Infatti, posto per brevità $m - n = h$, affinchè sia soddisfatta la

identità (1), cioè:

$$a_0x^m+\ldots+a_m=(b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_n)(q_0x^h+q_1x^{h-1}+\ldots+q_h)$$
$$+r_0x^{n-1}+r_1x^{n-2}+\ldots+r_{n-1}\,,$$

bisogna che siano eguali nei due membri i coefficienti delle potenze simili di x, cioè che si verifichino le relazioni:

$$\left\{\begin{array}{l} a_0 - b_0q_0 = 0 \\ a_1 - b_1q_0 - b_0q_1 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_h - b_hq_0 - b_{h-1}q_1 - \ldots - b_0q_0 = 0 \end{array}\right. \qquad (2)$$

$$\left\{\begin{array}{l} a_{h+1} - b_{h+1}q_0 - b_hq_1 - \ldots - b_1q_h - r_0 = 0 \\ a_{h+2} - b_{h+2}q_0 - b_{h+1}q_1 - \ldots - b_2q_h - r_1 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_m - b_nq_h - r_{n-1} = 0\,, \end{array}\right. \qquad (3)$$

in cui s'intendono avere valore nullo quei coefficienti b il cui indice riuscisse superiore ad n.

Ora colle (2) si possono evidentemente determinare successivamente ed in un *unico* modo i coefficienti $q_0\,, q_1\,, \ldots$ della funzione $Q(x)$, e quindi colle (3) si determinano dipoi, del pari in un *unico* modo i coefficienti $r_0\,, r_1\,, \ldots$ della $R(x)$.

Resta così dimostrato che si possono sempre determinare ed in un sol modo le due funzioni $Q(x)$ ed $R(x)$ che devono soddisfare all'identità (1). Esse si chiamano risp. il *quoziente* ed il *resto* della divisione della funzione $f(x)$ (*dividendo*) per la funzione $\varphi(x)$ (*dividente*).

542. Se il dividente $\varphi(x)$ è una funzione di primo grado (che potremo supporre ridotta alla forma $x-\alpha$), il resto sarà una funzione di grado zero, cioè una costante; e dall'identità:

$$f(x) = (x-\alpha)\cdot Q(x) + C$$

si vede, ponendo $x=\alpha$, che dev'essere $C = f(\alpha)$.

Confrontando quest' identità con quella ottenuta al § 4.° che ci ha condotto alla regola di Ruffini, vediamo che i coefficienti $q_0\,, q_1\,, \ldots\,, q_{m-1}$ del quoziente ed il resto C si ottengono appunto con quella regola; cioè che:

$$q_0 = a_0\,,\ q_1 = q_0\alpha = a_1\,,\ q_2 = q_1^{\alpha+a_2}\,, \ldots\,,$$
$$q_{m-1} = q_{m-2}\alpha + a_{m-1}\,,\ C = q_{m-1}\alpha + a_m = f(\alpha).$$

543. Se il resto $R(x)$ della divisione di $F(x)$ per $\Phi(x)$ è identicamente uguale a zero, cioè se si ha identicamente:

$$F(x) = Q(x)\cdot\Phi(x)\,,$$

si dice che $\Phi(x)$ è un *divisore* di $F(x)$, o che $F(x)$ è *divisibile* (esattamente) per $\Phi(x)$.

Se $\Phi(x)$ è una funzione di grado zero, cioè una costante, è chiaro che essa potrà sempre soddisfare ad un'eguaglianza della forma precedente; cosicchè nella teoria della divisibilità delle funzioni intere le costanti debbono considerarsi come divisori esatti di qualsiasi funzione intera $F(x)$, precisamente come nella teoria della divisibilità dei numeri interi l'unità si riguarda come divisore di qualsiasi numero.

Ciò posto, due funzioni intere si dicono *prime fra loro* se esse non hanno alcun divisore comune *variabile*. Si è detto variabile per escludere il caso, che sempre ha luogo, di divisori comuni costanti. Secondo questa definizione, se due funzioni intere non sono prime, esse avranno un divisore comune almeno di primo grado in x.

Esercizi.

1. Trovare il quoziente ed il resto della divisione di $2x^5-7x^4+3x^3+2x+8$ per x^3-2x+5 calcolando i coefficienti del quoziente e del resto col metodo spiegato.

2. Verificare come questo metodo coincide in sostanza con quello, che si tiene nella pratica, fondato sulla considerazione dei successivi *dividendi parziali*. Il calcolo si dispone come segue:

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
2x^5 & -7x^4 & +3x^3 & + & +2x & +8 & x^3-2x+5 \\
-2x^5 & & +4x^3 & -10x^2 & & & \hline 2x^2-7x+7 \\
\hline
 & -7x^4 & +7x^3 & -10x^2 & +2x & +8 & \\
 & +7x^4 & & -14x^2 & +35x & & \\
\hline
 & & 7x^3 & -24x^2 & +37x & +8 & \\
 & & -7x^3 & & +14x & -35 & \\
\hline
 & & & -24x^2 & +51x & -27 &
\end{array}$$

Si trova così $Q=2x^2-7x+7$, $R=-24x^2+51x-27$.

§ 13.° — Massimo comun divisore di due funzioni intere.

544. Date due funzioni intere $f(x)$ ed $f_1(x)$ dei gradi rispettivi m ed n, ci proponiamo di trovare un procedimento col quale sia possibile di indagare se esse abbiano o no qualche divisore comune, oltre le costanti che debbono considerarsi come divisori di qualsiasi funzione.

Suppongasi che m non sia inferiore ad n, e si indichino con φ ed f_2 risp. il quoziente ed il resto della divisione di f per f_1. Si avrà identicamente:

$$f=\varphi f_1+f_2 \quad (1), \qquad \text{onde:} \qquad f-\varphi f_1=f_2. \qquad (1)'$$

Ora, se ψ è una funzione intera che divide simultaneamente f ed f_1, dev'essere:

$$f=\psi g \quad , \quad f_1=\psi g_1$$

con g e g_1 funzioni intere. Si dovrà dunque avere, sostituendo nella (1)', l'identità:

$$\psi\cdot(g-\varphi g_1)=f_2$$

la quale dice che anche f_2 è divisibile esattamente per ψ, essendo $g-\psi g_1$ una funzione intera di x.

Similmente si vede dalla (1) che ogni funzione intera che divida simultaneamente f_1 ed f_2, dovrà dividere f. Dunque:

Tutte le funzioni intere, divisori comuni di due funzioni f *ed* f_1, *coincidono coi divisori comuni di* f_1 *ed* f_2; *essendo* f_2 *il resto della divisione di* f *per* f_1, *supposto il grado di* f *non inferiore a quello di* f_1.

545. Essendo ora f_2 di grado inferiore ad f_1 (al più di grado $n-1$), si indichino con φ_1 ed f_3 il quoziente ed il resto della divisione di f_1 per f_2; onde si avrà l'identità:

$$f_1=\varphi_1 f_2+f_3\,,$$

dalla quale risulta, come poco fa, che tutti i divisori comuni di f_1 ed f_2, e quindi anche i divisori comuni di f ed f_1, coincidono coi divisori comuni di f_2 ed f_3.

Così procedendo si possono formare successivamente le identità:

$$\begin{aligned} f&=\varphi f_1+f_2\\ f_1&=\varphi_1 f_2+f_3\\ &\cdots\cdots\\ f_{r-1}&=\varphi_{r-1}f_r+f_{r+1}\\ f_r&=\varphi_r f_{r+1}+f_{r+2}\,, \qquad f_{r+2}=\text{Cost.}^{e} \end{aligned} \tag{2}$$

nelle quali, poichè le nuove funzioni ottenute $f_2, f_3, f_4, \ldots$, sono di grado continuamente decrescente, si dovrà certo pervenire ad una funzione f_{r+2} di grado nullo, la quale si ridurrà quindi ad una semplice costante.

Importa ora distinguere il caso in cui questa costante è diversa da zero da quello in cui essa è uguale a zero.

Nel primo caso le due funzioni date f ed f_1 non possono avere alcun divisore comune variabile, dovendo tutti i divisori comuni di f ed f_1 dividere f_{r+2}, che, per supposto, è una costante diversa da zero. Dunque le due funzioni date sono prime fra loro.

Nel caso invece che la costante f_{r+2} sia zero, l'ultima relazione (2) diventa:

$$f_r=\varphi_r\cdot f_{r+1}\,,$$

la quale dice che ogni divisore di f_{r+1} è anche un divisore di f_r, e quindi è un divisore comune di f ed f_1. Reciprocamente, ogni divisore comune di f ed f_1, dovendo essere un divisore comune di f_r e di f_{r+1}, dividerà f_{r+1}. Di qui segue che tutti i divisori comuni di f ed f_1 coincideranno col divisore della f_{r+1}. Quest'ultima fun-

zione, che non è una costante, si chiama perciò il *massimo comun divisore di* f *ed* f_1. In entrambi i casi può dirsi che:

Tutti i divisori comuni di f *ed* f_1 *coincidono coi divisori del massimo comun divisore delle stesse* f *ed* f_1.

546. *Se una funzione intera* Ψ *divide il prodotto di due funzioni* F *e* Φ *ed è prima con una di esse, deve dividere necessariamente l'altra.*

Infatti, se la funzione Ψ è prima con F, applicando il metodo ora esposto per la ricerca del massimo divisore comune, si hanno delle identità della forma:

$$\begin{aligned} F &= \varphi\Psi + F_1 \\ \Psi &= \varphi_1 F_1 + F_2 \\ F_1 &= \varphi_2 F_2 + F_3 \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ F_{r-1} &= \varphi_r F_r + F_{r+1} \\ F_r &= \varphi_{r+1} F_{r+1} + C \end{aligned}$$

con C costante diversa da zero. Moltiplicando ora i primi ed i secondi membri di queste identità per Φ si hanno le identità:

$$\begin{aligned} \Phi F &= \varphi \cdot \Phi\Psi + \Phi F_1 \\ \Phi\Psi &= \varphi_1 \cdot \Phi F_1 + \Phi F_2 \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \Phi F_{r-1} &= \varphi_r \cdot \Phi F_r + \Phi F_{r+1} \\ \Phi F_r &= \varphi_{r+1} \cdot \Phi F_{r+1} + C\Phi , \end{aligned}$$

d'onde segue, poichè Ψ divide per ipotesi il prodotto ΦF, che Ψ deve dividere i prodotti:

$$\Phi F_1 ,\ \Phi F_2 , \ldots , \Phi F_{r+1} ,\ C\Phi$$

l'ultimo dei quali, fatta astrazione dal fattore costante C, è appunto la funzione Φ. Dunque, ecc.

Note ed Esercizi.

1. Trovare il massimo comun divisore delle due funzioni intere:

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 \qquad \text{ed} \qquad x^4 + 2x^2 - 3.$$

2. Nel calcolo del massimo comun divisore di due funzioni hanno grande importanza pratica le seguenti osservazioni che hanno per iscopo di evitare i numeri frazionarii.

1.°) Una delle due funzioni di cui si cerca il massimo comun divisore, si può moltiplicare per un fattore costante arbitrario purchè diverso da

zero. Con ciò il massimo comun divisore non si viene ad alterare che di un fattore costante, il che non ha importanza.

2.°) Se durante la divisione di due funzioni, fatta col metodo dei dividendi parziali (V. Esercizi del § prec.) si moltiplica un dividendo parziale per un fattore costante arbitrario diverso da zero e si prosegue la divisione, il quoziente verrà ad essere alterato, ma il resto non si altererà che di un fattore costante. Perciò questa modificazione dei calcoli è sempre permessa nella ricerca del massimo comun divisore.

Dimostrare tutto ciò e riconoscere su un esempio come, con queste modificazioni, si possano eliminare tutte le frazioni di mano in mano che si presentano.

CAPITOLO VII.

OPERAZIONI CON NUMERI REALI.

§ 1.° — Problemi che conducono alla introduzione dei numeri irrazionali.

547. Oltre alle quattro operazioni fondamentali esistono altre operazioni, di natura essenzialmente algebrica, le quali non si potrebbero sempre effettuare qualora il campo degli enti aritmetici si volesse limitare ai soli numeri razionali. Così p. es. l'operazione dell' estrazione di radice quadrata da un numero razionale positivo p, espressa dal simbolo $\sqrt{p}$, sarebbe possibile soltanto nel caso in cui, messo p sotto la forma $\frac{m}{n}$ con m ed n interi positivi primi fra loro, ciascuno dei numeri interi m ed n fosse un quadrato esatto; poichè nel caso contrario (cfr. art. 398) non esisterà alcun numero razionale che elevato a quadrato riproduca p.

Intanto, se indichiamo con A il complesso di tutti i numeri razionali $a_1, a_2, a_3, \ldots$ il cui quadrato è minore di p, e con A′ il complesso di tutti i rimanenti numeri razionali $a'_1, a'_2, a'_3, \ldots$ il cui quadrato è maggiore di p, queste due classi di numeri godono delle due proprietà seguenti:

1.ª Ogni numero contenuto nella classe A è minore di ogni numero contenuto nella classe A′.

2.ª Data una quantità positiva ε scelta piccola ad arbitrio, esisteranno sempre due numeri a_i, a'_j, il primo della classe A e il secondo della classe A′, tali che la loro differenza $a'_j - a_i$ sia più piccola di ε.

Di queste due proprietà la prima è senz'altro evidente. Per dimostrare la seconda si considerino i successivi numeri razionali positivi:

$$0, \frac{\varepsilon}{2}, \frac{2\varepsilon}{2}, \frac{3\varepsilon}{2}, \frac{4\varepsilon}{2}, \ldots, \frac{n\varepsilon}{2}, (n+1)\frac{\varepsilon}{2}, \ldots; \qquad (1)$$

e sia $\frac{n\varepsilon}{2}$ il primo fra essi che abbia il suo quadrato maggiore di p. Questo numero $\frac{n\varepsilon}{2}$ dovrà trovarsi necessariamente, poichè i successivi termini della progressione aritmetica (1) diventano sempre più grandi fino a superare qualunque numero assegnabile

grande quanto si voglia. Poichè allora il numero $\frac{n\varepsilon}{2}$ è il primo termine per il quale si ha:

$$\left(n\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 > p\,,$$

è chiaro che il termine precedente $(n-1)\frac{\varepsilon}{2}$ darà

$$\left[(n-1)\cdot\frac{\varepsilon}{2}\right]^2 < p.$$

Esisteranno dunque nelle due classi A ed A′ rispettivamente i due numeri $a_i = (n-1)\cdot\frac{\varepsilon}{2}$ ed $a'_j = n\cdot\frac{\varepsilon}{2}$ la cui differenza sarà:

$$a'_j - a_i = n\cdot\frac{\varepsilon}{2} - (n-1)\frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}$$

cioè appunto più piccola di ε.

La seconda delle due proprietà ora menzionate si può anche enunciare dicendo che fra le due classi A ed A′, benchè composte di elementi differenti, vi può essere un *avvicinamento indefinito.* Ciò nonostante è facile di riconoscere che non esiste alcun numero razionale *determinato* il quale rappresenti, per così dire, l'elemento di separazione delle due classi, cioè un numero determinato il quale possa essere avvicinato indefinitamente (*) sia con numeri della classe A che con numeri della classe A′.

Supponiamo infatti, se è possibile, che esistesse un certo numero razionale α il quale segnasse la separazione precisa delle due classi A ed A′, cosicchè allora le differenze $\alpha - a_i$ ed $a'_j - \alpha$ si potrebbero rendere piccole a piacere scegliendo opportunamente gli elementi a_i ed a'_j. Il numero α^2 non potendo essere uguale a p, ammettiamo p. es., per fissare le idee, che sia maggiore di p, cioè che sia:

$$\alpha^2 = p + \varepsilon \tag{2}$$

dove ε indichi un certo numero positivo diverso da zero. Se ora prendiamo un numero qualunque a della classe A, sarà per supposto $a^2 < p$ e quindi sostituendo in (2) si avrà:

$$\alpha^2 > a^2 + \varepsilon$$

d' onde:

$$\alpha^2 - a^2 > \varepsilon\,;$$

e poichè:

$$\alpha^2 - a^2 = (\alpha + a)(\alpha - a),$$

si potrà scrivere anche:

$$(\alpha + a)(\alpha - a) > \varepsilon$$

(*) Ove un siffatto numero esistesse, è chiaro che esso dovrebbe essere $\geqq$ di tutti i numeri di A ed $\leqq$ di tutti quelli di A′.

e dividendo per $(\alpha + a)$:

$$\alpha - a > \frac{\varepsilon}{\alpha + a}.$$

Se ora nel denominatore del secondo membro sostituiamo in luogo di a il numero maggiore α, esso crescerà e per conseguenza diminuirà il valore della frazione $\frac{\varepsilon}{\alpha + a}$ riducendosi al valore più piccolo $\frac{\varepsilon}{2\alpha}$. Si avrà dunque *a fortiori*;

$$\alpha - a > \frac{\varepsilon}{2\alpha}.$$

Quì il secondo membro rappresenta una quantità determinata, indipendente dalla scelta del numero a; perciò questa disuguaglianza ci dice che, comunque si scelga il numero a, la differenza $\alpha - a$ non potrà rendersi mai più piccola del numero $\frac{\varepsilon}{2\alpha}$. Questo numero rappresenta dunque un limite inferiore dell' avvicinamento fra α e gli elementi della classe A. È dunque assurdo l'avere supposto che α potesse essere avvicinato indefinitamenre dai numeri di ciascuna delle due classi (*).

Se invece si potesse ammettere l' esistenza di un nuovo ente aritmetico α il cui quadrato fosse precisamente p, è chiaro che α dovrebbe definirsi come un numero maggiore di tutti i numeri di A e minore di tutti i numeri di A'; esso sarebbe allora l'elemento di separazione delle due classi.

La necessità algebrica di introdurre un nuovo ente il cui quadrato sia p si viene così a confondere con quella di introdurre un nuovo ente che sia l'elemento di separazione delle due classi

---

(*) Resterebbe a considerare il caso di $\alpha^2 < p$. In questo caso si potrà porre $\alpha^2 = p - \varepsilon$ essendo ε positivo, e si troverà con procedimento affatto simile a quello tenuto:

$$a' - \alpha > \frac{\varepsilon}{\alpha + a'}. \qquad (1)$$

A questo punto si osserverà che, se δ, è un numero *fisso* scelto a piacere nella classe A', si avrà *a fortiori* qualunque sia a':

$$a' - \alpha > \frac{\varepsilon}{\alpha + \delta}. \qquad (2)$$

Ciò è evidente se $a' < \delta$. Se poi sia $a' > \delta$, la (1) darà ponendo δ in luogo di a':

$$\delta - \alpha > \frac{\varepsilon}{\alpha + \delta}$$

d'onde seguirà ancora la (2) *a fortiori*, essendo per supposto:

$$a' - \alpha > \delta - \alpha.$$

A ed A′. Ora noi prenderemo come punto di partenza precisamente quest'ultimo concetto, che ci permetterà di introdurre addirittura nel calcolo i numeri irrazionali in tutta la loro generalità, anzichè introdurli di mano in mano che occorra di rendere risolvibile il tale o il tal altro problema algebrico.

§ 2.° — **Definizione dei numeri irrazionali.**

548. Se in un modo qualunque siano state determinate due classi di numeri razionali A ed A′, le quali godano delle due proprietà fondamentali: 1°) che ogni numero della classe A sia minore (od =) di ogni numero della classe A′, 2°) che, presa a piacere una quantità positiva ε (diversa da zero), esistano sempre almeno due numeri, l'uno appartenente alla classe A e l'altro alla classe A′, la cui differenza sia minore di ε, si possono presentare due casi.

1.° *Caso* — Esiste un numero razionale determinato α maggiore (od =) di tutti i numeri della prima classe A e minore (od =) di tutti i numeri di A′. In tal caso noi diremo che α è l'elemento di separazione delle due classi A ed A′, e scriveremo $\alpha = (A\ ,\ A')$; cioè col simbolo (A , A′) designeremo lo stesso numero α in quanto è individuato dalle due classi A ed A′.

2.° *Caso* — Non esiste alcun numero razionale α maggiore (od =) di tutti i numeri di A e minore (od =) di tutti i numeri di A′. Allora noi diremo che le due classi sono separate l'una dall'altra per mezzo di un numero *irrazionale* α che introdurremo nel calcolo come un nuovo ente aritmetico, per il quale si ammetterà *per definizione* che sia maggiore di tutti i numeri di A e minore di tutti i numeri di A′, e scriveremo analogamente al 1° caso:

$$\alpha = (A\ ,\ A').$$

È chiaro che in quest'ultimo caso *l'affermare l'esistenza del numero α altro non significa in sostanza che affermare l'esistenza di due classi* A *ed* A′ *che godono delle due proprietà fondamentali.*

Prima di passare oltre gioverà premettere alcuni esempi.

549. Fra gli infiniti modi che si potrebbero escogitare per riguardare uno stesso numero razionale h come l'elemento di separazione di due classi, vanno specialmente notati i due seguenti:

a) Si formino le due classi A, A′ mediante un unico elemento eguale ad uno stesso numero razionale h. Si ottiene così come caso specialissimo il simbolo $(h\ ,\ h)$, il quale altro non rappresenta se non che lo stesso numero razionale h. È questo evidentemente il solo caso in cui ogni numero di A è uguale ad ogni numero di A′.

b) Si pongano nella classe A tutti i numeri razionali minori di h e nella classe A′ tutti i numeri razionali maggiori di h. Le due classi A ed A′ così ottenute soddisfano evidentemente alla prima proprietà fondamentale. Ma esse soddisfano anche alla se-

conda, poichè, preso un numero ε piccolo a piacere, si troverà certamente fra i numeri di A il numero $h - \frac{\varepsilon}{4}$ e fra i numeri di A' il numero $h + \frac{\varepsilon}{4}$; la differenza di questi due numeri è $\frac{\varepsilon}{2}$, cioè è più piccola di ε. Si potrà dunque scrivere: $h = (A\ ,\ A')$.

550. Per avere un altro esempio semplice, si potrà procedere come segue. Dato il numero razionale h, si formi la classe A coi numeri:

$$h - \frac{1}{2},\ h - \frac{1}{3},\ h - \frac{1}{4},\ h - \frac{1}{5}, \ldots$$

e la classe A' coi numeri:

$$h + \frac{1}{2},\ h + \frac{1}{3},\ h + \frac{1}{4},\ h + \frac{1}{5}, \ldots,$$

cioè si pongano in A tutti i numeri della forma $h - \frac{1}{n}$ ed in A' tutti quelli della forma $h + \frac{1}{n}$, dove n può essere un intero positivo qualunque. È facile vedere che le due classi così formate soddisfano alle due proprietà fondamentali. Infatti gli infiniti numeri contenuti in A sono tutti minori di h e quelli di A' tutti maggiori di h. Inoltre, se consideriamo nella classe A il numero $h - \frac{1}{n}$ ed in A' il numero $h + \frac{1}{n}$, vediamo che la loro differenza è $\frac{2}{n}$, quantità che può rendersi piccola a piacere, purchè si scelga n abbastanza grande. Si potrà dunque scrivere:

$$h = \left(h - \frac{1}{2},\ h - \frac{1}{3},\ h - \frac{1}{4}, \ldots;\ h + \frac{1}{2},\ h + \frac{1}{3},\ h + \frac{1}{4}, \ldots\right).$$

551. Come ultimo esempio, indichiamo con A il complesso di tutti i numeri razionali il cui quadrato è minore di 2, e con A' il complesso di tutti quelli il cui quadrato è maggiore di 2; le due classi A ed A' soddisferanno, come già si è notato (art. 547) alle due proprietà fondamentali. In questo caso però il numero $\alpha = (A\ ,\ A')$ sarà irrazionale, poichè abbiamo dimostrato sopra (articolo 547) non esistere alcun numero razionale determinato $\overline{\geqq}$ di tutti i numeri di A ed $\overline{\leqq}$ di tutti i numeri di A'. *Finora non possiamo affermare* che il quadrato di α sia proprio eguale a 2. Ciò si verrà a riconoscere soltanto in seguito, dopo che avremo veduto in qual modo si debbano definire le operazioni fondamentali con numeri razionali ed irrazionali.

552. Appena introdotto nel calcolo un numero irrazionale $\alpha = (A, A')$ per mezzo di due classi A, A', resta con ciò stesso definito senza

ambiguità quali siano i numeri razionali da ritenersi ***minori*** di α e quali siano quelli da ritenersi ***maggiori*** di α. Sia infatti c un numero razionale qualunque. Si verificherà necessariamente uno di questi due casi: *o esisterà in* A *un numero* a *maggiore di* c, *ovvero esisterà in* A' *un numero* a' *minore di* c; poichè, se non si verificasse nè l'uno nè l'altro di questi due casi, ciò significherebbe essere $c \gtreqless$ di tutti i numeri di A ed $\lesseqgtr$ di tutti i numeri di A', ed allora sarebbe lo stesso c il numero di separazione delle due classi A ed A', ed il simbolo (A , A') rappresenterebbe un numero razionale contrariamente al supposto. Se ora esiste in A un numero a maggiore di c, essendo già a per definizione maggiore di α, il numero α dovrà *a fortiori* definirsi maggiore di c; e similmente, se esiste in A' un numero a' minore di c, il numero α, che per definizione è minore di a', dovrà definirsi *a fortiori* minore di c.

553. Corollario 1.° — *Se un numero razionale* c *è minore (maggiore) di un numero irrazionale* α, *ogni numero razionale minore (maggiore) di* c *sarà del pari minore di* α. Sia infatti il numero razionale c minore dell'irrazionale (A , A'). Esisterà, per l'art. prec., in A almeno un numero razionale a maggiore di c. Ogni numero razionale minore di c sarà allora minore di a e quindi, per lo stesso art. prec., minore di (A , A'), c. d. d.

554. Corollario 2.° — *Se un numero razionale* c *è minore (maggiore) di un numero irrazionale* α, *ogni numero razionale maggiore (minore) di* α *sarà anche maggiore (minore) di* c. Sia infatti $c < \alpha$ e supponiamo, se è possibile, che un numero razionale $c' > \alpha$ non fosse maggiore di c. Sarebbe allora $c' \lesseqgtr c$ e quindi per l'art. prec. minore di α, contro il supposto.

555. Dopo aver così definito quali siano i numeri razionali maggiori o minori di un dato irrazionale α, ci resta ancora a stabilire il criterio per il paragone dei numeri irrazionali fra loro stessi. Si presenta cioè la seguente questione: definiti per mezzo di classi due numeri irrazionali:

$$\alpha = (A , A') \quad e \quad \beta = (B , B'),$$

quale di essi dovrà definirsi maggiore dell'altro ed in quali casi dovremo ritenerli eguali fra loro? Noi partiremo dalla seguente definizione: *due numeri irrazionali sono uguali tutte le volte che ogni numero razionale minore dell'uno è anche minore dell'altro.*

Questa definizione equivale evidentemente a quest'altra: *due numeri irrazionali sono uguali tutte le volte che ogni numero razionale maggiore dell'uno è anche maggiore dell'altro.*

Come terza definizione equivalente ad entrambe si potrebbe poi anche dire più semplicemente: *due numeri irrazionali sono uguali, semprechè non esista alcun numero razionale compreso fra essi* (cioè maggiore dell'uno e minore dell'altro).

556. *Due numeri irrazionali uguali ad un terzo sono uguali fra loro.* Siano infatti i tre numeri irrazionali α, β, γ, e supponiamo

sia $\alpha=\gamma$ e $\beta=\gamma$. Poichè $\alpha=\gamma$, ogni numero razionale minore di α sarà anche minore di γ (art. 555), e, poichè $\gamma=\beta$, ogni numero razionale minore di γ sarà anche minore di β; quindi ogni numero razionale minore di α sarà anche minore di β, e similmente si dimostrerà che ogni numero razionale minore di β è anche minore di α. I due numeri α e β sono dunque uguali, c. d. d.

557. *Se due numeri irrazionali α e β sono disuguali, esisterà* (art. 555) *almeno un numero razionale compreso fra essi. Allora, se c è un cosiffatto numero razionale, e sia p. es.* $c > \alpha$, $c < \beta$, *ogni altro numero razionale compreso fra α e β sarà del pari maggiore di α e minore di β.* Supponiamo infatti, se è possibile, che un altro numero razionale c' compreso fra α e β fosse minore di α. Essendo $c' < \alpha$ ed $\alpha < c$, sarà allora (art. 554) $c' < c$; ed essendo $c' < c$ e $c < \beta$, sarà poi (art. 553) $c' < \beta$. Il numero c' sarebbe dunque simultaneamente minore di α e β; epperò non sarebbe compreso fra α e β, contro il supposto.

In base a questo teorema ci è ora evidentemente lecito di porre la seguente definizione: *di due numeri irrazionali disuguali si dirà che il primo è maggiore del secondo (e quindi il secondo minore del primo) tutte le volte che esista un numero razionale minore del primo e maggiore del secondo.*

558. I numeri razionali ed irrazionali, cioè in generale tutti i numeri definibili per mezzo di classi, verranno d'ora innanzi designati complessivamente col nome di numeri *reali.*

Dagli articoli 552 e 557 emerge chiaramente che: *se α e β sono due numeri reali e sia $\alpha < \beta$, esiste sempre qualche numero razionale maggiore di α e minore di β, e reciprocamente.*

559. Corollario 1.° — *Due numeri reali sono uguali, se non esiste alcun numero razionale compreso fra essi.*

560. Corollario 2.° — *Se α e β sono due numeri reali disuguali, esistono sempre infiniti numeri razionali compresi fra essi.*

561. *Se fra tre numeri reali hanno luogo le disuguaglianze:* $\alpha < \beta$ *e* $\beta < \gamma$, *ne segue che* $\alpha < \gamma$. Infatti dalle due prime disuguaglianze segue (art. 558) l'esistenza di due numeri razionali c e c' pei quali si abbia:

$$\alpha < c < \beta \quad , \quad \beta < c' < \gamma.$$

Ma dall'essere $c < \beta$ e $\beta < c'$ segue (art. 554): $c < c'$, e dall'essere $\alpha < c$ e $c < c'$ segue (art. 553): $\alpha < c'$. Si ha dunque $\alpha < c' < \gamma$, onde (art. 558) sarà appunto $\alpha < \gamma$.

Note ed Esercizi.

1. Dimostrare che (A, A') è certamente razionale, se fra i numeri di A ve ne sia uno *massimo* (maggiore di tutti gli altri), ovvero fra i numeri di A' uno *minimo* (minore di tutti gli altri).

2. Dedurne come corollario che il numero (A, A') è certamente razionale, se una delle due classi A, A' si compone di un numero finito di elementi.

3. Dimostrare che, se (A, A') è un numero irrazionale, le due classi A ed A' non cesseranno d'individuare lo stesso numero quand'anche si tolga da esse un numero qualunque, purchè finito, di elementi. Sotto quali condizioni è lecito fare ciò anche per (A, A') razionale?

4 Riconoscere che:

$$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots; \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right) = 0$$

e che:

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots; \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \ldots\right) = 1.$$

§ 3.° — Criterii per riconoscere l'uguaglianza o disuguaglianza di due numeri definiti per mezzo di classi.

562. Dalle definizioni e proprietà stabilite nel § prec. circa la uguaglianza e disuguaglianza dei numeri reali dedurremo ora un criterio affatto generale per riconoscere se due numeri qualunque (A , A') e (B , B') siano uguali o disuguali, senza che sia necessario fare alcuna distinzione di razionalità od irrazionalità, e senza che si abbiano a prendere in considerazione altri numeri, all'infuori di quelli che compongono le classi A , A' , B , B'.

Premettiamo a tale oggetto il seguente lemma: *affinchè un numero razionale* c *sia minore del numero reale* (A , A'), *è necessario e sufficiente che* c *sia minore di qualche numero della classe* A; *e similmente: affinchè il numero razionale* c *sia maggiore di* (A , A'), *è necessario e sufficiente che esso sia maggiore di qualche numero di* A'.

Invero, nel caso che (A , A') sia irrazionale, il lemma ora enunciato non è che una ripetizione di quanto si è gia stabilito, per definizione, all'art. 552. Sia dunque (A , A') uguale ad un numero razionale α, e supponiamo, per fissare le idee, $c <$ (A , A'). Poichè fra i numeri di A deve sempre esisterne qualcheduno che differisca da α per meno di una quantità assegnata ad arbitrio, vi sarà fra essi un numero a che differisca da α per meno di quanto ne differisce c. Tale numero essendo allora compreso fra c ed α sarà appunto maggiore di c, come d. d.

563. *Affinchè due numeri reali* (A , A') *e* (B , B') *siano uguali, è necessario e sufficiente che ogni numero di* A *sia* $\gtreqless$ *di ogni numero di* B' *ed ogni numero di* B *sia* $\gtreqless$ *di ogni numero di* A'.

Supponiamo infatti che i due numeri (A , A') e (B , B') siano

uguali, cosicchè (art. 559) ogni numero razionale minore dell'uno sarà anche minore dell'altro. Ogni numero a, appartenente ad A, essendo $\overline{\gtrless}$ di (A , A'), sarà allora anche $\overline{\gtrless}$ di (B , B') e quindi anche $\overline{\gtrless}$ di ogni numero di B', giacchè (B , B') è $\overline{\gtrless}$ di ogni numero di B'. Similmente si dimostrerà che ogni numero di B deve essere $\overline{\gtrless}$ di ogni numero di A'.

Reciprocamente, se sono soddisfatte le condizioni enunciate nel teorema, dico che i due numeri (A , A') e (B , B') sono uguali. Ammettiamo infatti, se è possibile, che ciò non fosse; cioè che esistesse (art. 559) un numero razionale c che fosse p. es. maggiore di (A , A') e minore di (B , B'). Allora, poichè c è maggiore di (A , A'), esisterà in A', secondo il lemma premesso, almeno un numero a' minore di c. Ma, per supposto è $a' \overline{\gtrless}$ di ogni numero di B; onde sarà anche $c \overline{\gtrless}$ di ogni numero di B. Ora ciò è in contraddizione coll'ipotesi fatta che c sia minore di (B , B'); giacchè, se c è minore di (B , B'), deve c essere minore di qualche numero di B, come si è visto nel lemma.

564. *Affinchè* (A , A') *sia maggiore di* (B , B'), *è necessario e sufficiente che un numero di* A *sia maggiore di un numero di* B'. Invero, se (A , A') > (B , B'), dovrà esistere (art. 558) un numero razionale c minore di (A , A') e maggiore di (B , B'). D'altra parte, essendo $c <$ (A , A'), deve esistere (art. 562) in A un numero a maggiore di c, ed, essendo $c >$ (B , B'), deve esistere in B' un numero $b' < c$. Si avrà dunque $a > b'$, cioè appunto un numero di A maggiore di un numero di B'. Reciprocamente, se esistono in A e B' risp. i due numeri a e b', pei quali sia $a > b'$, essendo (A , A') $\overline{\gtrless} a$, sarà *a fortiori* (A , A') $> b'$. D'altra parte $b' \overline{\gtrless}$ (B , B'). Sarà dunque (A , A') > (B , B').

Note ed Esercizi.

1. *Affinchè i due numeri irrazionali* $\alpha =$ (A , A') *e* $\beta =$ (B , B') *siano uguali, è necessario e sufficiente che ogni numero di* A *sia superato da qualche numero di* B, *ed ogni numero di* B *sia superato da qualche numero di* A.

Cominciamo dal supporre che i due numeri α e β siano uguali e consideriamo un numero qualunque a della classe A. Poichè a è per definizione inferiore ad α e quindi anche a β, dovrà esistere un numero b della classe B che superi a. Similmente si vede che, preso ad arbitrio un numero di B, ne dovrà esistere uno più grande in A.

Supponiamo, reciprocamente, che per ogni numero di A (e di B) ne esista sempre uno più grande in B (od in A). Se c è uno qualunque dei numeri razionali minori di α, esisterà in A un numero a maggiore di c; e poichè a è a sua volta superato per supposto da un numero b di B, sarà *a fortiori* $c < b$, onde c sarà minore di β. Similmente si dimostrerà che ogni numero razionale minore di β è anche minore di α. I due numeri α e β sono dunque uguali, poichè tutti i numeri razionali minori dell'uno sono anche minori dell'altro (art. 555).

2. Riconoscere come questo criterio sia anche necessario e sufficiente per l'uguaglianza di due numeri qualisivogliano (A , A') e (B , B'), semprechè però fra i numeri di A e di B non ve ne sia uno *massimo*.

Se a è un massimo di A, è chiaro che sarà (A , A') $= a$, e allora il criterio per l'uguaglianza di (A , A') e (B , B') consiste semplicemente in ciò

che il numero a dev'essere $\gtreqless$ di tutti i numeri di B ed $\lesseqgtr$ di tutti i numeri di B'.

3. Dimostrare che: *affinchè due numeri reali* (A , A') *e* (B , B') *siano uguali, è necessario e sufficiente che ogni numero razionale minore di qualche numero di* A *sia anche minore di qualche numero di* B, *ed ogni numero razionale minore di qualche numero di* B *sia anche minore di qualche numero di* A.

4. Enunciare i tre teoremi analoghi ai tre precedenti, che si ottengono in modo affatto simile, considerando però le *seconde* classi A', B' in luogo delle prime.

5. Sia dato un numero reale (A , A') pel quale si supponga non esistere nè un massimo degli elementi di A, nè un minimo degli elementi di A'. Sia H la classe formata dai numeri ottenibili come medie aritmetiche (o geometriche) degli elementi di A combinati due a due (ovvero tre a tre, ecc.); H' la classe dedotta analogamente da A'. Si dimostri che (A, A')=(H, H'). Si riconoscerà dapprima che le due classi H , H' individuano un numero; e si farà poi vedere come questo numero coincida con (A , A') applicando il criterio dell'art. 563.

Ne seguirà poi senz'altro che sarà anche: (A , A') = (H , A') = (A , H').

6. Nella nozione di *classe* non è affatto presupposto che gli elementi $a_1, a_2, a_3, \ldots$ che la compongono vengano dati *secondo un ordine determinato*. Accadrà però spesso di definire A mediante una successione di infiniti elementi (positivi):

$$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 \ldots .$$

In tale presupposto, riconoscere che:

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots; A') = \left(\frac{a_1 + a_2}{2}, \frac{a_3 + a_4}{2}, \frac{a_5 + a_6}{2}; A'\right)$$
$$= (\sqrt{a_1 a_2}, \sqrt{a_3 a_4}, \sqrt{a_5 a_6}, \ldots; A').$$

§ 4.° — Operazioni fondamentali con numeri reali.

565. Dobbiamo ora vedere in qual modo le quattro operazioni fondamentali di addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione, delle quali ci sono già note le definizioni e le regole per il caso di numeri razionali, si possano estendere mediante opportune definizioni al campo più vasto dei numeri reali, cioè (art. 558) al campo formato da tutti i numeri razionali ed irrazionali. In ciò che segue noi non considereremo che numeri definiti per mezzo di classi; giacchè ove occorra considerare dei numeri razionali, questi si possono sempre, al pari degli irrazionali, rappresentare col simbolo (A , A'), p. es. col simbolo (a , a) in cui in entrambe le classi A , A' non si ha che un unico e medesimo numero razionale a (cfr. art. 549).

Dopo aver definito l'operazione di somma o di prodotto fra due numeri (A , A') e (B , B'), converrà accertare, affinchè la definizione data possa ritenersi come utile e legittima:

1°) che il risultato dell'operazione resta invariato, se in luogo delle due classi A , A' si assumano altre due classi E , E', tali che sia (E , E') = (A , A'); e similmente per le classi B , B'.

2°) che, se i due numeri (A , A') e (B , B') siano entrambi razionali, il risultato è quello stesso che già è dato nella teoria dei numeri razionali.

3°) che per le operazioni, così estese al campo dei numeri reali, seguiteranno a sussistere inalterate quelle proprietà fondamentali che già si avevano nel campo dei numeri razionali; come, p. es., che il risultato di un prodotto è indipendente dall'ordine dei fattori, ecc.

566. Addizione. — Incominciamo dal vedere che cosa si debba intendere in ogni caso per *somma di due numeri:*

$$\alpha = (A\,,\,A') \quad , \quad \beta = (B\,,\,B')$$

definiti per mezzo di classi. Noi designeremo i numeri della classe A con $a_1\,,\,a_2\,,\,a_3\,,\,a_4\,,\ldots$ (*) e quelli di A' con $a'_1\,,\,a'_2\,,\,a'_3\,,\,a'_4\,,\ldots$; similmente con $b_1\,,\,b_2\,,\,b_3\,,\,b_4\,,\ldots$ i numeri della classe B e con $b'_1\,,\,b'_2\,,\,b'_3\,,\,b'_4\,,\ldots$ quelli della classe B'. Poichè i numeri di A e B sono razionali, noi già sappiamo che cosa significano le somme

$$a_1 + b_1\,,\; a_1 + b_2\,,\; a_1 + b_3\,,\; a_2 + b_1\,,\; a_2 + b_3\,,\ldots$$

che si ottengono aggiungendo ad un numero qualunque a_i di A un numero qualunque b_j di B. L'insieme di tutti questi numeri della forma $a_i + b_j$ sarà da noi considerato come una nuova classe di numeri che dinoteremo brevemente con $A + B$. Similmente denoteremo con $A' + B'$ l'insieme di tutti i numeri che si ottengono come somma di un numero della classe A' con un numero della classe B', cioè il complesso di tutti i numeri della forma $a'_h + b'_k$.

Ciò premesso, è facile riconoscere che le due classi $A + B$ ed $A' + B'$ sono atte a definire un nuovo numero:

$$(A + B\,,\,A' + B')$$

cioè che anche le due classi $A + B$ ed $A' + B'$ soddisfano alle due proprietà fondamentali. Invero dalle disuguaglianze:

$$a_i \lesseqgtr a'_h \quad , \quad b_j \lesseqgtr b'_k$$

che sussistono per ipotesi qualunque siano gli indici $i, j, h, k,$ si deduce:

$$a_i + b_j \lesseqgtr a'_h + b'_k\,,$$

cioè che ogni numero della classe $A+B$ è $\lesseqgtr$ di ogni numero della classe $A' + B'$. Se poi facciamo la differenza:

$$(a'_h + b'_k) - (a_i + b_j) \tag{1}$$

fra un numero qualunque $a'_h + b'_k$ della classe $A' + B'$ ed un numero qualunque $a_i + b_j$ della classe $A + B$, vediamo che essa può anche scriversi identicamente così:

$$(a'_h - a_i) + (b'_k - b_j).$$

Ma, per ipotesi, la differenza $a'_h - a_i$ può rendersi piccola a pia-

(*) Avvertiamo espressamente che con ciò non intendiamo stabilire fra le a alcun ordine di successione o di grandezza.

cere scegliendo opportunamente gli indici h ed i, e lo stesso dicasi della differenza $b'_k - b_j$; quindi anche la loro somma, cioè la differenza (1), può rendersi piccola a piacere scegliendo opportunamente gli indici i, j, h, k. Pertanto le due classi A+B ed A'+B' soddisfano anche alla seconda proprietà fondamentale.

Il simbolo (A + B , A' + B') rappresenta dunque un numero che noi definiremo come *somma* dei due numeri α e β, scrivendo:

$$(A\,,\,A') + (B\,,\,B') = (A + B\,,\,A' + B'). \tag{2}$$

567. Per legittimare questa definizione dobbiamo innanzi tutto dimostrare, secondo quanto si è già osservato all'art. prec., che, se

$$(E\,,\,E') = (A\,,\,A')\,, \tag{3}$$

sarà anche:

$$(E + B\,,\,E' + B') = (A + B\,,\,A' + B'). \tag{4}$$

Ciò si riconosce immediatamente applicando il criterio dell'articolo 563. Indicando infatti risp. con e_i, e'_s numeri di E ed E', segue dalla (3):

$$e_i \lesseqgtr a'_j \quad , \quad a_r \lesseqgtr e'_s\,,$$

d'onde evidentemente, qualunque siano i, j, r, s, h, k;

$$e_i + b_h \lesseqgtr a'_j + b'_k \quad , \quad a_r + b_h \lesseqgtr e'_s + b'_k\,,$$

c. d. d.

568. In secondo luogo dobbiamo verificare che, se (A , A') e (B , B') sono rispettivamente uguali a due numeri razionali α e β, il risultato della somma espresso dalla (2) coincide con $\alpha+\beta$. Invero, potendosi scrivere:

$$(A\,,\,A') = (\alpha\,,\,\alpha) \quad , \quad (B\,,\,B') = (\beta\,,\,\beta)\,,$$

si ha appunto per l'art. prec.:

$$(A\,,\,A') + (B\,,\,B') = (\alpha\,,\,\alpha) + (\beta\,,\,\beta) = (\alpha + \beta\,,\,\alpha + \beta) = \alpha + \beta.$$

Finalmente è senz'altro evidente che, posta per l'addizione la definizione (2), seguiterà a sussistere per tutti i numeri reali la proprietà fondamentale che la somma di più addendi è indipendente dall'ordine di sommazione, ecc.

569. Sottrazione. — Dato un numero qualunque (A , A'), se indichiamo con − A e con − A' le stesse classi di numeri che formano A ed A', presi però con segno contrario, si vede subito che le due classi − A e − A' soddisfano del pari alle due proprietà fondamentali, cosicchè esisterà il numero (− A' , − A). Sommando questo numero col precedente, si avrà per la regola di addizione

$$(A\,,\,A') + (-A'\,,\,-A) = (A - A'\,,\,A' - A).$$

Ma ogni numero della prima classe A − A', essendo della forma $a_i - a'_j$, sarà negativo, ed ogni numero di A' − A sarà invece positivo. Il numero 0 è dunque maggiore di tutti i numeri della

prima classe e minore di tutti quelli della seconda, onde si avrà:

$$(A - A', A' - A) = 0,$$

epperò:

$$(A, A') + (-A', -A) = 0.$$

Esiste dunque un numero che sommato con (A, A') produce zero. Questo numero si indicherà anche con $-(A, A')$, ed il suo valore è dato da $(-A', -A)$.

Ciò premesso, se (A, A') e (B, B') sono due numeri qualunque, esisterà anche il numero:

$$\delta = (A, A') + [-(B, B')] \tag{5}$$

che sommato con (B, B') darà evidentemente (A, A'). Questo numero risolve dunque il problema di *sottrarre* da (A, A') il numero (B, B'), e si scriverà:

$$(A, A') - (B, B') = \delta.$$

Ma la (5) può anche scriversi:

$$\delta = (A, A') + (-B', -B)$$

e per la regola di addizione:

$$\delta = (A - B', A' - B).$$

Il problema della sottrazione è dunque risoluto in ogni caso dalla formola:

$$(A, A') - (B, B') = (A - B', A' - B). \tag{6}$$

570. Moltiplicazione. — Vediamo ora che cosa si debba intendere per *prodotto* di due numeri (A, A') e (B, B'). Cominceremo dal supporre che questi due numeri siano entrambi *positivi* e quindi anche, come è sempre lecito, che le classi A, A', B, B' si compongano di soli numeri positivi.

Se indichiamo con $A \cdot B$ l'insieme di tutti i numeri della forma $a_i \cdot b_j$, che si ottengono moltiplicando un numero di A per un numero di B, e similmente con $A' \cdot B'$ il complesso di tutti i numeri della forma $a'_h \cdot b'_k$, si riconosce facilmente che le due classi A B, ed $A' \cdot B'$ individuano un nuovo numero.

Invero dalle disuguaglianze:

$$a_i < a'_h \ , \ b_j < b'_k$$

si deduce:

$$a_i \cdot b_j < a'_h \cdot b'_k,$$

cioè un numero della classe $A \cdot B$ è minore di ogni numero della classe $A' \cdot B'$. Se poi formiamo la differenza:

$$a'_h b'_k - a_i b_j,$$

vediamo che, scegliendo opportunamente gli indici h, k, i, j, potrà rendersi piccola a piacere; poichè essa può anche scriversi iden-

ticamente sotto la forma:

$$a'_h(b'_k - b_j) + b_j(a'_h - a_i)$$

e questa quantità è evidentemente minore di

$$a'_h(b'_k - b_j) + b'_k(a'_h - a_i)$$

dove ciascuno dei fattori $b'_k - b_j$ ed $a'_h - a_i$ può rendersi piccolo a piacere per supposto, senza aumentare, ma soltanto diminuendo, ove occorra, i valori degli altri due fattori a'_h e b'_k.

Esiste dunque il numero (AB , A'B'), che noi definiremo come *prodotto* dei due numeri (A , A') e (B , B'), scrivendo:

$$(A\ ,\ A')\cdot(B\ ,\ B') = (AB\ ,\ A'B'). \tag{7}$$

571. Anche quì dobbiamo legittimare questa definizione mostrando primieramente come dall' uguaglianza:

$$(E\ ,\ E') = (A\ ,\ A') \tag{8}$$

segua necessariamente l' uguaglianza:

$$(EB\ ,\ E'B') = (AB\ ,\ A'B'). \tag{9}$$

Invero si ha (art. 563) per la (8):

$$e_i \gtreqless a'_j \quad , \quad a_r \gtreqless e'_s$$

d'onde segue, qualunque siano gli indici i, j, r, s, h, k:

$$e_i b_h \gtreqless a'_j b'_k \quad , \quad a_r b_h \gtreqless e'_s b'_k\ ,$$

c. d. d.

572. Nel caso particolare in cui (A , A') e (B , B') siano rispettivamente uguali a due numeri razionali α e β, si potrà dunque scrivere:

$$(A\ ,\ A')\cdot(B\ ,\ B') = (\alpha\ ,\ \alpha)\cdot(\beta\cdot\beta) = (\alpha\beta\ ,\ \alpha\beta) = \alpha\beta$$

d'onde appare che il prodotto dei due numeri secondo la definizione (7) è precisamente il numero razionale $\alpha\beta$.

573. Dalla definizione data di prodotto segue senz' altro che *il prodotto di due o più numeri reali è indipendente dall'ordine di moltiplicazione dei fattori.*

Si vede inoltre che *il prodotto di un numero qualunque per la unità è il numero stesso*, poichè si ha:

$$(A\ ,\ A')\cdot(1\ ,\ 1) = (A \times 1\ ,\ A' \times 1) = (A\ ,\ A')$$

e che *il prodotto di un numero qualunque per lo zero è uguale a zero*, poichè

$$(A\ ,\ A')\cdot(0\ ,\ 0) = (A \times 0\ ,\ A' \times 0) = (0\ ,\ 0) = 0.$$

Reciprocamente si vede che: *se un prodotto di due numeri* (A , A') *e* (B , B') *è nullo, dovrà essere tale almeno uno dei fattori.* Infatti dall' uguaglianza:

$$(A\ ,\ A')\cdot(B\ ,\ B') = (AB\ ,\ A'B') = 0$$

si deduce evidentemente che gli elementi di AB, per supposto tutti positivi, dovranno essere tutti nulli. Ma a tale oggetto si richiede necessariamente che siano nulli tutti gli elementi dell'una o dell'altra delle due classi A e B, cioè, che è lo stesso, che sia nullo l'uno o l'altro dei due numeri (A, A') e (B, B').

574. Finalmente è facile riconoscere che anche la proprietà *distributiva* della moltiplicazione seguita a sussistere del pari inalterata nel campo dei numeri reali. Si ha infatti:

$$[(A, A') + (B, B')](C, C') = (A + B, A' + B')\cdot(C, C')$$
$$= (AC + BC, A'C' + B'C') = (AC, A'C') + (BC, B'C'),$$

cioè appunto:

$$[(A, A') + (B, B')](C, C') = (A, A')(C, C') + (B, B')(C, C').$$

575. Se i due numeri (A, A') e (B, B') non sono entrambi positivi, sarà sempre lecito supporre che ognuno di essi sia definito per mezzo di numeri tutti positivi ovvero tutti negativi, dopodichè non si avrà che estendere ai numeri reali la nota regola dei segni per ricondurre la definizione di prodotto dei due numeri a quella, data pocanzi, di prodotto di due numeri positivi.

576. Divisione. — Dati due numeri reali positivi qualisivogliano α e β, *dividere* il primo per il secondo significa cercare un terzo numero x che moltiplicato per il secondo riproduca il primo. Dovendo soddisfarsi all'uguaglianza:

$$\beta x = \alpha,$$

si vede primieramente che, se il numero β è zero senza che sia zero α, non può esistere alcun valore *finito* di x che rappresenti il quoziente di α per β, e che, se α e β sono entrambi nulli, ogni numero sostituito per x soddisferà all'uguaglianza, e potrà quindi considerarsi come quoziente di α per β.

577. Noi supporremo dunque che dei due numeri:

$$\alpha = (A, A'), \beta = (B, B')$$

il secondo (B, B') sia diverso da zero; cosicchè, se indichiamo con

$$b_1, b_2, b_3, \ldots$$

e

$$b'_1, b'_2, b'_3, \ldots$$

gli elementi di B e di B', potremo ritenere che le $b_1, b_2, b_3, \ldots$ sian tutte positive e maggiori di un certo numero δ *diverso da zero.* Designiamo ora con $\frac{1}{B}$ la classe formata dai numeri $\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \frac{1}{b_3} \ldots$ e con $\frac{1}{B'}$ quella formata dai numeri $\frac{1}{b'_1}, \frac{1}{b'_2}, \ldots$

È facile riconoscere che queste due classi individuano un nuovo numero $\left(\frac{1}{B'}, \frac{1}{B}\right)$. Infatti dalla disuguaglianza:

$$b_i < b'_h$$

si deduce:

$$\frac{1}{b'_h} < \frac{1}{b_i},$$

cioè ogni numero di $\frac{1}{B'}$ è minore di ogni numero di $\frac{1}{B}$. Inoltre la differenza:

$$\frac{1}{b_i} - \frac{1}{b'_h} = \frac{b'_h - b_i}{b_i b'_h} < \frac{b'_h - b_i}{b_i^2} < \frac{b'_h - b_i}{\delta^2}$$

può rendersi piccola quanto si vuole, rendendo sufficientemente piccola la differenza $b'_h - b_i$, poichè il denominatore δ^2 è un numero fisso diverso da zero.

Se ora facciamo il prodotto di β pel nuovo numero:

$$\beta' = \left(\frac{1}{B'}, \frac{1}{B}\right),$$

otteniamo per la regola di moltiplicazione (art. 570):

$$\beta \cdot \beta' = \left(\frac{B}{B'}, \frac{B'}{B}\right) = 1, \qquad (10)$$

poichè i numeri della prima classe, essendo essi della forma $\frac{b_i}{b'_h}$, ed essendo per supposto $b_i < b'_h$, saranno tutti minori di 1 e similmente quelli della seconda tutti maggiori di 1. Il numero β' è dunque il così detto *reciproco* di β.

Sia ora x il quoziente cercato di α per β; si dovrà avere:

$$\beta \cdot x = \alpha \qquad (11)$$

e quindi anche:

$$\beta' \cdot \beta \cdot x = \beta' \cdot \alpha$$

ossia per la (10):

$$x = \beta' \cdot \alpha,$$

e questo numero soddisferà evidentemente alla (11), cioè sarà il quoziente cercato.

Esso può esprimersi più semplicemente. Si ha infatti per la regola del prodotto:

$$x = \left(\frac{1}{B'}, \frac{1}{B}\right) \cdot (A, A') = \left(\frac{A}{B'}, \frac{A'}{B}\right)$$

dove $\frac{A}{B'}$ è il complesso di tutti i numeri $\frac{a_i}{b'_h}$ che si ottengono dividendo un elemento qualunque di A per uno qualunque di B', e similmente per $\frac{A'}{B}$.

Il quoziente della divisione di α per β, che abbiamo dimostrato esistere ed essere perfettamente determinato, si indica col simbolo $\frac{\alpha}{\beta}$. Il problema della divisione è dunque risoluto dalla formola:

$$\frac{(A\,,A')}{(B\,,B')}=\left(\frac{A}{B'}\,,\,\frac{A'}{B}\right). \tag{12}$$

578. Dalla formola che definiva il simbolo $\frac{\alpha}{\beta}$:

$$\beta\cdot\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)=\alpha \tag{13}$$

si deduce moltiplicando i due membri per γ:

$$\gamma\beta\cdot\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)=\gamma\alpha.$$

Seguita dunque a sussistere, anche pei numeri reali, la formola:

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma\cdot\alpha}{\gamma\cdot\beta}. \tag{14}$$

Se poi si somma la (13) membro a membro con l'analoga:

$$\beta\cdot\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)=\gamma\,,$$

si ottiene (art. 574):

$$\beta\cdot\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\beta}\right)=\alpha+\gamma$$

d'onde l'altra formola fondamentale:

$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\beta}=\frac{\alpha+\gamma}{\beta}. \tag{15}$$

Per mezzo delle (14) e (15) si ha poi:

$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\delta}{\beta\delta}+\frac{\gamma\beta}{\delta\beta}=\frac{\alpha\delta+\gamma\beta}{\beta\delta}. \tag{16}$$

E dunque ormai chiaro che tutte le regole e proprietà fondamentali del calcolo colle prime quattro operazioni si mantengono inalterate, quando dai numeri razionali si passi al campo più esteso dei numeri reali.

579. Estrazione di radice ad indice intero e positivo. — *Essendo* p *un qualsiasi numero reale e positivo, il numero* (A , A') *che ha per seconda classe tutti i numeri razionali la cui potenza* n^{ma} (n *intero e positivo*) *è superiore a* p, *e per prima classe tutti i rimanenti, soddisfa all'equazione:*

$$x^n = p. \tag{17}$$

Invero, scrivendo come al solito:

$$(A\ ,\ A') \equiv (a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3 \ldots ;\ a'_1\ ,\ a'_2\ ,\ a'_3 \ldots)$$

si ha, supponendo per fissare le idee $n = 3$:

$$(A\ ,\ A')^3 = (\ldots,\ a_i a_j a_r\ ,\ \ldots ;\ \ldots,\ a'_h a'_k a'_j\ ,\ \ldots). \qquad (18)$$

Ma dalle disuguaglianze presupposte:

$$a_i^3 \leqq p\ ,\ a_j^3 \leqq p\ ,\ a_r^3 \leqq p$$

si deduce:

$$(a_i \cdot a_j \cdot a_r)^3 \leqq p^3 \quad \text{ed} \quad a_i \cdot a_j \cdot a_r \leqq p.$$

Il numero p è dunque $\geqq$ di tutti i numeri che compongono la prima classe del simbolo (18), e similmente si riconoscerebbe essere $<$ di tutti i prodotti $a'_h \cdot a'_k \cdot a'_j$. È dunque p il numero che separa le due classi, cioè si ha appunto:

$$(A\ ,\ A')^3 = p.$$

580. *Non esiste alcun altro numero reale positivo che soddisfi alla stessa equazione* (17); *cosicchè il simbolo* $\sqrt[n]{p}$ *ha, nel campo dei numeri reali positivi, il significato di un unico numero ben determinato, che si chiamerà la radice* n^{ma} *aritmetica di* p.

Infatti, se x ed y siano due soluzioni della (17), si avrà evidentemente $x^n = y^n$. Ora quest'eguaglianza è inconciliabile coll'ipotesi che i due numeri positivi x ed y siano differenti, poichè, se fosse p. es. $x < y$, ne seguirebbe, *a fortiori*, elevando alla potenza ennesima: $x^n < y^n$.

581. Dopo quanto si è visto, non vi è ora alcuna difficoltà a stabilire il significato del simbolo h^α, qualunque sia il numero *reale* positivo h e qualunque sia il numero *razionale* α.

Partendo dal concetto che il significato di h^α debba stabilirsi in modo da far sussistere poi senza eccezione la regola fondamentale espressa dalla formola:

$$h^\alpha \cdot h^{\alpha'} = h^{\alpha + \alpha'} \qquad (19)$$

si scorgerà facilmente che il significato aritmetico di h^α non può definirsi che in un *unico* modo. Cioè, se α è dapprima un numero razionale positivo, vale a dire della foma $\frac{m}{n}$, dove m ed n sono interi e positivi, si dovrà porre come definizione di h^α:

$$h^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{h^m} \qquad (a)$$

e, se α è un numero razionale negativo:

$$h^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{h^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{h^m}}. \qquad (b)$$

Poste queste definizioni, alle quali deve aggiungersi ancora il

caso particolare:

$$h^0 = 1, \tag{c}$$

è facile verificare che la formola fondamentale (19) seguiterà a sussistere per tutti i valori razionali degli esponenti α ed α'.

582. Chiuderemo questo § con alcune proprietà fondamentali delle disuguaglianze fra numeri reali.

Si ha primieramente che: *dalle disuguaglianze*:

$$\alpha \gtreqless \beta \quad \text{ed} \quad \alpha' \gtreqless \beta'$$

fra quattro numeri reali positivi, segue necessariamente:

$$\alpha + \alpha' \gtreqless \beta + \beta' \quad , \quad \alpha\alpha' \gtreqless \beta\beta'.$$

Questo principio (di cui abbiamo implicitamente fatto uso all'articolo 580), è un corollario immediato dei criterii di eguaglianza e di disuguaglianza dati agli articoli 563 e 564.

583. Dalla definizione (a) segue che: *se α è un esponente positivo* (per ora anche razionale), *la potenza* h^α *avrà un valore maggiore, uguale o minore di* 1, *secondochè sia maggiore eguale o minore di* 1, *il numero* h.

Sia infatti, per fissare le idee, $h > 1$; e supponiamo, se è possibile, che si avesse (m ed n essendo interi e positivi):

$$h^{\frac{m}{n}} \gtreqless 1.$$

Elevando alla potenza n^{ma} se ne dedurrebbe (art. 582):

$$h^m \gtreqless 1.$$

Ora ciò è assurdo, poichè dal supposto $h>1$ segue (art. 582) $h^m>1$.

584. Si vede invece che: *se α è un esponente negativo, la potenza* h^α *sarà rispettivamente minore, uguale, o maggiore di* 1, *secondochè* h *sia maggiore, uguale o minore di* 1.

È questa una conseguenza immediata del teorema precedente, se si consideri che, per la definizione (b), $h^{-\alpha}$ è il numero reciproco di h^α.

Note ed Esercizi.

1. La definizione di somma data all'art. 566, oltre ad essere, come si è dimostrato, legittima ed opportuna, è altresì *necessaria*. Non sarebbe, cioè, possibile di dare per la somma un'altra definizione che non fosse ad essa equivalente.

Sia infatti x il numero che si voglia definire come somma di α e di β. Dalle disuguaglianze:

$$a_i \gtreqless \alpha \gtreqless a'_h \quad , \quad b_j \gtreqless \beta \gtreqless b'_k$$

che hanno luogo per le definizioni date di α e di β, si deve poter dedurre:

$$a_i + b_j \gtreqless \alpha + \beta \gtreqless a'_h + b'_k$$

e quindi anche:

$$a_i + b_j \gtreqless x \gtreqless a'_h + b'_k.$$

Il numero x dovrà dunque essere $\gtreqless$ di tutti i numeri della classe A + B e $\gtreqless$ di tutti quelli della classe A' + B'. Esso rappresenterà dunque il numero di separazione delle due classi, cioè sarà appunto $x=(A+B, A'+B')$.

2. Un'osservazione affatto analoga si deve fare a proposito della definizione di prodotto data all'art. 570.

Volendo infatti definire un certo numero reale x come valore del prodotto $\alpha\beta$, dalle disuguaglianze fondamentali:

$$a_i \gtreqless \alpha \gtreqless a'_h \quad , \quad b_j \gtreqless \beta \gtreqless b'_k$$

si dovrà poter dedurre:

$$a_i b_j \gtreqless x \gtreqless a'_h b'_k.$$

Il numero x dovrà dunque essere maggiore di tutti i numeri della classe A . B e minore di tutti quelli della classe A' . B', cioè dovrà essere appunto: $x = (AB \,.\, A'B')$.

3. Essendo dati due numeri positivi:

$$\alpha=(a_1 , a_2 , a_3 ,... ; a'_1 , a'_2 , a'_3 ,...), \ \beta=(b_1 , b_2 , b_3 ,... ; b'_1 , b'_2 , b'_3 ,...)$$

e supponendo disposti, ove ciò sia possibile, i numeri delle prime classi in modo da formare una progressione *crescente* ed *infinita* e quelli delle seconde in modo da formare una progressione *infinita* e *decrescente*, dimostrare che:

$$\alpha + \beta = (a_1 + b_1 , a_2 + b_2 , \ldots ; a'_1 + b'_1 , a'_2 + b'_2 , \ldots)$$

ed

$$\alpha\beta = (a_1 b_1 , a_2 b_2 , \ldots ; a'_1 b'_1 , a'_2 b'_2 , \ldots).$$

Ciò ha molta importanza pratica, poichè in questo modo le classi che definiscono la somma, ovvero il prodotto, assumono forma più semplice; ottenendosi i loro elementi come somme, ovvero prodotti, *dei soli elementi corrispondenti* delle classi corrispondenti.

§ 5.° — Limite di una successione (progressione) infinita di numeri reali.

585. Consideriamo una successione di un numero infinito di numeri $a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , \ldots , a_n , \ldots$ tale che ad ogni valore dell'indice n corrisponda un valore ben determinato di a_n. Si dice che una siffatta successione ammette il *limite* α (od anche che *tende* al *limite* α col crescere di n all'infinito) quando la differenza fra α ed uno qualunque dei termini di indice abbastanza grande sia più piccola di una quantità assegnata, piccola ad arbitrio. In altri termini: se ε è un numero positivo piccolissimo da fissarsi a piacere, si potrà sempre determinare n in modo che tutti i numeri della successione a partire da a_n differiscano da α per meno di ε. Cioè si dovrà avere *in valore assoluto*:

$$\alpha - a_n < \varepsilon \quad , \quad \alpha - a_{n+1} < \varepsilon \quad , \quad \alpha - a_{n+2} < \varepsilon \, , \ldots$$

contemporaneamente per lo stesso valore di ε.

Si dice anche talora, con locuzione più semplice ma meno ri-

gorosa, che i numeri di una successione tendono ad α quando col crescere degli indici essi si avvicinano indefinitamente ad α.

Se una successione d' infiniti numeri:

$$a_1 , a_2 , a_3 , \ldots , a_n \ldots$$

ammette un limite α, ciò s' indica colla scrittura:

$$\lim_{n=\infty} a_n = \alpha$$

e spesso più semplicemente con $\lim a_n = \alpha$, sottintendendo *per* $n=\infty$.

Esempio 1.° — Poichè col crescere dell' indice n i numeri:

$$1 , \frac{1}{2} , \frac{1}{3} , \frac{1}{4} , \ldots \frac{1}{n} ,$$

diventano sempre più piccoli, fino a differire dallo zero di tanto poco quanto si voglia, si avrà:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Esempio 2.° — Sia la successione:

$$\frac{2}{3} , \frac{3}{4} , \frac{4}{5} , \frac{5}{6} , \ldots \frac{1+n}{2+n} , \ldots .$$

Per questa successione si ha:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1+n}{2+n} = 1.$$

Per verificare ciò formiamo la differenza fra il limite presunto 1 ed un termine qualunque a_n.

Si trova:

$$1 - \frac{1+n}{2+n} = \frac{2+n-(1+n)}{2+n} = -\frac{1}{2+n}$$

ed è evidente che la frazione $\frac{1}{2+n}$ diviene più piccola di ogni quantità assegnabile col crescere indefinitamente dell' indice n. Dunque ecc.

586. Data una successione indefinita di numeri:

$$a_1 , a_2 , a_3 , \ldots , a_n , \ldots ,$$

si tratta ora di stabilire un criterio per riconoscere se essa ammetta, o pur no, un limite determinato.

Noi dimostreremo a tale oggetto il seguente:

Teorema. — *La condizione necessaria e sufficiente affinchè una successione di infiniti numeri ammetta un limite, si è che, per ogni*

quantità piccola quanto si voglia ε, *esista un valore finito dell'indice* n *tale che la differenza fra il numero* a_n *ed uno qualunque dei successivi sia, in valore assoluto, minore di* ε. Si deve cioè avere (*):

$$|a_n - a_{n+k}| < \varepsilon$$

contemporaneamente per $k = 1, 2, 3, \ldots$.

Cominciamo col dimostrare che questa condizione è necessaria. Invero, ammettiamo che della successione data:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

il limite ci sia, e sia A. Presa allora una quantità ε piccola ad arbitrio, si potrà sempre prendere poi n abbastanza grande perchè si abbia:

$$|A - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ed inoltre:

$$|A - a_{n+k}| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

onde:

$$|A - a_n| + |A - a_{n+k}| < \varepsilon$$

e ancora *a fortiori* (**):

$$|(A - a_{n+k}) - (A - a_n)| < \varepsilon,$$

cioè appunto:

$$|a_n - a_{n+k}| < \varepsilon.$$

Dunque, se la successione ammette il limite, la condizione è verificata; epperò è necessaria per l'esistenza del limite.

587. Passiamo ora a dimostrare che questa condizione è anche sufficiente; ammetteremo dunque che, per ogni quantità positiva ε, fissata piccola ad arbitrio, si possa sempre determinare n in modo da avere:

$$|a_{n+k} - a_n| < \varepsilon \quad , \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

e dimostreremo che allora esiste necessariamente un limite per la successione data.

Immaginiamo di avere una successione di quantità positive diverse da zero $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ tale che sia $\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0$. Una siffatta successione si può sempre costruire in infiniti modi; per esempio basterà prendere $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$. Presa una qualunque di queste quantità ε_i, si potrà sempre, per ipotesi, determinare, corrispon-

(*) D'ora innanzi, per designare il valore assoluto di una quantità, rinchiuderemo la quantità stessa fra due parentesi quadre.

(**) Poichè, se α e β sono due numeri reali, si ha sempre:

$$|\alpha \pm \beta| \lesseqgtr |\alpha| + |\beta|.$$

dentemente ad essa, un certo valore n_i dell'indice n tale da avere:

$$|a_{n_i+k} - a_{n_i}| < \varepsilon_i \ldots . \qquad (1)$$

In corrispondenza delle quantità $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$ avremo dunque altrettanti indici $n_1, n_2, n_3, \ldots$ per i quali saranno verificate le disuguaglianze:

$$|a_{n_1+k} - a_{n_1}| < \varepsilon_1$$

$$|a_{n_2+k} - a_{n_2}| < \varepsilon_2, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

$$|a_{n_3+k} - a_{n_3}| < \varepsilon_3$$

$$\cdots\cdots$$

Ciò premesso, indichiamo con A la classe formata dai numeri:

$$a_{n_1} - \varepsilon_1, \; a_{n_2} - \varepsilon_2, \ldots, a_{n_i} - \varepsilon_i, \ldots$$

e con A' quella formata dai numeri:

$$a_{n_1} + \varepsilon_1, \; a_{n_2} + \varepsilon_2, \ldots, a_{n_i} + \varepsilon_i, \ldots .$$

Dico che queste due classi individuano un numero $(A, A') = \alpha$ e che questo è appunto il limite della successione data.

Consideriamo infatti un elemento qualunque $a_{n_i} - \varepsilon_i$ della classe A ed uno qualunque $a_{n_j} + \varepsilon_j$ della classe A'.

Dobbiamo dimostrare primieramente che:

$$a_{n_i} - \varepsilon_i < a_{n_j} + \varepsilon_j$$

o che è lo stesso:

$$a_{n_i} - a_{n_j} < \varepsilon_i + \varepsilon_j .$$

Ora ciò riesce manifesto se si riflette che, nel caso di $n_j > n_i$, si ha per le (1):

$$|a_{n_i} - a_{n_j}| < \varepsilon_i$$

e, nel caso di $n_j < n_i$, si ha per le stesse (1):

$$|a_{n_i} - a_{n_j}| < \varepsilon_j$$

onde in ogni caso sarà:

$$|a_{n_i} - a_{n_j}| < \varepsilon_i + \varepsilon_j$$

ed *a fortiori*:

$$a_{n_i} - a_{n_j} < \varepsilon_i + \varepsilon_j .$$

In secondo luogo dobbiamo dimostrare che la differenza:

$$(a_{n_j} + \varepsilon_j) - (a_{n_i} - \varepsilon_i)$$

può rendersi piccola a piacere scegliendo opportunamente gli indici i ed j. Ed invero a tale oggetto basterà prendere $j=i$, poichè allora questa differenza si riduce a $2\varepsilon_i$ che, per supposto, può rendersi piccolo a piacere prendendo l'indice i abbastanza grande.

Ora io dico che il numero $\alpha = (A, A')$ così determinato, è appunto il limite della successione $a_1, a_2, a_3, \ldots$. Infatti, poichè α è compreso fra i numeri di A e quelli di A', si ha:

$$a_{n_i} - \varepsilon_i < \alpha < a_{n_i} + \varepsilon_i$$

e anche cambiando i segni a tutti i membri:

$$\varepsilon_i - a_{n_i} > -\alpha > -a_{n_i} - \varepsilon_i \ldots \tag{2}$$

Inoltre, per le (1), si ha:

$$a_{n_i} + \varepsilon_i > a_{n_i+k} > a_{n_i} - \varepsilon_i \quad , \quad k = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

Se ora sommiamo membro a membro la (2) con la (3), otteniamo:

$$2\varepsilon_i > a_{n_i+k} - \alpha > -2\varepsilon_i \quad , \quad k = 1, 2, \ldots$$

cioè:

$$|\alpha - a_{n_i+k}| < 2\varepsilon_i \quad , \quad k = 1, 2, \ldots \tag{4}$$

Basterà dunque prendere l'indice m di a_m maggiore di n_i perchè a_m differisca da α per meno della quantità piccolissima $2\varepsilon_i$; e ciò esprime appunto che:

$$\lim_{m=\infty} a_m = \alpha.$$

588. Come applicazione del teorema ora dimostrato vogliamo far vedere che: *una successione infinita di numeri positivi crescenti:*

$$a_1 \lesseqgtr a_2 \lesseqgtr a_3 \lesseqgtr a_4 \ldots \tag{5}$$

(i cui valori non divengono infinitamente grandi col crescere dell'indice n*) tende sempre ad un limite determinato.*

Dire che i valori (5) non possono divenire infinitamente grandi col crescere dell'indice n significa esistere un numero positivo k tale che si abbia sempre:

$$a_n < k$$

comunque grande si voglia prendere l'indice n.

Ciò premesso, si immagini fissata a piacere una quantità positiva ε, anche piccolissima purchè non nulla, e si consideri la progressione aritmetica:

$$0, \varepsilon, 2\varepsilon, 3\varepsilon, 4\varepsilon, \ldots$$

Per mezzo di questi termini l'intervallo compreso fra 0 e k si verrà a suddividere in un numero finito di intervalli più piccoli (cioè p. es. da 0 ad ε, da ε a 2ε, ... da $m\varepsilon$ a k, se k è compreso

fra $m\varepsilon$ ed $(m+1)\varepsilon$). Si immagini ora conosciuto quello di questi intervalli che è l'ultimo in cui possa trovarsi compreso qualche numero della successione (5). Esso potrà essere l'intervallo estremo fra $m\varepsilon$ e k, o più generalmente un intervallo qualunque fra $\mu\varepsilon$ e $(\mu+1)\varepsilon$. Sia allora a_i un elemento di (5) compreso in esso. Per ipotesi tutti i numeri della successione $a_i, a_{i+1}, \ldots$ saranno inferiori a $(\mu+1)\varepsilon$, d'altra parte essi sono per le (5) superiori od al più eguali ad a_i; quindi essi si troveranno tutti compresi, al pari di a_i, nell'intervallo fra $\mu\varepsilon$ e $(\mu+1)\varepsilon$. Si avrà quindi evidentemente:

$$|a_i - a_{i+k}| < \varepsilon \qquad , \qquad k = 1, 2, 3, \ldots .$$

La condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza del limite resta così verificata.

589. Per trovare il limite di una successione infinita di numeri, si fa spesso uso del seguente teorema:

Se a_n *e* b_n *tendono ad uno stesso limite* α *col crescere dell'indice* n *e* c_n *è un numero sempre compreso fra* a_n *e* b_n, *esso pure avrà per limite* α *col crescere di* n *all'infinito.*

Infatti, poichè c_n è compreso fra a_n e b_n, la differenza $c_n - \alpha$ sarà compresa fra $a_n - \alpha$ e $b_n - \alpha$. Ma, essendo α per supposto limite di a_n e di b_n, ciascuna delle differenze $a_n - \alpha$ e $b_n - \alpha$, per la definizione di limite, diventerà piccola a piacere purchè si prenda l'indice n abbastanza grande. Lo stesso accadrà dunque *a fortiori* della differenza $c_n - \alpha$ il cui valore algebrico è compreso fra quelli di queste due; cioè c_n tenderà del pari allo stesso limite α col crescere di n all'infinito.

Esempio: *Se* $\lim \alpha_n = 1$, *è anche* $\lim \sqrt[q]{\alpha_n} = 1$.

Invero, a seconda del valore dell'indice n, il numero α_n potrà essere maggiore o minore di 1. Ora si ha:

$$\text{per } \alpha_n \gtreqless 1: \qquad 1 \lesseqgtr \sqrt[q]{\alpha_n} \lesseqgtr \alpha_n$$

$$\text{per } \alpha_n \lesseqgtr 1: \qquad 1 \gtreqless \sqrt[q]{\alpha_n} \gtreqless \alpha_n$$

come si riconosce subito elevando tutti i membri alla potenza intera e positiva q. In ogni caso il numero $\sqrt[q]{\alpha_n}$ è dunque compreso fra i due numeri 1 ed α_n, che hanno lo stesso limite 1; come bastava dimostrare.

590. Se il numero a_n finisce per diventare, in valore assoluto, più grande di qualsivoglia quantità assegnabile col crescere infinitamente di n, si dice qualche volta che a_n ha per limite l'*infinito* e si scrive:

$$\lim_{n=\infty} a_n = \infty .$$

Se inoltre col crescere dell'indice n, il numero n finisce per avere sempre lo stesso segno positivo (o negativo), si dice più specificatamente che a_n ha per limite l'infinito positivo ovvero l'in-

finito negativo, scrivendosi a seconda che ha luogo l'uno o l'altro caso:

$$\lim_{n=\infty} a_n = +\infty, \text{ ovvero: } \lim_{n=\infty} a_n = -\infty.$$

A schiarimento di queste definizioni si considerino i seguenti esempi:

$$\lim_{n=\infty} \frac{2+n}{2} + +\infty$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{2-n}{2} = -\infty$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{2+(-1)^n \cdot n}{2} = \infty.$$

Chiuderemo questo paragrafo con alcuni altri esempi di frequente applicazione.

591. *La somma:*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{\mathrm{n}} \tag{6}$$

diviene infinitamente grande quando n *cresce all'infinito.*

Invero, se da un valore qualunque di n si passa al valore doppio $2n$, la somma (6) si viene ad accrescere della quantità:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \tag{7}$$

che è maggiore di $\frac{1}{2}$; poichè, sostituendo in luogo di ogni termine di (7) il più piccolo, cioè $\frac{1}{2n}$, si ha evidentemente:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} = n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

È dunque chiaro che raddoppiando successivamente e indefinitamente il valore di n, la somma (6) si verrà ad accrescere di un numero di mezze unità, che potrà essere grande a piacere; onde la somma stessa potrà rendersi grande a piacere.

592. *Più generalmente, si ha, qualunque sia il numero positivo α:*

$$\lim_{n=\infty}\left(\frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\alpha+2} + \ldots + \frac{1}{\alpha+n}\right) = +\infty. \tag{8}$$

Infatti, se h è l'intero immediatamente superiore ad α, si ha:

$$\frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\alpha+2} + \ldots + \frac{1}{\alpha+n} > \frac{1}{h+1} + \frac{1}{h+2} + \ldots + \frac{1}{h+n}$$

ed è chiaro che il secondo membro cresce indefinitamente col cre-

scere di n, poichè la somma:

$$\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{h}\right)+\left(\frac{1}{h+1}+\frac{1}{h+2}+\ldots+\frac{1}{h+n}\right)$$

diviene, per l'art. prec., infinitamente grande per $n=\infty$.

593. *Se α e β sono due numeri positivi, si ha, per $\alpha<\beta$:*

$$\lim_{n=\infty}\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)\ldots(\alpha+n)}{(\beta+1)(\beta+2)(\beta+3)\ldots(\beta+n)}=0.$$

Si può scrivere infatti:

$$\frac{(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+n)}{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n)}=\left(1+\frac{\beta-\alpha}{\alpha+1}\right)\left(1+\frac{\beta-\alpha}{\alpha+2}\right)\ldots\left(1+\frac{\beta-\alpha}{\alpha+n}\right).$$

Ma, ritenendo soltanto una parte dei termini che nascerebbero dallo sviluppo del secondo membro, si ha evidentemente:

$$\left(1+\frac{\beta-\alpha}{\alpha+1}\right)\left(1+\frac{\beta-\alpha}{\alpha+2}\right)\ldots\left(1+\frac{\beta-\alpha}{\alpha+n}\right)>1+\frac{\beta-\alpha}{\alpha+1}+\frac{\beta-\alpha}{\alpha+2}\ldots+\frac{\beta-\alpha}{\alpha+n},$$

onde:

$$\frac{(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+n)}{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n)}>1+(\beta-\alpha)\left\{\frac{1}{\alpha+1}+\frac{1}{\alpha+2}+\ldots+\frac{1}{\alpha+n}\right\}.$$

L'asserto è così dimostrato, poichè il secondo membro diviene (art. 592) infinitamente grande per $n=\infty$.

Note ed Esercizi.

1. Il quoziente $\frac{a_1+a_2+\ldots a_n}{n}$ si chiama, come è noto, la *media aritmetica* dei numeri $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Se α e β sono rispettivamente il minimo ed il massimo fra i valori algebrici di $a_1, a_2, \ldots, a_n$, dalle uguaglianze:

$$\begin{array}{ll} \alpha \lesseqgtr a_1 \quad , & a_1 \lesseqgtr \beta \\ \alpha \lesseqgtr a_2 \quad , & a_2 \lesseqgtr \beta \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \alpha \lesseqgtr a_n \quad , & a_n \lesseqgtr \beta \end{array}$$

si deduce sommando membro a membro e dividendo per n:

$$\alpha \lesseqgtr \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \lesseqgtr \beta,$$

cioè: *la media aritmetica di più numeri è compresa fra il valore più piccolo ed il valore più grande dei numeri stessi.*

2. *Se la successione* $a_1, a_2, a_3, \ldots$ *tende al limite finito* A, *si può sempre, data una quantità positiva ε piccola a piacere, determinare l'indice* n *in modo*

che la media aritmetica di un numero qualunque di termini della successione, scelti fra quelli che vengono dopo a_n, *differisca da* A *per meno di* ε.

Ricordando la definizione di limite si vedrà che è questo un semplice corollario del teorema precedente.

3. *Se la successione* $a_1, a_2, a_3, \ldots$ *tende al limite* A, *anche la media aritmetica*, M_n, *dei primi* n *termini tende allo stesso limite.*

Supponiamo dapprima $A = 0$. Fissata a piacere ε si potrà, pel teorema precedente, fissare μ in modo da avere:

$$\left|\frac{a_{\mu+1} + a_{\mu+2} + \ldots + a_{\mu+n}}{n}\right| < \varepsilon$$

per tutti i valori di n. Potendosi scrivere:

$$M_{\mu+n} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_\mu}{\mu + n} + \frac{a_{\mu+1} + a_{\mu+2} + \ldots + a_{\mu+n}}{\mu + n},$$

si avrà dunque:

$$|M_{\mu+n}| < \left|\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_\mu}{\mu + n}\right| + \varepsilon.$$

Ma, per valori di n abbastanza grandi, si ha evidentemente:

$$\left|\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_\mu}{\mu + n}\right| < \varepsilon.$$

Sarà dunque per tutti i valori abbastanza grandi di n:

$$|M_{\mu+n}| < 2\varepsilon.$$

Con ciò resta appunto dimostrato che:

$$\lim_{i=\infty} M_i = 0.$$

Se A è diverso da zero, la successione $a_1 - A, a_2 - A, \ldots$ avrà ancora per limite zero. Si ha dunque pel caso precedente:

$$\lim_{n=\infty} \frac{(a_1 - A) + (a_2 - A) + \ldots + (a_n - A)}{n} = 0,$$

cioè appunto:

$$\lim_{n=\infty} \left\{\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} - A\right\} = 0.$$

4. *Se, per* $n = \infty$, $\lim a_n = A$ *e* $\lim b_n = B$, *si ha anche*:

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_n b_1}{n} = A \cdot B.$$

Posto infatti: $a_n = A + \alpha_n$, $b_n = B + \beta_n$, cosicchè $\lim \alpha_n = 0$, $\lim \beta_n = 0$, si può scrivere:

$$\frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_n b_1}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} (A + \alpha_i)(B + \beta_{n-i})}{n}$$

$$= AB + B\frac{\Sigma \alpha_i}{n} + A\frac{\Sigma \beta_i}{n} + \frac{\Sigma \alpha_i \beta_{n-i}}{n}.$$

Poichè già sappiamo (Nota 8ª) che:

$$\lim \frac{1}{n}\sum_1^n \alpha_i = 0 \quad , \quad \lim \frac{1}{n}\sum_1^n \beta_i = 0,$$

ci resta soltanto a dimostrare che:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i\beta_{n-i} = 0. \qquad (1)$$

Ora, tendendo α_n e β_n al limite zero, i loro valori assoluti non possono crescere indefinitamente; onde esisterà un numero positivo fisso Q tale da aversi per *tutti i valori di* i:

$$|\alpha_i| < Q \quad , \quad |\beta_i| < Q.$$

Esisterà inoltre, per ogni numero positivo ε fissato a piacere, un valore di μ tale che sia:

$$|\alpha_i| < \varepsilon \quad , \quad |\beta_i| < \varepsilon$$

per tutti i valori di i *superiori a* μ. Se dunque prendiamo $n > 2\mu$, avremo:

$$|\alpha_i\beta_{n-i}| < \varepsilon \cdot T$$

poichè, se i sia $\gtreqless \mu$, sarà invece $n - i > \mu$. Si potrà dunque scrivere, per $n > 2\mu$:

$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i\beta_{n-i} < \frac{1}{n} \cdot n\varepsilon T = \varepsilon \cdot T$$

d'onde segue immediatamente la (1).

5. Si applichi il teorema dell'art. 589 a dimostrare che:

$$\lim_{x=0} \frac{\sin x}{x} = 1 ,$$

cioè che *la successione* $\frac{\sin x_0}{x_0}, \frac{\sin x_1}{x_1}, \frac{\sin x_2}{x_2}, \ldots$ *ha per limite* 1, *quando la successione* $x_0, x_1, x_2, \ldots$ *ha per limite zero.* Serviranno a quest' uopo le diseguaglianze:

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x$$

che è assai facile stabilire geometricamente.

6. Essendo, come all'art. 598, $\alpha < \beta$, riconoscere che:

$$\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n)}{(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+n)} \gtreqless \frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}{\left(\frac{\beta-\alpha}{1+\alpha}+1\right)\left(\frac{\beta-\alpha}{1+\alpha}+2\right)\ldots\left(\frac{\beta-\alpha}{1+\alpha}+n\right)}.$$

7. Dimostrare che: $\lim_{n=\infty} \frac{\lfloor n}{n^n} = 0.$

8. Dimostrare che si ha anche, più generalmente:

$$\lim_{n=\infty} \left\{ n^k \cdot \frac{\lfloor n}{n^n} \right\} = 0$$

comunque si fissi l'esponente k.

§ 6.° — Operazioni fondamentali su limiti finiti.

594. *Se* a_n *e* b_n *tendono rispettivamente ai limiti finiti* A *e* B, *la somma* $a_n + b_n$ *avrà per limite* A + B, *e la differenza* $a_n - b_n$ *avrà per limite* A — B.

Per dimostrare che $\lim(a_n + b_n) = A + B$, basta far vedere che per tutti i valori abbastanza grandi di n si può avere:

$$|(A + B) - (a_n + b_n)| < \varepsilon,$$

ε essendo una quantità positiva piccolissima fissata ad arbitrio. Ora questa disuguaglianza può anche scriversi:

$$|(A - a_n) + (B - b_n)| < \varepsilon$$

e sotto questa forma si vede chiaramente che essa sarà soddisfatta per tutti i valori abbastanza grandi di n; poichè, essendo per supposto $\lim a_n = A$ e $\lim b_n = B$, ciascuna delle differenze $(A - a_n)$ e $(B - b_n)$, e quindi anche la loro somma, diventa piccola a piacere per n abbastanza grande.

Per dimostrare poi che $\lim(a_n - b_n) = A - B$, si procede in modo affatto simile considerando che la differenza:

$$(A - B) - (a_n - b_n)$$

può scriversi identicamente sotto la forma:

$$(A - a_n) - (B - b_n).$$

595. *Se* a_n *e* b_n *tendono risp. ai limiti finiti* A *e* B, *il prodotto* $a_n \cdot b_n$ *avrà per limite il prodotto* A·B.

Come sopra, basta dimostrare che la differenza:

$$AB - a_n b_n$$

può ridursi piccola a piacere per n abbastanza grande. Invero si può scrivere identicamente:

$$AB - a_n b_n = (A - a_n)B + (B - b_n)a_n$$

ed ora è facile riconoscere che ciascuna delle due parti che compongono il secondo membro può divenire piccola a piacere per n abbastanza grande. Infatti, le differenze $(A - a_n)$ e $(B - b_n)$ potendo per ipotesi rendersi piccole a piacere, lo stesso deve dirsi del prodotto di $A - a_n$ per la quantità *fissa* B e del prodotto di $B - b_n$ per il fattore a_n; poichè quest'ultimo, avendo per limite finito A, si conserverà sempre finito, cioè inferiore ad una quantità fissa assegnabile.

596. *Se* a_n *e* b_n *tendono risp. ai limiti* A *e* B, *e se* B *è diverso da zero, il quoziente* $\frac{a_n}{b_n}$ *avrà il limite finito* $\frac{A}{B}$.

Cominciamo dal dimostrare che il quoziente $\frac{1}{b_n}$ ha per limite $\frac{1}{B}$. Basterà dimostrare che la differenza:

$$\frac{1}{B} - \frac{1}{b_n} = \frac{b_n - B}{B \cdot b_n} = (b_n - B) \times \frac{1}{B \cdot b_n}$$

può rendersi piccola a piacere per n abbastanza grande. Ora ciò è vero, poichè l'ultimo membro è il prodotto di due fattori, dei quali il primo $b_n - B$ diviene piccolissimo per ipotesi ed il secondo resta finito. Invero, perchè il secondo fattore $\frac{1}{B \cdot b_n}$ potesse divenire grande quanto si voglia col crescere di n, bisognerebbe che il fattore b_n del denominatore potesse divenire piccolo a piacere per n abbastanza grande, ossia che b_n avesse per limite lo zero, il che è contrario al supposto.

Ciò premesso, poichè:

$$\lim a_n = A \quad \text{e} \quad \lim \frac{1}{b_n} = \frac{1}{B},$$

si ha per il teorema del prodotto dell' art. prec.:

$$\lim\left(a_n \cdot \frac{1}{b_n}\right) = A \cdot \frac{1}{B}$$

ossia appunto:

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}.$$

Come applicazione importante proponiamoci di trovare il limite, per n infinito, dell'espressione $\frac{a + bn}{c + dn}$; a, b, c, d essendo quattro numeri costanti.

Il numeratore $a + bn$ tende in generale, per n infinitamente grande, ad un limite infinito e lo stesso dicasi del denominatore. Volendo quindi applicare il teorema del quoziente, converrà prima trasformare la frazione in modo che tanto il numeratore che il denominatore tendano a limiti *finiti*.

A tale oggetto basterà dividere per n i due termini della frazione, con che essa non cambia di valore e prende la forma:

$$\frac{\frac{a}{n} + b}{\frac{c}{n} + d}.$$

Ma, se n cresce indefinitamente, $\frac{a}{n}$ e $\frac{c}{n}$ tendono evidentemente

a zero, onde:

$$\lim\left(\frac{a}{n}+b\right)=b \quad , \quad \lim\left(\frac{c}{n}+d\right)=d.$$

Epperò, applicando ora il teorema del quoziente, si trova:

$$\lim\frac{a+bn}{c+dn}=\frac{b}{d}.$$

597. Poichè il teorema dell'art. 595 si estende immediatamente, come è manifesto, al prodotto di un numero qualunque di fattori, ne segue, per p intero e positivo, che $(a_n)^p$ tenderà al limite A^p, se il numero positivo a_n tende al limite A.

598. Più generalmente: *se α è un numero razionale qualunque, la potenza a_n^α tenderà ad A^α, se a_n tende al limite finito* A.

Sia infatti dapprima $\alpha=\frac{p}{q}$, essendo p e q interi e positivi. Si può scrivere:

$$a_n^\alpha=a_n^{\frac{p}{q}}=A^{\frac{p}{q}}.\left(\frac{a_n}{A}\right)^{\frac{p}{q}}. \tag{1}$$

Ma dall' essere $\lim\frac{a_n}{A}=1$ segue (art. 589) che è anche:

$$\lim_{n=\infty}\left(\frac{a_n}{A}\right)^{\frac{1}{q}}=1,$$

e quindi anche per l' art. prec.:

$$\lim_{n=\infty}\left(\frac{a_n}{A}\right)^{\frac{p}{q}}=1.$$

Dalla (1) si ha dunque appunto: $\lim a_n^{\frac{p}{q}}=A^{\frac{p}{q}}$.

Il caso di α negativo si riconduce evidentemente a quello ora contemplato mediante il teorema del quoziente.

Note ed Esercizi.

1. Nella dimostrazione dell'art. 598 si è supposto implicitamente che A non sia eguale a zero. Per $A=0$ il lettore riconoscerà immediatamente la validità del teorema.

2. Trovare il limite di $\frac{a+bn+cn^2}{a'+b'n+c'n^2}$, di $\frac{a+bn+cn^2+dn^3}{a'+bn'+c'n^2+d'n^3}$, ecc. per $n=\infty$.

3. Essendo $\lim\frac{a_{n+1}}{a_n}=A$, per $n=\infty$, dimostrare che:

$$\lim\frac{a_{n+1}}{a_{n-1}}=\left(\lim\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^2=A^2.$$

4. Se il quoziente $\frac{a_n}{b_n}$ tende ad un limite finito, e se si ha inoltre: $\lim \frac{b_{n+1}}{b_n} \gtrless 1$, dimostrare che $\lim\limits_{n=\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim\limits_{n=\infty} \frac{a_n}{b_n}$.

Si applichi l'identità:

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \frac{a_n}{b_n} + \frac{\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} - \frac{a_n}{b_n}}{1 - \frac{b_n}{b_{n+1}}}.$$

5. Dedurre come corollario che: se $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ tende ad un limite finito diverso dall'unità, anche il rapporto $\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n-a_{n-1}}$ tende allo stesso limite.

6. *Se* α_n *tende, per* $n=\infty$, *ad un limite finito e diverso da zero, si ha*:

$$\lim_{n=\infty} \frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{n+1}}{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n} = 1.$$

Si applichi la nota 8ª del § 4°, dopo aver osservato che si può scrivere:

$$\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{n+1}}{\alpha_1+\alpha_2+\ldots\alpha_n} = \frac{n+1}{n}\left\{\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{n+1}}{n+1} : \frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}{n}\right\}.$$

§ 7.° — Limiti di alcune espressioni esponenziali. Potenze con esponente reale e logaritmi dei numeri reali.

599. *Le potenze successive:*

$$h, h^2, h^3, \ldots, h^n, \ldots$$

di un numero positivo h *tendono all'infinito positivo quando* $h>1$, *e tendono invece a zero quando* $h<1$.

Cominciamo dal supporre che h sia un numero positivo maggiore di 1. Si può scrivere:

$$h = 1 + (h-1)$$

$$h^2 - h = h(h-1) > h-1$$

$$h^3 - h^2 = h^2(h-1) > h-1$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$h^n - h^{n-1} = h^{n-1}(h-1) > h-1.$$

Infatti, poichè $h>1$, si ha *a fortiori* (art. 583) $h^i > 1$, e moltiplicando i due membri per $(h-1)$:

$$h^i(h-1) > h-1.$$

Sommando ora membro a membro le n ineguaglianze scritte sopra, e considerando che i termini in $h, h^2, h^3, \ldots, h^{n-1}$ si di-

struggono nel primo membro, perchè uguali a due a due e di segno contrario, si ottiene:

$$h^n > n(h-1) + 1. \qquad (1)$$

Da questa disuguaglianza si vede ora che il valore di h^n può divenire grande quanto si vuole, purchè si prenda l'esponente n abbastanza grande; poichè, volendo che h^n superi un numero positivo K scelto grande a piacere, basterà, in virtù della (1), di prendere n in modo che si abbia:

$$n(h-1) + 1 \geqq K,$$

cioè di prendere:

$$n \geqq \frac{K-1}{h-1},$$

il che si può sempre fare prendendo per n il numero intero immediatamente superiore a $\frac{K-1}{h-1}$.

Si ha dunque:

$$\lim_{n=\infty} h^n = +\infty \quad (h > 1). \qquad (2)$$

Supponiamo ora che h sia un numero positivo minore di 1. Poichè allora il numero *reciproco* $\frac{1}{h}$ è invece maggiore di 1, si ha per quanto precede:

$$\lim_{n=\infty} \left(\frac{1}{h}\right)^n = +\infty$$

o, che è lo stesso:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{h^n} = +\infty.$$

Ma perchè la frazione $\frac{1}{h^n}$ diventi grande quanto si vuole, col crescere di n, è necessario che il denominatore h^n diventi piccolo quanto si vuole, cioè appunto che si abbia:

$$\lim_{n=\infty} h^n = 0 \quad (h < 1). \qquad (3)$$

600. La formola (2), e quindi anche la (3), vale anche se n tende all'infinito positivo percorrendo una progressione qualsiasi di valori razionali. Infatti, se m è il massimo intero contenuto in n e sia $n = m + \mu$, si ha (cfr. art. 581):

$$h^n = h^{m+\mu} = h^m h^\mu > h^m.$$

601. Si consideri ora una successione di numeri:

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$$

avente per limite lo *zero*, e si formino le potenze:

$$h^{\varepsilon_1}, h^{\varepsilon_2}, h^{\varepsilon_3}, \ldots.$$

Questa nuova successione avrà per limite l' *unità*.

Supponiamo infatti, per fissare le idee, $h > 1$ e le ε positive, e consideriamo la differenza $h^{\varepsilon_n} - 1$ che è certamente positiva (articolo 583). Dobbiamo dimostrare che, dato un numero positivo δ, anche piccolissimo, si può sempre determinare n in modo da avere:

$$h^{\varepsilon_n} - 1 < \delta$$

il che equivale a scrivere:

$$h^{\varepsilon_n} < 1 + \delta$$

od anche:

$$(1 + \delta)^{\frac{1}{\varepsilon_n}} > h.$$

Ora è manifesto che quest'ultima disuguaglianza sarà soddisfatta dai valori abbastanza grandi di n, poichè, essendo per supposto $\lim \varepsilon_n = 0$, la reciproca $\frac{1}{\varepsilon_n}$ avrà per limite $+\infty$; quindi il numero $1 + \delta$, che è evidentemente maggiore di 1, venendo elevato ad un esponente positivo grande quanto si vuole finirà per superare certamente il valore di h (art. 599).

602. Il risultato dell' articolo precedente viene espresso dalla scrittura:

$$\lim_{n=\infty} h^{\varepsilon_n} = 1.$$

Per esprimere però al tempo stesso che per $n = \infty$ l'esponente ε_n tende al limite zero, si preferisce di scrivere:

$$\lim_{\varepsilon=0} h^{\varepsilon} = 1 \ldots \qquad (4)$$

e si dice che *un numero positivo elevato ad un esponente piccolissimo tende al valore* 1 *quando l'esponente tende al valore* 0.

Se all'esponente ε si da poi precisamente il valore zero, si ha $h^0 = 1$, secondo la convenzione già fatta (art. 581).

603. Finora si è dato un significato a quelle sole potenze di un numero reale e positivo α, che hanno per esponente un numero razionale.

Siano ora due numeri reali e positivi qualisivogliano:

$$\alpha = (A, A') = (a_1, a_2, \ldots; a'_1, a'_2, \ldots)$$
$$\beta = (B, B') = (b_1, b_2, \ldots; b'_1, b'_2, \ldots),$$

cosicchè le a, a', b, b' si riterranno essere numeri razionali tutti positivi. Supporremo inoltre, per fissare le idee, $\alpha > 1$.

Col simbolo α^β si intenderà quel numero reale che ha per prima

classe tutti i numeri del tipo $(a_i)^{b_j}$ e per seconda classe tutti quelli del tipo $(a'_h)^{b'_k}$; cosicchè la definizione generale di potenza verrà espressa dalla scrittura (*):

$$(A\,,A')^{(B\,,B')} = \left(A^B\,,(A')^{B'}\right)$$

Per legittimare questa definizione dobbiamo innanzi tutto dimostrare che il simbolo $\left(A^B\,,(A')^{B'}\right)$ rappresenta effettivamente un numero.

Invero, essendo per le ipotesi fatte $\frac{a}{a'} \lesseqgtr 1$ ed $a' \gtreqless 1$, si ha (articoli 583 e 584):

$$\frac{a^b}{(a')^b} \lesseqgtr 1 \qquad \text{ed} \qquad a'^{(b-b')} \lesseqgtr 1.$$

Di queste due disuguaglianze la prima ci dice che $a^b \lesseqgtr a'^b$ e la seconda che $(a')^b \lesseqgtr (a')^{b'}$. È dunque $a^b \lesseqgtr (a')^{b'}$, cioè ogni numero della classe A^B è $\lesseqgtr$ di ogni numero della classe $(A')^{B'}$.

Dobbiamo, in secondo luogo, dimostrare che la differenza $(a')^{b'} - a^b$ può rendersi piccola a piacere scegliendo opportunamente i numeri a, b, a', b' nelle rispettive classi A, B, A', B'. Ora, si può scrivere identicamente:

$$(a')^{b'} - a^b = a^b(a^{b'-b} - 1) + \left((a')^{b'} - a^{b'}\right) + (a^{b'} - a^{b'}).$$

Basterà quindi riconoscere che ognuna delle tre differenze scritte fra parentesi può rendersi piccola a piacere.

Per la prima si ha infatti, scegliendo $a \gtreqless 1$:

$$a^{b'-b} - 1 \lesseqgtr a^{(b'-b)} - 1$$

ed il secondo membro si potrà impicciolire a piacere (art. 602) prendendo, come è lecito, sufficientemente piccola la differenza $b' - b$. Quanto alle differenze $(a')^{b'} - \alpha^{b'}$, si osservi che, prendendo a' sufficientemente vicino ad α, si può sempre ottenere (art. 598) che anche $(a')^{b'}$ si avvicini indefinitamente ad $\alpha^{b'}$; ed analogamente per la terza differenza.

(*) Se $\alpha < 1$, è invece $\frac{1}{\alpha} > 1$. Pertanto il caso di $\alpha < 1$ si ricondurrà al precedente scrivendo:

$$\alpha^\beta = \frac{1}{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^\beta} = \frac{1}{\left(\frac{1}{A'}\,,\frac{1}{A}\right)^{(B\,,B')}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{(A')^B}\,,\frac{1}{(A)^{B'}}\right)}.$$

Si definirà dunque:

$$(A\,,A')^{(B\,,B')} = \left(A^{B'}\,,(A')^{B}\right).$$

604. Ciò premesso, deve poi dimostrarsi.

1°) che se $(B , B') = (C , C')$, è anche:

$$\left(A^B , (A')^{B'}\right) = \left(A^C , (A')^{C'}\right).$$

Invero indicando con A, A', B, B', C, C' numeri tolti dalle corrispondenti classi, si ha per supposto (cfr. art. 563):

$$A \lesseqgtr A' , B \lesseqgtr C' , C \lesseqgtr B'$$

d' onde segue appunto:

$$A^B \lesseqgtr (A')^B \lesseqgtr (A')^{C'} , A^C \lesseqgtr (A')^C \lesseqgtr (A')^{B'} .$$

2°) che se $(A , A') = (E , E')$, è anche

$$\left(A^B , (A')^{B'}\right) = \left(E^B , (E')^{B'}\right).$$

Ed infatti si hanno per supposto le disuguaglianze:

$$B \lesseqgtr B' , A' > 1 , E' > 1 , A \lesseqgtr E' , E \lesseqgtr A'$$

dalle quali segue immediatamente:

$$A^B \lesseqgtr (E')^B \lesseqgtr (E')^{B'} , E^B \lesseqgtr (A')^B \lesseqgtr (A')^{B'} .$$

605. In particolare, se l' esponente $\beta \equiv (B , B')$ è razionale, si potrà scrivere $(B , B') = (\beta , \beta)$; e si avrà per l' art. prec.:

$$\left(A^B , (A')^{B'}\right) = \left(A^\beta , (A')^\beta\right).$$

Ora il numero $(A^\beta , (A')^\beta)$ non è altro che l'*ordinaria potenza, ad esponente razionale,* α^β, poichè dalle disuguaglianze $A \lesseqgtr \alpha \lesseqgtr A'$ segue:

$$A^\beta \lesseqgtr \alpha^\beta \lesseqgtr (A')^\beta.$$

606. Finalmente è facile verificare la validità della regola generale espressa dalla formola:

$$(A , A')^{(B , B')} \cdot (A , A')^{(C, C')} = (A , A')^{(B , B')+(C , C')} . \qquad (5)$$

Si ha infatti per le regole già stabilite:

$$(A , A')^{(B , B')} \cdot (A , A')^{(C , C')} = \left(A^B , (A')^{B'}\right) . \left(A^C , (A')^{C'}\right)$$

$$= \left(A^B A^C , (A')^{B'} (A)^{C'}\right) = \left(A^{B+C} , (A')^{B'+C'}\right)$$

$$= (A , A')^{(B+C , B'+C')} = (A , A')^{(B , B')+(C , C')} .$$

607. Dalla definizione di h^α data all' art. 603 segue subito che i teoremi degli articoli 583 e 584 sussistono anche per un esponente α irrazionale.

Siano infatti $h = (H, H')$ ed $a = (A, A')$ e supponiamo, per fissare le idee, $h > 1$ ed $a > 0$. Poichè $(H, H') > 1$, esisterà (art. 564) nella classe H almeno un numero h_i maggiore di 1, onde (art. 583) sarà anche $h_i^A > 1$. Il numero $\left(H^A, (H')^{A'}\right)$ è dunque (art. 564) maggiore di $(1, 1)$, poichè esiste nella classe H^A almeno un numero maggiore di 1.

608. Corollario 1.° — *Se di due numeri reali positivi* h *e* k *sia* h *maggiore di* k, *sarà* h^a *maggiore di* k^a *qualunque sia l'esponente* a, *purchè maggiore di zero.*

Essendo infatti per supposto $\frac{h}{k} > 1$, ne segue per l'art. prec. che $\frac{h^a}{k^a} > 1$; cioè appunto che $h^a > k^a$.

609. Corollario 2.° — *Se l'esponente reale* x *varia crescendo continuamente dall'infinito negativo all'infinito positivo, l'esponenziale* h^x *varia dallo zero all'infinito positivo crescendo pure continuamente, se* $h > 1$. *Varia invece da* $+\infty$ *a* 0 *decrescendo continuamente, se* $h < 1$.

Sia infatti, per fissare le idee, $h > 1$; e supponiamo che all'esponente x si dia un accrescimento positivo y. Si avrà allora $h^{x+y} = h^x \cdot h^y$. Ma, per quanto si è già dimostrato all'art. 607, è $h^y > 1$. Si ha dunque evidentemente $h^{x+y} > h^x$.

610. *Dati due numeri reali e positivi* a *e* b, *il primo dei quali diverso da zero e da* 1, *esiste sempre un valore reale di* x *soddisfacente all'equazione esponenziale:*

$$a^x = b. \tag{6}$$

Questo valore di x *è unico e si chiamerà il logaritmo, in base* a, *del numero* b; *scrivendosi:*

$$x = \log_a b. \tag{6)'$$

Supposto, per fissare le idee, $a > 1$, sia L la classe formata dai numeri razionali l pei quali si ha $a^l < b$, ed L' quella formata dai rimanenti l'. Per l'art. 609, è chiara l'esistenza del numero (L, L'), che diciamo essere appunto un valore di x soddisfacente alla (6).

Se $a = (A, A')$, si ha infatti:

$$(A, A')^{(L, L')} = \left(A^L, (A')^{L'}\right)$$

e per dimostrare che questo numero coincide con b, basterà far vedere che b è $\gtreqless$ di tutti i numeri della classe A^L ed $\lesseqgtr$ di tutti quelli di $(A')^{L'}$. Ora si ha appunto, indicando con A, A', L, L', numeri qualunque scelti dalle classi omonime:

$$b > a^L \gtreqless A^L, \quad b < a^{L'} \lesseqgtr (A')^{L'}.$$

L'unicità del valore di x soddisfacente alla (6) risulta poi evidentemente dall' art. 609.

611. Le proprietà fondamentali dei logaritmi si deducono senza difficoltà dalla stessa equazione esponenziale (6), che ha servito a definirli. Esse si riassumono nelle formole seguenti:

$$\log(ab) = \log a + \log b\,,\ \log\frac{a}{b} = \log a - \log b\,,\ \log a^b = b\log a$$

$$\log_a b \cdot \log_b a = 1\,,\ \log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = 1,\ \text{ecc.}$$

612. *Se* a_n *e* b_n *tendono rispettivamente ai limiti finiti* A (*positivo e diverso da zero*) *e* B *col crescere indefinitamente dell' indice* n, *la potenza* $a_n^{b_n}$ *tenderà al limite* A^B.

Poichè per supposto: $\lim a_n = A$ e $\lim b_n = B$, se poniamo:

$$\frac{a_n}{A} = \alpha_n\ ,\ b_n - B = \beta_n$$

si avrà (§ 6.°):

$$\lim \alpha_n = 1\ ,\ \lim \beta_n = 0.$$

Intanto, per le posizioni fatte, si ha:

$$a_n = A \cdot \alpha_n\ ,\ b_n = B + \beta_n\,,$$

onde si può scrivere:

$$a_n^{b_n} = (A \cdot \alpha_n)^{B+\beta_n} = A^B \cdot A^{\beta_n} \cdot \alpha_n^{B+\beta_n} \tag{7}$$

dove l' ultimo membro è il prodotto di tre fattori ciascuno dei quali tende, come ora vedremo, ad un limite finito, cosicchè per il teorema del prodotto dei limiti (§ 6.°) il limite di $a_n^{b_n}$ altro non sarà che il prodotto di questi tre limiti.

Invero il primo fattore A^B non dipendendo da n conserva sempre il suo valore, cioè ha per limite se stesso.

Il secondo fattore A^{β_n}, poichè la base A resta fissa e l' esponente β_n tende al limite zero, tenderà come già sappiamo (articolo 602) al limite 1.

Quanto al terzo fattore $\alpha_n^{B+\beta_n}$, cominciamo dal notare che, essendo $\lim \beta_n = 0$, esisteranno evidentemente due numeri *interi* fissi k e h che comprendono la somma $B + \beta_n$ per tutti i valori abbastanza grandi dell'indice n. Ma se:

$$h < B + \beta_n < k\,,$$

si ha anche (art. 609):

$$\alpha_n^h < \alpha^{B+\beta_n} < \alpha_n^k,\ \text{oppure}\ \alpha_n^h > \alpha^{B+\beta_n} > \alpha_n^k.$$

Poichè ora $\lim \alpha_n = 1$, si ha, pel teorema sul prodotto dei limiti:

$$\lim \alpha_n^h = \lim \alpha_n \cdot \lim \alpha_n \ldots = (\lim \alpha_n)^h = 1^h = 1$$

e similmente:

$$\lim \alpha_n^k = 1.$$

Dunque il fattore $\alpha_n^{B+\beta_n}$ si trova sempre compreso fra due quantità che tendono allo stesso limite 1, e perciò il suo limite sarà del pari l'unità (art. 589).

Dalle (7) si conclude pertanto:

$$\lim a_n^{b_n} = A^B \times 1 \times 1 = A^B$$

come dovevasi dimostrare.

Notiamo espressamente che il teorema può cadere in difetto quando fosse $A = 0$, o quando l'uno o l'altro dei limiti A e B fosse infinito. Così per es. il limite di $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ per $n = \infty$ non è già dato da 1^∞, ovvero sia da 1, come parrebbe a prima vista, ma da tutt'altro numero, come vedremo in seguito.

È facile di riconoscere che il teorema seguita a sussistere anche quando $A = 0$ e B è finito e diverso da zero.

613. *Il logaritmo del limite di un numero è uguale al limite del logaritmo del numero.*

La base dei logaritmi, che si suppone restare invariabile, sia, per fissare le idee, un numero maggiore di 1, che indicheremo con A.

Se $\lim a_n = a$, si avrà per tutti i valori abbastanza grandi di n, comunque sia stato fissato il valore piccolissimo di ε:

$$|a - a_n| < a(1 - A^{-\varepsilon})$$

d'onde:

$$\left|1 - \frac{a_n}{a}\right| < 1 - A^{-\varepsilon} \tag{α}$$

e a maggiore ragione:

$$\left|1 - \frac{a_n}{a}\right| < A^{\varepsilon} - 1. \tag{β}$$

Ora dalle (α) e (β) segue evidentemente:

$$A^{-\varepsilon} < \frac{a_n}{a} < A^{\varepsilon}$$

o, che è la stessa cosa:

$$A^{-\varepsilon} < A^{\log a_n - \log a} < A^{\varepsilon}$$

d'onde (art. 609):

$$-\varepsilon < \log a_n - \log a < \varepsilon.$$

Si ha dunque, per tutti i valori abbastanza grandi di n, $|\log a_n - \log a| < \varepsilon$, cioè appunto $\lim(\log a_n) = \log a$, c. d. d.

Note ed Esercizi.

1. *Se* $a_1, a_2, a_3, \ldots$ *è una successione infinita di numeri positivi, tali che il rapporto* $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ *tenda ad un limite minore di* 1, *col crescere di* n *all'infinito, sarà* $\lim_{n=\infty} a_n = 0$. (Cfr. § 9.°).

2. Applicare il teorema precedente a dimostrare che:

$$\lim_{n=\infty} \frac{b^n}{\underline{|n}} = 0.$$

3. Essendo $h > 1$, si applichi la disuguaglianza:

$$h^n > (h-1)^2 \cdot n^2 + (h-1)(3-h) \cdot n + 2$$

a trovare un valore di n, più conveniente di quello dato all'art. 599, che soddisfi alla condizione $h^n > K$.

4. Calcolare $\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{A + \frac{1}{n}}$ e $\lim_{n=\infty} \sqrt[n+k]{A^n}$.

5. Dimostrare che $\lim_{n=\infty} \frac{\log n}{n} = 0$. Si faccia $n = m^2$.

6. Si è dimostrato all'art. 613 che: *se* $\lim a_n = \alpha$, *è anche* $\lim \log a_n = \log \alpha$. È vera anche la proposizione reciproca: cioè: *se* $\lim \log a_n = \log \alpha$, *sarà* $a_n = \alpha$. Si ha infatti, in quest'ultimo supposto (art. 612), detta A la base dei logaritmi:

$$\lim\left(A^{\log a_n}\right) = A^{\lim \log a_n} = A^{\log \alpha} = \alpha.$$

7. Applicare questo principio al calcolo di $\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{n}$. Tenendo presente la nota 5ª si troverà per limite l'unità. Si dimostri, più generalmente, che $\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{n+k} = 1$.

8. *Se* $\lim a_n = \alpha$, *è anche* $\lim \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n} = \alpha$.
Questo teorema si riconduce immediatamente, mediante il principio ora menzionato, a quello già dimostrato, al § 5°. (Nota 8ª).

9. Cambiando nella formola della nota precedente a_n in $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ se ne deduca che: *se il rapporto* $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ *tende, per* $n = \infty$, *ad un limite finito e determinato, anche* $\sqrt[n]{a_n}$ *tende allo stesso limite.*

10. Se $\lim a_n = \alpha$ e $\lim b_n = \beta$, sotto quali condizioni si ha:

$$\lim \log_{a_n} b_n = \log_a b\ ?$$

§ 8.º — Serie a termini reali.

614. Fondandosi sul concetto di limite si può dare un significato a certe espressioni che implicano un numero infinito di operazioni. Le più semplici ed importanti espressioni di questo genere sono le così dette *serie*. Data una successione infinita di numeri:

$$a_1 , a_2 , a_3 , \dots ,$$

si chiama *serie* l'algoritmo:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots \qquad (1)$$

che si ottiene congiungendo questi numeri col segno di somma.

A primo aspetto sembra impossibile che l'algoritmo (1) possa esprimere un numero, non potendosi concepire la somma di un numero infinito di termini; ma soltanto si può concepire il significato delle somme parziali:

$$a_1 + a_2 \ , \ a_1 + a_2 + a_3 \ , \ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 , \dots ,$$

cioè in generale della somma:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n \qquad (2)$$

che si ottiene considerando soltanto i primi n termini dell'algoritmo (1).

Intanto però queste somme parziali:

$$S_1 , S_2 , S_3 , S_4 , \dots , S_n , \dots \qquad (3)$$

formano una successione infinita (§ 5.º) di numeri, che, in molti casi, potrà avere un limite finito.

Supposto ora che questo limite finito esista e sia A, cioè che si abbia:

$$\lim_{n=\infty} S_n = A \dots , \qquad (4)$$

si dice che la serie infinita (1) ammette per somma A e si scrive:

$$A = a_1 + a_2 + a_3 + \dots \qquad (5)$$

In tal caso si dice anche che la serie (1) è *convergente*. Cioè: una serie si dice *convergente* quando la somma dei suoi primi n termini converge ad un limite finito col crescere indefinitamente del numero n.

Se invece la somma dei primi n termini finisce per divenire, in valore assoluto, più grande di qualsiasi quantità assegnabile, col crescere dell'indice n, cioè se:

$$\lim_{n=\infty} S_n = \infty ,$$

si dice che la serie (1) è *divergente,* e si può scrivere:

$$\infty = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots.$$

Finalmente, in tutti gli altri casi, cioè quando la S_n non tende ad alcun limite determinato col crescere di n, si dice che la serie (1) è *indeterminata.*

Per meglio chiarire queste definizioni, consideriamo qualche esempio di ognuna di queste tre specie di serie.

615. Si abbia la serie:

$$1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \ldots \qquad (6)$$

il cui *termine generale* è $a_n = \frac{1}{(n-1)n}$. Si ha:

$$S_n = 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n}$$

il che si può anche scrivere:

$$S_n = 1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right),$$

onde, tralasciando nel secondo membro i termini che si elidono:

$$S_n = 2 - \frac{1}{n}.$$

Di qui segue evidentemente:

$$\lim_{n=\infty} S_n - \lim\left(2 - \frac{1}{n}\right) = 2.$$

La serie (6) è dunque convergente ed ha per somma 2.

Come esempio di serie divergenti si hanno evidentemente le due seguenti:

$$1 + 1 + 1 + 1 + \ldots$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 \ldots$$

e come esempio di serie indeterminata basterà citare la serie:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

nella quale la somma di un numero qualunque di termini oscilla sempre fra il valore $+1$ ed il valore -1, ma non tende ad un unico valore determinato.

616. Se la serie:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

è convergente e sia S la sua somma, si ha:

$$\lim_{n=\infty} S_n = S$$

e quindi anche, che è sostanzialmente la stessa cosa,

$$\lim_{n=\infty} S_{n-1} = S.$$

Sottraendo queste due uguaglianze membro a membro viene:

$$\lim S_n - \lim S_{n-1} = 0$$

od anche pel teorema sulla differenza dei limiti (art. 594):

$$\lim(S_n - S_{n-1}) = 0.$$

Ma

$$S_n - S_{n-1} = (a_1 + a_2 + \ldots a_{n-1} + a_n) - (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}) = a_n$$

onde si conclude che:

$$\lim_{n=\infty} a_n = 0,$$

cioè: *se una serie è convergente, il termine generale* a_n *deve tendere al limite zero col crescere indefinitamente dell'indice* n.

617. La condizione $\lim a_n = 0$, che abbiamo visto essere necessaria per la convergenza della serie $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$, non è però sufficiente. Infatti è agevole il trovare esempi di serie per le quali è soddisfatta questa condizione, e ciò nondimeno sono divergenti o indeterminate.

Si consideri invero ia serie:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots \tag{7}$$

in cui $a_n = \frac{1}{n}$, onde evidentemente $\lim a_n = 0$.

Sappiamo (art. 591) che la somma: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ diviene infinitamente grande, col crescere del numero dei termini. La serie (7) è dunque divergente.

Se consideriamo invece la serie:

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \ldots, \tag{8}$$

vediamo che essa pure soddisfa alla condizione $\lim a_n = 0$. Ma è facile riconoscere che essa non è nè convergente nè divergente, ma bensì indeterminata.

618. Teorema. — *Affinchè una serie sia convergente, è necessario e sufficiente che, data a piacere una quantità piccolissima* ε, *si possa sempre determinare l'indice* n *in modo che la somma di un numero qualunque di termini della serie consecutivi all'* n^{mo} *sia minore di* ε *in valore assoluto.*

Infatti perchè la serie (1):

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

sia convergente, è necessario e sufficiente (art. 614) che la suc-

cessione di numeri (3):

$$S_1 \,,\, S_2 \,,\, S_3 \,,\, S_4 \,,\, \ldots$$

tenda ad un limite finito col crescere indefinitamente dell'indice n. Applichiamo dunque il teorema dimostrato al § 5.° (art. 586) che dà la condizione necessaria e sufficiente affinchè una successione infinita di numeri ammetta un limite finito. Applicando questo teorema vediamo che, data a piacere una quantità piccolissima ε, si deve poter determinare n in modo che le differenze:

$$S_{n+1} - S_n \,,\, S_{n+2} - S_n \,,\, S_{n+3} - S_n \,,\, \ldots$$

siano tutte più piccole di ε. Ma dalla (2) si deduce evidentemente:

$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n &= a_{n+1} \\ S_{n+2} - S_n &= a_{n+1} + a_{n+2} \\ S_{n+3} - S_n &= a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Si dovrà dunque avere *simultaneamente* per lo stesso valore di ε:

$$|a_{n+1}| < \varepsilon \,,\, |a_{n+1} + a_{n+2}| < \varepsilon \,,\, |a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3}| < \varepsilon \,,\, \ldots.$$

Resta così dimostrato il teorema sopra enunciato.

Ponendo per brevità:

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p} = R_{n\,,\,p} \tag{9}$$

cioè indicando con $R_{n\,,\,p}$ la somma dei p termini consecutivi all' n^{mo}, possiamo anche esprimere la condizione necessaria e sufficiente per la convergenza sotto la forma:

$$|R_{n\,,\,p}| < \varepsilon \quad , \quad p = 1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots \tag{10}$$

intendendo che, fissato a piacere ε, si potrà poi fissare opportunamente il valore di n. Quanto al valore di p, esso resta poi sempre arbitrario.

619. Come applicazione di questo criterio generale di convergenza vogliamo dimostrare che:

Se i termini di una serie sono alternativamente positivi e negativi, decrescenti (o almeno non crescenti) in valore assoluto e col termine generale tendente a zero, la serie è convergente.

Sia infatti la serie:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + u_5 \ldots$$

dove le n sono numeri positivi, tali che si abbia:

$$u_1 \geqq u_2 \geqq u_3 \geqq u_4 \ldots \geqq u_{n-1} \geqq u_n \geqq \ldots$$

ed inoltre:

$$\lim_{n=\infty} u_n = 0.$$

Per dimostrare la convergenza di questa serie basterà dimostrare che si può soddisfare alle condizioni (10).

Ora nel nostro caso si ha:

$$(-1)^n \cdot R_{np} = u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} - \ldots \pm u_{n+p}.$$

Aggruppando due a due i termini del secondo membro si può anche scrivere:

$$(-1)^n \cdot R_{np} = (u_{n+1} - u_{n+2}) + (u_{n+3} - u_{n+4}) + \ldots$$

dove le differenze $u_{n+1} - u_{n+2}$, $u_{n+3} - u_{n+4}$, ecc. sono tutte positive, poichè per supposto $u_{n+1} \gtreqless u_{n+2}$, $u_{n+2} \gtreqless u_{n+3}$, ecc. Ciò posto, se p è pari, il secondo membro sarà composto esclusivamente di queste differenze positive; se invece p è dispari, si avrà nel secondo membro, oltre a queste differenze, un ultimo termine isolato u_{n+p} evidentemente positivo. Pertanto, in entrambi i casi il secondo membro, come composto di parti tutte positive, sarà positivo, cioè:

$$(-1)^n \cdot R_{np} > 0.$$

Se scriviamo invece R_{np} sotto la forma:

$$(-1)^n \cdot R_{np} = u_{n+1} - (u_{n+2} - u_{n+3}) - (u_{n+4} - u_{n+5}) + \ldots,$$

vediamo similmente che nel secondo membro, dopo il primo termine positivo u_{n+1}, si hanno soltanto delle parti negative, onde:

$$(-1)^n \cdot R_{np} < u_{n+1}.$$

Riunendo le due diseguaglianze così trovate conchiudiamo dunque che:

$$0 < (-1)^n \cdot R_{np} < u_{n+1}$$

cioè che il valore assoluto di R_{np} è minore di u_{n+1}.

Ciò posto, si immagini data a piacere una quantità positiva piccolissima ε. Poichè per supposto $\lim u_n = 0$, si potrà fissare n abbastanza grande perchè si abbia:

$$u_{n+1} < \varepsilon.$$

Ma, allora, poichè si ha per quanto precede:

$$|R_{np}| < u_{n+1}, \tag{11}$$

si dedurrà *a fortiori*:

$$|R_{np}| < \varepsilon \quad , \quad p = 1, 2, 3, \ldots.$$

La serie proposta a segni alternati è dunque convergente.

Dalla diseguaglianza (11) emerge inoltre che *prendendo come somma della serie infinita la somma dei soli primi* n *termini, si commette un errore non superiore al valore di* u_{n+1}, *poichè* la (11) ci dice che la somma di un numero qualunque di termini consecutivi all' n^{mo} non può superare u_{n+1}.

620. Es. La serie:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots \tag{12}$$

è convergente. Volendo calcolare la sua somma a meno di $\frac{1}{100}$ di unità basterà prendere la somma dei primi 99 termini:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots-\frac{1}{98}+\frac{1}{99}.$$

621. Chiuderemo questo § con un'osservazione che è anche assai importante nella pratica. Se ad una serie si aggiunge o si toglie un numero finito di termini, ciò può soltanto alterare la sua somma, ma non già la sua natura; cioè, se essa era convergente, resterà ancora convergente, se indeterminata o divergente resterà ancora tale. Per persuadersi di ciò basta riflettere che, indicando al solito con S_n la somma dei primi n termini della serie data e con S'_n la somma dei primi n termini della serie modificata, se per esempio dalla serie data si siano soppressi k termini la cui somma sia A, si avrà per n abbastanza grande:

$$S'_n + A = S_{k+n}.$$

Poichè A è un numero costante che non dipende da n, è chiaro che, se la serie data è convergente, cioè se S_{k+n} tende ad un limite finito per $n=\infty$, si dedurrà:

$$\lim S'_n + A = \lim S_{k+n} = \lim S_n$$

onde:

$$\lim S'_n = -A + \lim S_n.$$

Da questa osservazione segue per es. che la serie a segni misti considerata all'art. prec. sarà convergente anche se le condizioni imposte ai termini non siano verificate proprio a cominciare dal primo termine, ma soltanto da un certo termine in poi. Lo stesso dicasi di tutti i criterii di convergenza che daremo nel seguente §.

622. Data la serie convergente:

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots \tag{α}$$

segue in particolare da quanto si è detto all'art. prec. che è convergente anche la serie:

$$R_n = a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots \tag{β}$$

che è ciò che resta della (α) quando si trascuri in essa la somma S_n dei primi n termini. E si avrà:

$$S = S_n + R_n. \tag{γ}$$

Il numero R_n si chiama il *resto* della serie (α) corrispondente alla somma S_n.

Poichè $\lim\limits_{n=\infty} S_n = S$, segue evidentemente dalla (γ) che $\lim\limits_{n=\infty} R_n = 0$.

623. Se sia stato determinato il valore di n in modo che la diseguaglianza:

$$|R_{n,p}| < \varepsilon$$

sia soddisfatta per tutti i valori di p, resterà soddisfatta anche la

diseguaglianza:

$$|R_n| \leqq \varepsilon.$$

Per la definizione di R_n è infatti: $R_n = \lim_{p=\infty} R_{n,p}$.

Note ed Esercizi.

1. Esaminare la serie a termini decrescenti:

$$2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{4} + \frac{6}{5} + \dots$$

$$2 - \frac{3}{2} + \frac{4}{3} - \frac{5}{4} + \frac{6}{5} + \dots$$

2. Dimostrare la convergenza della serie:

$$1 - \frac{|2}{2^2} + \frac{|3}{3^3} - \frac{|4}{4^4} + \dots.$$

3. Dimostrare la divergenza della serie:

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \frac{1}{10} - \dots.$$

4. Dimostrare l'indeterminazione della serie:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \dots.$$

5. Teorema di Abel. — *Se la serie* $u_1 + u_2 + u_3 + \dots$ *è convergente, ed* $a_1, a_2, a_3, \dots$ *sono dei numeri positivi decrescenti, o almeno non crescenti, è convergente anche la serie:*

$$a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 + \dots.$$

È questo un caso particolare di un teorema più generale che dimostreremo in seguito (Cap. X., § 3°, Note).

6. Influenza dell'ordine dei termini sulla somma delle serie. — Se in ciascuna delle due serie

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots \quad \text{e} \quad A_1 + A_2 + A_3 + \dots$$

[illegible] una sola volta od un numero finito di volte, e [illegible] stesso numero di volte, [illegible] e Σ differiscono soltanto per [illegible]

[illegible] positivi e $-v_1, -v_2, -v_3, \dots$ [illegible] una serie a termini [illegible] essere indeterminata, possono [illegible]

$$[illegible] \quad v_1 - v_2 + v_3 - \dots$$

[illegible] e Σ [illegible] dei [illegible]

[illegible] la serie [illegible]

(4) con $R_{n,p}$, $R'_{n,p}$, $U_{n,p}$, $V_{n,p}$ le somme dei p termini consecutivi all' n^{mo}. Data a piacere la quantità positiva piccolissima ε, esisterà, per supposto, un valore di n pel quale sia:

$$U_{n,p} < \frac{\varepsilon}{2} \quad , \quad V_{n,p} < \frac{\varepsilon}{2} \quad ; \quad p = 1, 2, 3, \ldots .$$

Allora, se prendiamo N abbastanza grande perchè i termini di (3) e (4) di indice $\gtreqless n$ si presentino tutti così nella somma $S_N = a_1 + a_2 + \ldots + a_N$, come nella somma $S'_N = A_1 + A_2 + \ldots + A_N$, si avrà evidentemente:

$$|R_{N,p}| < \varepsilon \quad , \quad |R'_{N,p}| < \varepsilon \quad ; \quad p = 1, 2, 3, \ldots .$$

Le serie (1) e (2) sono dunque convergenti. Si avrà inoltre:

$$|S_N - S'_N| < \varepsilon ,$$

e non solo pel detto valore di N, ma anche per valori superiori, cosicchè sarà:

$$\lim_{n=\infty} |S_n - S'_n| = 0 ,$$

cioè $\lim S_n = \lim S'_n$, c. d. d.

2° Caso) *Delle serie* (3) *e* (4) *l'una è convergente e l'altra è divergente. Le serie* (1) *e* (2) *sono allora entrambe divergenti, e precisamente la loro somma tenderà all'∞ positivo o negativo secondochè sia divergente la* (3) *ovvero la* (4).

Per convincersi di ciò, basta considerare che, se sia p. es. divergente la (3), si potrà prendere N abbastanza grande perchè i termini positivi di S_N formino una somma grande ad arbitrio, nel mentre che la somma dei termini negativi non potrà mai superare un certo limite.

3° Caso) *Le serie* (3) *e* (4) *sono entrambe divergenti. In questo caso, alterando opportunamente nella* (1) *l'ordine dei termini, si potrà sempre alterare a piacere il valore della sua somma, od anche renderla divergente o indeterminata.*

Volendosi p. es. che la nuova serie (2) riesca convergente ed abbia per somma un certo numero h assegnato a piacere, si comincerà dal prendere dalla serie (3) i termini $u_1, u_2, \ldots, u_\alpha$, arrestandosi appenachè la somma $u_1 + u_2 + \ldots + u_\alpha$ abbia superato h, dopodichè si aggiungeranno i termini $v_1, v_2, \ldots, v_\lambda$ della serie (4) arrestandosi appenachè si abbia:

$$u_1 + u_2 \ldots + u_\alpha + v_1 + v_2 + \ldots + v_\lambda < h.$$

Fatto ciò, si aggiungeranno i nuovi termini $u_{\alpha+1}, u_{\alpha+2}, \ldots$ della serie (3) finchè si abbia nuovamente:

$$u_1 + \ldots + u_\alpha + v_1 + \ldots + v_\lambda + u_{\alpha+1} + \ldots + u_\beta > h$$

e poi nuovi termini $v_{\lambda+1}, v_{\lambda+2}, \ldots$ della (4) finchè si abbia:

$$u_1 + \ldots + u_\alpha + v_1 + \ldots + v_\lambda + u_{\alpha+1} + \ldots + u_\beta + v_{\lambda+1} + \ldots + v_\mu < h$$

e così di seguito. Riflettendo su questo procedimento, il lettore si convincerà subito che la serie:

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_\alpha + v_1 + \ldots + v_\lambda + u_{\alpha+1} + \ldots + u_\beta + v_{\lambda+1} + \ldots + v_\mu + u_{\beta+1} + \ldots$$

costruita con questa legge è convergente ed ha precisamente per somma il numero h.

Lasciamo poi per esercizio al lettore di trovare i procedimenti, di indole affatto analoga, mediante i quali si potrà ottenere che la serie (2) riesca indeterminata ovvero divergente (verso $+\infty$ o verso $-\infty$).

7. Dalla sintesi dei tre casi ora svolti segue immediatamente che ***affinchè una serie a termini reali sia convergente indipendentemente dall'ordine dei termini, è necessario e sufficiente che la serie dei valori assoluti dei suoi termini sia convergente.***

§ 9.° — Serie a termini reali e positivi.

624. *Una serie a termini tutti positivi, o almeno tutti positivi a partire da un certo termine in poi* (art. 621), *non può mai essere indeterminata.* Sia infatti S_n la somma dei primi n termini. Poichè i termini sono, come è lecito ritenere, tutti positivi, le S_n saranno tutte positive e si avrà:

$$S_1 < S_2 < S_3 \ldots < S_{n-1} < S_n < \ldots .$$

Quindi se la S_n non diviene infinitamente grande col crescere di n, cioè se la serie non è divergente, la successione $S_1, S_2, S_3, \ldots$ dovrà tendere ad un limite finito, secondo quanto si è già dimostrato al § 3° (art. 588), cioè la serie proposta sarà convergente.

625. *Una serie che abbia i termini rispettivamente non maggiori dei termini corrispondenti di una serie convergente, è anche convergente.*

Avvertiamo una volta per sempre che in questo paragrafo consideriamo soltanto serie a termini positivi.

Sieno infatti le due serie:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots$$

la prima delle quali si sappia essere convergente, e supponiamo che si abbia, per ogni valore di i, $v_i \lesseqgtr u_i$.

Posto allora:

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n = S_n \quad , \quad v_1 + v_2 + \ldots + v_n = S'_n ,$$

si avrà evidentemente:

$$S'_n \lesseqgtr S_n .$$

Poichè ora la prima serie è convergente, cioè la S_n resta finita col crescere di n, *a fortiori* resterà finita la S'_n che è minore di S_n, cioè per quanto si è notato all' art. prec. anche la seconda serie sarà convergente. È poi manifesto che la somma della seconda serie non potrà superare quella della prima.

Una serie che abbia i termini rispettivamente non minori dei termini corrispondenti di una serie divergente, è del pari divergente.

Omettiamo la dimostrazione che è affatto analoga alla precedente.

626. Cerchiamo di applicare questi teoremi a riconoscere la natura della serie:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots \qquad (1)$$

confrontando i suoi termini coi termini della serie:

$$1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots \qquad (3)$$

che già abbiamo dimostrato essere convergente, ed avere per somma il valore 2. I termini n^{mi} delle due serie (1) e (2) sono dati risp. da $\frac{1}{n^2}$ e da $\frac{1}{(n-1)n}$.

Poichè ora:

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n \cdot n} < \frac{1}{(n-1)n},$$

segue dal teorema dell'art. prec. che la serie (1) è anche convergente; e si avrà certamente:

$$\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots\right) < 2.$$

627. *Una serie convergente a termini positivi resta convergente ancorchè si moltiplichino i suoi termini per numeri arbitrari, positivi o negativi, inferiori in valore assoluto ad un certo numero fisso.*

Sia infatti:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots \qquad (a)$$

una serie convergente a termini positivi, e si deduca da essa la nuova serie:

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 + \ldots \qquad (b)$$

moltiplicandone i termini pei coefficienti $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ che supporremo tutti inferiori in valore assoluto ad un certo numero A.

Indicando con R_{np} la somma dei p termini consecutivi all'n^{mo} per la serie (a) e con R'_{np} la stessa somma per la serie (b), si ha evidentemente:

$$|R'_{np}| = |\alpha_{n+1} \cdot a_{n+1} + \alpha_{n+2} \cdot a_{n+2} + \ldots + \alpha_{n+p} \cdot a_{n+p}|$$
$$\lesseqgtr A \cdot a_{n+1} + A \cdot a_{n+2} + \ldots + A \cdot a_{n+p}$$
$$\lesseqgtr A|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}|,$$

cioè:

$$|R'_{n,p}| \lesseqgtr A \cdot |R_{n,p}|.$$

Ma, essendo la (a) convergente, la $|R_{n,p}|$ può rendersi minore di $\frac{\varepsilon}{A}$, per n abbastanza grande e per qualunque valore di p. Allora si avrà:

$$A \cdot |R_{n,p}| < \varepsilon$$

e quindi *a fortiori*, in virtù della diseguaglianza precedente, si avrà:

$$|R'_{n,p}| < \varepsilon$$

il che dimostra appunto la convergenza della nuova serie (b).

Corollario. — *Una serie convergente a termini positivi resta convergente anche se si prendano negativamente quanti termini si vogliano.*

Poichè ciò equivale infatti a moltiplicare quei termini pel numero finito (-1).

628. Volendo determinare la natura di una serie, è specialmente importante di paragonarla colla serie, i cui termini crescono in progressione geometrica:

$$1 + h + h^2 + h^3 + \dots + h^n + h^{n+1} + \dots . \tag{3}$$

Cominciamo dunque dal vedere per quali valori di h questa serie sia convergente e per quali divergente. È facile di verificare che:

$$(1 + h + h^2 + \dots + h^{n-1})(1 - h) = 1 - h^n$$

onde:

$$S_n = 1 + h + h^2 + \dots + h^{n-1} = \frac{1 - h^n}{1 - h}$$

il che si può anche scrivere:

$$S_n = \frac{1}{1-h} - \frac{h^n}{1-h}. \tag{4}$$

Ciò posto, se $h < 1$, la potenza h^n tenderà a zero col crescere di n (art. 599), onde anche il quoziente $\frac{h^n}{1-h}$ tenderà a zero e dalla (4) si dedurrà:

$$\lim_{n=\infty} S_n = \frac{1}{1-h}.$$

La serie (3) sarà dunque convergente ed avrà per somma $\frac{1}{1-h}$.

Se $h = 1$, la serie (3) si riduce ad $1 + 1 + 1 + \dots$ che è evidentemente divergente, ed a maggior ragione sarà divergente per $h > 1$.

Concludiamo dunque che *la serie* (3) *converge soltanto quando* $h < 1$ *ed allora ha per somma* $\frac{1}{1-h}$.

629. Se $h < 1$, affinchè una serie $u_0 + u_1 + u_2 + \dots$ sia convergente, sarà dunque sufficiente che (almeno da un certo punto in poi) i suoi termini sieno minori dei termini corrispondenti della serie $1 + h + h^2 + \dots$, la quale è convergente per l'art. prec. Cioè basterà che si abbia $u_n \leqq h^n$ o, che è lo stesso, $\sqrt[n]{u_n} \leqq h$. Pertanto: *se una serie gode della proprietà che le radici dei suoi termini, d'indice uguale all'indice del termine, non superino un certo numero fisso* h *minore di* 1, *essa sarà certamente convergente.*

Nelle applicazioni riesce però più comodo di stabilire il paragone fra una data serie ed una serie in progressione geometrica

sotto una forma alquanto diversa che conduce ai criterii degli articoli seguenti.

630. Teorema. — *Se per una data serie si verifichi che il rapporto di un termine al precedente, almeno a partire da un termine di posto abbastanza avanzato, sia sempre minore (od uguale) a una quantità fissa* h *minore dell'unità, la serie data sarà certamente convergente.*

Sia infatti $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots$ la serie data e supponiamo che, almeno da un certo valore di n in poi, si abbia sempre:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqq h < 1 \tag{5}$$

dove h è un numero positivo fisso minore di 1.

Poichè si può scrivere identicamente:

$$\frac{u_{n+t}}{u_n} = \frac{u_{n+1}}{u_n} \cdot \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} \cdot \frac{u_{n+3}}{u_{n+2}} \cdots \frac{u_{n+t}}{u_{n+t-1}}$$

dove nel secondo membro non figurano che rapporti di termini consecutivi, i quali per supposto sono tutti minori di h, si avrà:

$$\frac{u_{n+t}}{u_n} < h^t \tag{6}$$

onde:

$$u_{n+t} < u_n h^t. \tag{7}$$

Da questa diseguaglianza segue primieramente che:

$$\lim_{m=\infty} u_m = 0\ , \tag{8}$$

poichè col crescere di t all'infinito si ha (art. 599) che la potenza h^t tende al limite zero.

Inoltre, indicando al solito con R_{np} la somma dei p termini della serie data consecutivi all' n^{mo}, si potrà scrivere per la (7):

$$R_{np} = u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+p-1} < u_n + u_n h + u_n h^2 + \ldots u_n h^{p-1}$$

ed anche raccogliendo il fattore comune u_n:

$$R_{np} < u_n(1 + h + h^2 + \ldots + h^{p-1})$$

ed a maggior ragione:

$$R_{np} < u_n(1 + h + h^2 + \ldots + h^{p-1} + h^p + \ldots)\ ,$$

cioè, essendo $h < 1$, (art. 628):

$$R_{np} < \frac{u_n}{1 - h}. \tag{8}$$

Poichè ora $\lim u_n = 0$, data una quantità positiva ε piccola a piacere, si potrà sempre prendere n abbastanza grande perchè si

abbia $\frac{u_n}{1-h} < \varepsilon$, onde a maggior ragione si avrà per la (9):

$$R_{n,p} < \varepsilon \quad , \quad p = 1, 2, 3, \ldots.$$

È dunque soddisfatta la condizione necessaria e sufficiente per la convergenza di una serie (art. 618).

La serie proposta è dunque convergente; e dalla formola (9) si vede inoltre che l'*errore che si commette prendendo come somma della serie la somma dei soli primi* n *termini è inferiore ad* $\frac{u_n}{1-h}$.

631. Nella maggior parte dei casi, anzichè potersi determinare una quantità h minore di 1 la quale sia sempre maggiore dei rapporti $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, riesce per lo più agevole di riconoscere che questo rapporto, col crescere indefinitamente di n, tende ad un certo limite finito. Si ha allora il seguente teorema: *Se per una serie* $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$, *il rapporto* $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, *col crescere indefinitamente dell'indice* n, *tende ad un limite minore dell'unità, la serie è convergente.*

Questo teorema si deduce senza difficoltà dal precedente.

Supponiamo infatti che si abbia:

$$\lim_{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \alpha$$

dove α è un numero positivo minore dell' unità.

Si indichi allora con h un numero compreso tra α ed 1, p. e. la media aritmetica fra 1 ed α.

Poichè $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tende al limite α, ciò significa che per tutti i valori abbastanza grandi di n, il rapporto $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ differirà da α per meno di quello che ne differisca h. Si avrà dunque per n abbastanza grande:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < h \quad , \quad h < 1$$

e si ricade così nel teorema dell' art. prec.

632. Esempio. — Sia data la serie:

$$1 + \frac{a}{1}x + \frac{a(a+1)}{\underline{|2}}x^2 + \frac{a(a+1)(a+2)}{\underline{|3}}x^3 + \ldots.$$

In questo caso si ha:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\dfrac{a(a+1)\ldots(a+n)}{1\cdot 2\ldots(n+1)}\cdot x^{n+1}}{\dfrac{a(a+1)\ldots(a+n-1)}{\cdot 2\ldots n\ 1}\cdot x^n} = \frac{a+n}{n+1}x$$

onde:

$$\lim_{n=\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=x\cdot\lim_{n=\infty}\frac{a+n}{n+1}=x\lim_{n=\infty}\frac{\frac{a}{n}+1}{1+\frac{1}{n}}=x.$$

Pertanto la serie proposta è convergente, se il numero positivo x sia minore dell'unità.

633. Ritornando alla serie generale $u_0+u_1+u_2+\ldots$, si dimostra poi, in modo affatto analogo a quello tenuto per il teorema dell'art. 630, che: *se il rapporto* $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ *si conserva sempre maggiore di un numero fisso* h *maggiore dell'unità* (e in particolare se $\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$) *la serie è divergente.*

Infatti dalla diseguaglianza $\frac{u_{n+1}}{u_n}>h$ si deduce, come all'art. 630, $u_{n+t}>u_nh^t$, onde:

$$R_{np}>u_n(1+h+h^2+\ldots h^{p+1})$$

dove ora la somma fra parentesi, per essere $h>1$, diventa grande quanto si vuole per p abbastanza grande; quindi, ecc.

634. Notiamo per ultimo che, se $\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$, non può dirsi in generale se la serie sia convergente o divergente. Per persuaderci di ciò considereremo per esempio le serie così dette *armoniche*, cioè le serie del tipo:

$$\frac{1}{1^\alpha}+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\frac{1}{4^\alpha}+\ldots. \tag{10}$$

Quì si ha sempre $\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$, poichè:

$$\lim\frac{\frac{1}{(n+1)^\alpha}}{\frac{1}{n^\alpha}}=\lim\left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha=\lim\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^\alpha=1^\alpha=1.$$

Intanto la serie (10) è divergente (art. 617) per $\alpha=1$; invece è convergente (art. 626) per $\alpha=2$.

E precisamente si può dimostrare (cfr. Nota 9.ª) che la serie (10) è convergente quando $\alpha>1$ ed è divergente quando $\alpha\leqq 1$.

Note ed Esercizi.

1. Dimostrare la divergenza della serie:

$$\frac{1}{2.3}+\frac{2}{3.4}+\frac{3}{4.5}+\frac{4}{5.6}+\ldots.$$

2. Dimostrare la convergenza delle serie:

$$\frac{1}{1.2}+\frac{2}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\ldots$$

$$\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.4.5}+\frac{1}{4.5.6}+\ldots=\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{4.5.6}+\frac{1}{7.8.9}+\frac{1}{10.11.12}+\ldots$$

$$\frac{1}{1.2.3}+\frac{2}{4.5.6}+\frac{3}{7.8.9}+\frac{4}{10.11.12}+\ldots.$$

3. Dimostrare col criterio del rapporto la convergenza della serie:

$$1+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{2^k}{\lfloor 3}+\frac{3^k}{\lfloor 4}+\frac{4^k}{\lfloor 5}+\ldots$$

e la divergenza della serie:

$$1+\frac{x+1}{\lfloor 1}+\frac{(x+2)^2}{\lfloor 2}+\frac{(x+3)^3}{\lfloor 3}+\ldots.$$

4. Trovare la natura della serie:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}+\ldots$$

in cui ogni denominatore è uguale al doppio del precedente diminuito di 1.

5. Se nella serie:

$$\frac{1}{a_0}+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots (a_0=1\ ,\ a_1=2\ ,\ a_2=3\ ,\ a_3=5\ \ldots)$$

ogni denominatore è uguale alla somma dei due denominatori precedenti, dimostrare che si ha la relazione:

$$a^2_{n+1}-a_n a_{n+1}-a^2_n=(-1)^n$$

e dedurne che:

$$\lim_{n=\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\sqrt{5}.$$

6. Studiare la serie:

$$\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{6}+\frac{x^5}{12}+\ldots$$

in cui ogni denominatore è uguale alla somma di tutti i precedenti.

7. Teorema di Kummer. — *Data una serie a termini positivi* $u_1+u_2+u_3+\dots$ *ed una successione di numeri positivi* $a_1, a_2, a_3, \dots,$ *se la quantità*:

$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1}$$

è superiore ad un numero positivo k *per tutti i valori abbastanza grandi di* n, *la serie* $u_1 + u_2 + \dots$ *è convergente.*

Invero dalla diseguaglianza:

$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} > k \text{ ossia: } a_n u_n - a_{n+1} u_{n+1} > k u_{n+1} \qquad (1)$$

segue evidentemente: $a_n u_n > a_{n+1} u_{n+1}$. La quantità $a_n u_n$ decresce dunque col crescere di n, epperò tenderà (art. 588) ad un certo limite finito.

Pertanto sarà convergente la serie:

$$(a_1 u_1 - a_2 u_2) + (a_2 u_2 - a_3 u_3) + (a_3 u_3 - a_4 u_4) + \dots \qquad (2)$$

che ha per somma dei primi n termini $a_1 u_1 - a_{n+1} u_{n+1}$, e quindi anche la serie:

$$k u_2 + k u_3 + k u_4 + \dots \qquad (3)$$

i cui termini sono tutti inferiori, in virtù della (1), almeno da un certo punto in poi, ai corrispondenti termini della (2). Anche la serie $u_2+u_3+u_4+\dots$ è dunque convergente (art. 627), c. d. d.

Per $a_n = 1$ si ricade nel teorema dell'art. 630.

8. Corollario. — *Se il prodotto* $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right)$ *tende, per* $n = \infty$, *ad un limite maggiore di* 1, *la serie a termini positivi* $u_1 + u_2 + u_3 + \dots$ *è convergente.*

Basta applicare il teorema di Kummer prendendo $a_n = n$.

9. *La serie* $1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \dots,$ *che è evidentemente divergente* (cfr. art. 617) *per* $\alpha \leqq 1$, *è invece convergente per* $\alpha > 1$.

Si ha infatti in questo caso speciale $\frac{u_n}{u_{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha$, d'onde segue (art. 643):

$$\lim_{n=\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \alpha.$$

§ 10.° — Serie esponenziale. Logaritmi naturali dei numeri reali.

635. In analisi ha molta importanza la serie:

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{\lfloor 2} + \frac{x^3}{\lfloor 3} + \dots \qquad (1)$$

che è convergente qualunque sia il valore finito che si voglia attribuire ad x. Applicando il criterio del rapporto (art. 631) si ha infatti:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{x^n}{\lfloor n}}{\frac{x^{n-1}}{\lfloor n-1}} = \frac{x^n \cdot \lfloor n-1}{x^{n-1} \lfloor n} = \frac{x}{n}$$

d' onde segue evidentemente:

$$\lim_{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n=\infty} \frac{x}{n} = x \lim \frac{1}{n} = 0.$$

636. La serie (1) si chiama *serie esponenziale* per una ragione che apparirà fra poco (art. 640). Facendo in essa $x = 1$, si ha come caso particolare la serie convergente:

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{\underline{|2}} + \frac{1}{\underline{|3}} + \ldots$$

la cui somma si suol designare colla lettera *e*.

Il numero *e* definito dall' uguaglianza:

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{\underline{|2}} + \frac{1}{\underline{|3}} + \ldots \qquad (2)$$

è stato adottato come base dei logaritmi così detti *naturali* o *Neperiani*.

637. È facile di dimostrare che *il numero* e *è irrazionale e compreso fra* 2 *e* 3.

Invero, se il numero *e* fosse razionale, dovrebbe essere della forma $\frac{p}{q}$, p e q essendo due numeri interi e positivi, e si avrebbe:

$$\frac{p}{q} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{\underline{|2}} + \frac{1}{\underline{|3}} + \ldots + \frac{1}{\underline{|q-1}} + \frac{1}{\underline{|q}} + \frac{1}{\underline{|q+1}} + \ldots.$$

Moltiplicando allora primo e secondo membro per $\underline{|q}$ e considerando che $\frac{p}{q} \cdot \underline{|q}$ è un numero intero che indicheremo con I, e che i primi $(q + 1)$ termini del secondo membro moltiplicati per $\underline{|q}$ divengono altrettanti numeri interi, la cui somma indicheremo con I', si deduce:

$$\mathrm{I} = \mathrm{I}' + \frac{\underline{|q}}{\underline{|q+1}} + \frac{\underline{|q}}{\underline{|q+2}} + \frac{\underline{|q}}{\underline{|q+3}} + \ldots$$

cioè:

$$\mathrm{I} = \mathrm{I}' + \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)} + \ldots.$$

Noi scriveremo:

$$\mathrm{I} = \mathrm{I}' + \varepsilon \qquad (3)$$

ponendo:

$$\varepsilon = \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)} + \ldots.$$

Ora è facile riconoscere che il numero ε, il quale è evidentemente positivo e diverso da zero, è minore di 1. Infatti, se ai fat-

tori $q+1$, $q+2$, $q+3, \ldots$ dei denominatori di ogni frazione sostituiamo dappertutto il numero più piccolo 2, diminuendo i denominatori cresceranno i valori delle frazioni stesse, onde possiamo scrivere:

$$\varepsilon < \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 2\cdot 2} + \ldots$$

o anche:

$$\varepsilon < \frac{1}{2}\left\{1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots\right\}$$

dove la serie chiusa fra parentesi è convergente ed ha per somma $\frac{1}{1-\frac{1}{2}}$ (art. 628), poichè i suoi termini formano una progressione geometrica la cui ragione $\left(=\frac{1}{2}\right)$ è più piccola di 1. Abbiamo dunque

$$\varepsilon < \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

cioè appunto $\varepsilon < 1$. Ora ciò è in contraddizione con l' eguaglianza (3), poichè un numero intero I non può evidentemente essere uguale ad un numero intero I' accresciuto del numero ε, che è frazionario perchè minore di 1.

È dunque assurdo il supporre che il numero e sia razionale. Passiamo a far vedere che esso è compreso fra 2 e 3. Che esso sia maggiore di 2 risulta evidente dalla (2), poichè i soli due primi termini della serie che ha per somma e, danno già una somma eguale a 2. Che poi esso sia minore di 3 si vede sostituendo ai fattori dei denominatori nel secondo membro di (2) il numero 2, poichè allora si avrà:

$$e < 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 2\cdot 2} + \ldots\right).$$

Ma, come sopra, ia somma della progressione fra parentesi è $\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$; si ha dunque appunto:

$$e < 1 + 2, \quad \text{cioè:} \quad e < 3.$$

638. Indichiamo con:

$$S_n = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{\underline{|2}} + \frac{x^3}{\underline{|3}} + \ldots + \frac{x^n}{\underline{|n}} \qquad (4)$$

la somma dei primi $n+1$ termini della serie (1) e paragoniamo questa somma collo sviluppo della potenza n^{ma} del binomio $1 + \frac{x}{n}$.

Per il teorema del binomio (Cap. III, § 2°) si ha:

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1}\left(\frac{x}{n}\right) + \frac{n(n-1)}{1.2}\left(\frac{x}{n}\right)^2 + \dots$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\dots 2.1}{1.2.3\dots n}\left(\frac{x}{n}\right)^n$$

e anche:

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1 + \frac{x}{1} + \frac{n(n-1)}{n^2}\cdot\frac{x^2}{\lfloor 2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{n^3}\cdot\frac{x^3}{\lfloor 3} + $$

$$+\dots+ \frac{n(n-1)(n-2)\dots 2.1}{n^n}\cdot\frac{x^n}{\lfloor n}.$$

Ma per un termine qualunque del secondo membro si ha:

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{n^k} = \frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\dots\frac{n-(k-1)}{n}$$

$$= \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

onde possiamo anche scrivere:

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1 + \frac{x}{1} + \left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{x^2}{\lfloor 2} + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\frac{x^3}{\lfloor 3} + \dots$$

$$+ \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\frac{x^n}{\lfloor n}.$$

Sottraendo ora questa uguaglianza membro a membro dalla (4) viene:

$$\begin{aligned} S_n - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n &= \left[1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]\frac{x^2}{\lfloor 2} \\ &+ \left[1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\right]\frac{x^3}{\lfloor 3} \\ &+ \left[1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\right]\frac{x^4}{\lfloor 4} + \dots \\ &+ \left[1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\right]\frac{x^n}{\lfloor n}. \end{aligned} \tag{5}$$

Poichè i fattori $1-\frac{1}{n}$, $1-\frac{2}{n}$, $1-\frac{3}{n}$, ..., $1-\frac{n-1}{n}$ sono tutti minori di 1, il prodotto $\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{h}{n}\right)$, in cui $h<n$, sarà pure minore di 1, onde la differenza:

$$1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{h}{n}\right)$$

è positiva, e se in essa sostituiamo in luogo di ogni fattore il più piccolo, cioè l'ultimo, si avrà:

$$1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{h}{n}\right)<1-\left(1-\frac{h}{n}\right)^{h}, \qquad (6)$$

Ma se nell' identità:

$$1-z^{h}=(1-z)(1+z+z^{2}+\ldots+z^{h-1})$$

sostituiamo in luogo di z il binomio $1-\frac{h}{n}$, si ottiene:

$$1-\left(1-\frac{h}{n}\right)^{h}=\frac{h}{n}\left\{1+\left(1-\frac{h}{n}\right)+\left(1-\frac{h}{n}\right)^{2}+\ldots+\left(1-\frac{h}{n}\right)^{h-1}\right\},$$

onde, poichè i termini contenuti entro la parentesi sono tutti non superiori ad 1:

$$1-\left(1-\frac{h}{n}\right)^{h}<\frac{h}{n}\left\{1+1+1+\ldots+1\right\}<\frac{h^{2}}{n}.$$

Confrontando con la (6) si ha dunque:

$$1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{h}{n}\right)<\frac{h^{2}}{n}.$$

Sostituendo ora queste espressioni nel secondo membro della (5) si trova:

$$S_n-\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n}<\frac{1}{n}\frac{|x|^{2}}{\lfloor 2}+\frac{2^{2}}{n}\frac{|x|^{3}}{\lfloor 3}+\frac{3^{2}}{n}\frac{|x|^{4}}{\lfloor 4}+\ldots+\frac{(n-1)^{2}}{n}\frac{|x|^{n}}{\lfloor n}$$

o anche:

$$S_n-\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n}<\frac{1}{n}\left\{\frac{|x|^{2}}{\lfloor 2}+\frac{2^{2}|x|^{3}}{\lfloor 3}+\frac{3^{2}|x|^{4}}{\lfloor 4}+\ldots+\frac{(n-1)|x|^{n}}{\lfloor n}\right\} \qquad (7)$$

Ora la quantità fra parentesi non è che una parte della serie infinita:

$$\frac{|x|^{2}}{\lfloor 2}+\frac{2^{2}|x|^{3}}{\lfloor 3}+\frac{3^{2}|x|^{4}}{\lfloor 4}+\ldots$$

la quale è convergente, poichè il rapporto di un termine al precedente ha per limite lo zero, come è facile verificare. Se indichiamo dunque con T la sua somma, si avrà dalla (7) a maggior ragione:

$$S_n-\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n}<\frac{1}{n}\cdot T. \qquad (8)$$

Di quì si deduce, poichè il secondo membro ha evidentemente per limite lo zero quando n tende all' infinito:

$$\lim_{n=\infty}\left\{S_n-\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n}\right\}=0.$$

Ma per $n = \infty$ la S_n tende ad un limite finito, cioè alla somma della serie convergente (1). Si conchiude quindi:

$$\lim_{n=\infty} S_n = \lim_{n=\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n,$$

cioè:

$$\lim_{n=\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{\lfloor 2} + \frac{x^3}{\lfloor 3} + \dots \tag{9}$$

e facendo, in particolare, $x = 1$:

$$\lim_{n=\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{\lfloor 2} + \frac{1}{\lfloor 3} + \dots,$$

cioè:

$$\lim_{n=\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e. \tag{10}$$

639. È importante di dimostrare che *la formola* (10) *seguita a sussistere, quand'anche al numero* n *non si faccia percorrere la successione dei numeri interi positivi, ma una successione qualsivoglia di numeri positivi o negativi tendenti all'infinito.*

Supponiamo dapprima che n si conservi sempre positivo. Per ogni valore di n esistono due interi positivi m ed $m+1$ che lo comprendono, e si ha evidentemente:

$$\left(1 + \frac{1}{m+1}\right)^m < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m+1}.$$

Ma, per n infinitamente grande, anche m diviene infinitamente grande e si ha:

$$\lim\left(1 + \frac{1}{m+1}\right)^m = \lim \frac{\left(1 + \dfrac{1}{m+1}\right)^{m+1}}{\left(1 + \dfrac{1}{m+1}\right)} = \frac{e}{1}$$

e

$$\lim\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m+1} = \lim\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \cdot \lim\left(1 + \frac{1}{m}\right) = e \cdot 1.$$

La potenza $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ è dunque compresa fra due numeri che tendono allo stesso limite e per $n = \infty$; onde anch'essa tenderà (art. 589) a questo stesso limite.

Finalmente il caso di n negativo si riconduce subito a quello di n positivo osservando che si ha identicamente:

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n-1}\right),$$

onde:

$$\lim_{n=\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} = \lim_{n=\infty}\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \cdot \lim\left(1 + \frac{1}{n-1}\right) = e.$$

640. Comunque sia fissato il valore di x, il rapporto $\frac{n}{x}$ diviene infinitamente grande insieme con n. Si può dunque scrivere per l'articolo precedente:

$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{\left(\frac{n}{x}\right)}\right)^{\left(\frac{n}{x}\right)}=e$$

d'onde (art. 612):

$$\lim_{n=\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\left(\frac{x}{n}\right)}\right)^{\left(\frac{n}{x}\right)}\right]^{x}=e^{x},$$

cioè:

$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n}=e^{x}. \tag{11}$$

Sostituendo ciò in (9) si giunge così all'importante uguaglianza:

$$e^{x}=1+\frac{x}{1}+\frac{x^{2}}{\lfloor 2}+\frac{x^{3}}{\lfloor 3}+\dots \tag{12}$$

che giustifica la denominazione di serie esponenziale data ad (1).

641. Per il teorema dell'art. 639 si può anche scrivere, in luogo della (10), comunque si faccia tendere a zero la quantità positiva ε:

$$\lim_{\varepsilon=0}\left(1+\frac{1}{\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}=e, \quad \text{ossia:} \quad \lim_{\varepsilon=0}(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}=e \tag{13}$$

d'onde si deduce anche (art. 613) prendendo dei due membri il logaritmo secondo la base e:

$$\lim_{\varepsilon=0}\frac{\log_{e}(1+\varepsilon)}{\varepsilon}=1.$$

642. Se nella (14) si introduce, in luogo della variabile infinitesima ε, la variabile infinitesima θ legata ad ε dalla relazione:

$$\log_{a}(1+\varepsilon)=\theta \quad \text{ossia:} \quad \varepsilon=a^{\theta}-1,$$

essa prende la forma:

$$\lim_{\varepsilon=0}\frac{\log_{e}a\cdot\log_{a}(1+\varepsilon)}{\varepsilon}=\log_{e}a\cdot\lim_{\theta=0}\frac{\theta}{a^{\theta}-1}=1$$

d' onde la formola notevole:

$$\log_e a = \lim_{\theta=0} \frac{a^\theta - 1}{\theta}. \tag{15}$$

643. Se invece si fa nella (14) la sostituzione:

$$\varepsilon = (1+x)^\mu - 1 \quad \text{da cui:} \quad \log_e(1+\varepsilon) = \mu \log_e(1+x)$$

essendo μ un esponente reale qualunque ed x una variabile che tende a zero, si ottiene:

$$\mu = \lim_{x=0} \frac{(1+x)^\mu - 1}{\log_e(1+x)} = \lim_{x=0} \left\{ \frac{(1+x)^\mu - 1}{x} \frac{x}{\log_e(1+x)} \right\}$$

cioè per la (14):

$$\lim_{x=0} \frac{(1+x)^\mu - 1}{x} = \mu.$$

Note ed Esercizi.

1. Dimostrare che:

$$\frac{1}{e} = \lim_{n=\infty} \frac{\sqrt[n]{\lfloor n}}{n}.$$

Si osservi a tale oggetto che, ponendo: $a_n = \frac{\lfloor n}{n^n}$, si ha $\frac{1}{e} = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$, e si applichi quindi il teorema citato alla Nota 9ª del § 7°.

2. Per tutti i valori di x il cui valore assoluto è inferiore ad 1, si ha, come vedremo in seguito, lo sviluppo in serie convergente:

$$\log_e(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots.$$

Sottraendo da questa formola quella che se ne deduce cambiando x in $-x$ viene:

$$\log_e \frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots\right).$$

Se m ed n sono due numeri positivi e sia $m < n$, potremo porre in questa formola (che è valida per $|x| < 1$, come si è detto) $x = \frac{m}{n}$, con che essa ci dà:

$$\log_e(n+m) = \log_e(n-m) + 2\left\{\frac{m}{n} + \frac{m^3}{3n^3} + \frac{m^5}{5n^5} + \dots\right\}.$$

3. Quest'ultima formola si presta assai bene al calcolo pratico dei logaritmi naturali dei numeri interi. Infatti, se si pone $m=1$ ed $n=2N+1$, si ha in particolare:

$$\log_e(N+1) = \log_e N + 2\left\{\frac{1}{2N+1} + \frac{1}{3(2N+1)^3} + \frac{1}{5(2N+1)^5} + \dots\right\}.$$

Mediante questa formola, *supposto già noto il logaritmo dell' intero* N, *si calcolerà facilmente quello di* N + 1.

4. Dimostrare che:

$$1 < \lim_{k=\infty} \frac{(k+1)^k}{1^k + 2^k + \ldots + k^k} < e.$$

5. Il numero e ha anche molta importanza unitamente al numero π (rapporto della circonferenza al diametro) nel calcolo approssimato di $\underline{|n}$, quando n è un numero assai grande. Tale calcolo è fondato sulla formola

$$\lim_{n=\infty} \frac{n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{2\pi n}}{1.2.3 \ldots n} = 1$$

detta di *Stirling* dal nome del suo scopritore.

Più precisamente, si può dimostrare che:

$$1.2.3 \ldots n = \sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n+\frac{\theta}{12n}}$$

per un conveniente valore di θ compreso fra 0 ed 1. (Cfr. *Cesàro: Corso di Analisi Algebrica*, pag. 271 e 270).

§ 11.° — Frazioni continue.

644. Un altro esempio importante di operazioni infinite si ha nell' algoritmo di frazione continua:

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots}} \tag{1}$$

dove a_0, a_1, a_2, ... è una successione infinita di numeri. Questa espressione è per sè stessa priva di senso. Soltanto avranno un senso le successive parti:

$$a_0, \; a_0 + \frac{1}{a_1}, \; a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}}, \ldots$$

che si chiamano *ridotte* della frazione continua (1).

Noi indicheremo queste ridotte con R_0, R_1, R_2, ...; cosicchè si avrà, esprimendole sotto forma di unica frazione:

$$R_0 = \frac{a_0}{1}, \; R_1 = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1}, \; R_2 = \frac{(a_0 a_1 + 1)a_2 + a_0}{a_1 a_2 + 1}, \ldots \tag{2}$$

645. Osserviamo che la R_2 ha per numeratore il numeratore della R_1 moltiplicato per a_2 più il numeratore di R_0 e per denominatore il denominatore della R_1 moltiplicato del pari per a_2 più il denominatore di R_0. Questa legge di formazione è generale, po-

tendosi mettere tutte le successive ridotte:

$$R_3 = \frac{P_3}{Q_3}\ ,\ R_4 = \frac{P_4}{Q_4}\ ,\ldots \qquad (3)$$

sotto forma di frazioni uniche i cui numeratori e denominatori soddisfano alla stessa legge, cioè: *la ridotta di ordine* n *è una frazione che ha per numeratore il numeratore della ridotta precedente moltiplicato per* a_n *più il numeratore dell'antiprecedente. Similmente il denominatore è uguale al denominatore della precedente moltiplicato per* a_n *più il denominatore dell'antiprecedente.*

Per dimostrare questa legge, che già abbiamo visto verificarsi per le prime tre ridotte, basterà far vedere che, se essa è vera per la ridotta di ordine n, lo sarà del pari per quella di ordine $n+1$. Invero per il supposto si ha:

$$R_n = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots + \cfrac{1}{a_n}}} = \frac{P_n}{Q_n} = \frac{P_{n-1}a_n + P_{n-2}}{Q_{n-1}a_n + Q_{n-2}}$$

Ora la ridotta R_{n+1} si può evidentemente calcolare sostituendo in R_n ad a_n la somma $a_n + \frac{1}{a_{n+1}}$; si ha dunque:

$$R_{n+1} = \frac{P_{n-1}\left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right) + P_{n-2}}{Q_{n-1}\left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right) + Q_{n-2}}$$

$$= \frac{a_{n+1}(P_{n-1}a_n + P_{n-2}) + P_{n-1}}{a_{n+1}(Q_{n-1}a_n + Q_{n-2}) + Q_{n-1}}\ ,$$

cioè appunto:

$$R_{n+1} = \frac{a_{n+1}P_n + P_{n-1}}{a_{n+1}Q_n + Q_{n-1}}$$

come si doveva dimostrare.

646. I numeratori e denominatori di due ridotte consecutive non sono indipendenti fra loro. Essi sono legati dalla relazione generale.

$$P_nQ_{n-1} - P_{n-1}Q_n = (-1)^{n-1}. \qquad (4)$$

Invero, poichè:

$$P_0 = a_0\ ,\ P_1 = a_0a_1 + 1\ ,\ \ldots$$

$$Q_0 = 1\ \ ,\ Q_1 = a_1\ ,\ \ldots\ldots\ldots,$$

la relazione (4) è vera per $n = 1$. Potremo dunque supporre che la (4) sia stata già dimostrata fino al valore n; e basterà dimo-

strare che essa è anche vera per $n+1$. In effetto si ha:

$$\begin{aligned} & P_{n+1}Q_n - P_nQ_{n+1} \\ & = (a_{n+1}P_n + P_{n-1})Q_n - P_n(a_{n+1}Q_n + Q_{n-1}), \\ & = P_{n-1}Q_n - P_nQ_{n-1} = -(P_nQ_{n-1} - P_{n-1}Q_n), \end{aligned}$$

cioè appunto, in virtù della (4):

$$P_{n+1}Q_n - P_nQ_{n-1} = -(-1)^{n-1} = (-1)^n,$$

c. d. d.

647. Se indichiamo con Δ_n la differenza fra la ridotta R_n e la ridotta R_{n-1}, si avrà:

$$\Delta_n = \frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \frac{P_nQ_{n-1} - P_{n-1}Q_n}{Q_nQ_{n-1}}, \tag{5}$$

cioè per la formola (4):

$$\Delta_n = \frac{(-1)^{n-1}}{Q_nQ_{n-1}} \tag{6}$$

ossia: *la differenza fra due ridotte consecutive è uguale all' inversa del prodotto dei denominatori di tali ridotte, col segno + o — secondochè l' indice della ridotta di ordine minore è pari o dispari.*

Poichè evidentemente:

$$\begin{aligned} R_n &= (R_n - R_{n-1}) + (R_{n-1} - R_{n-2}) + (R_{n-2} - R_{n-3}) + \ldots (R_1 - R_0) + R_0 \\ &= \Delta_n + \Delta_{n-1} + \Delta_{n-2} + \ldots + \Delta_1 + R_0, \end{aligned} \tag{7}$$

sostituendo per le Δ le espressioni (6) si ottiene:

$$R_n = a_0 + \frac{1}{Q_0Q_1} - \frac{1}{Q_1Q_2} + \frac{1}{Q_2Q_3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{Q_{n-1}Q_n} \tag{7$'$}$$

formola detta di *Eulero*.

648. Noi supporremo d' ora innanzi che i numeri $a_1, a_2, \ldots$, mediante i quali è composta la frazione continua (1), siano tutti positivi e diversi da zero.

Supporremo che neanche si possano avvicinare indefinitamente a zero col variare dell' indice n. Ciò equivale a supporre che le $a_1, a_2, a_3, \ldots$ siano tutte maggiori di un certo numero fisso ε, che non è zero.

In tale supposizione dalla legge di formazione delle $Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ contenuta nella formola:

$$Q_n = a_nQ_{n-1} + Q_{n-2} \tag{8}$$

segue evidentemente che i numeri $Q_0, Q_1, Q_2, \ldots$ sono tutti positivi e che Q_n è maggiore di Q_{n-2}.

Si ha dunque:

$$Q_0 < Q_2 < Q_4 < Q_6 \dots \tag{9}$$

$$Q_1 < Q_3 < Q_5 < Q_7 \dots . \tag{10}$$

Inoltre è facile riconoscere che in ciascuna di queste due successioni il termine generale Q_n tende a divenire infinitamente grande col crescere di n.

Infatti, sostituendo nella prima delle due ineguaglianze:

$$Q_n = a_n Q_{n-1} + Q_{n-2}$$

$$Q_{n-1} = a_{n-1} Q_{n-2} + Q_{n-3}$$

il valore di Q_{n-1} dato dalla seconda, viene:

$$Q_n = Q_{n-2}(1 + a_n a_{n-1}) + a_n Q_{n-3},$$

onde:

$$Q_n > Q_{n-2}(1 + a_n a_{n-1})$$

e, poichè le a_n sono tutte maggiori di ε, *a fortiori:*

$$Q_n > (1 + \varepsilon^2) \cdot Q_{n-2}.$$

Se dunque consideriamo per es. la successione (9), si dedurrà a maggior ragione:

$$Q_{2k} > (1 + \varepsilon^2)^k Q_0.$$

Ma, essendo $1+\varepsilon^2$ un numero maggiore di 1, la potenza $(1+\varepsilon^2)^k$ diviene infinitamente grande per $k = \infty$. Dunque, ecc. . . .

649. Se confrontiamo le due differenze successive:

$$\Delta_{n-1} = \frac{(-1)^{n-2}}{Q_{n-2}Q_{n-1}}, \quad \Delta_n = \frac{(-1)^{n-1}}{Q_{n-1}Q_n},$$

vediamo che la seconda è di segno contrario alla prima e minore in valore assoluto, poichè $Q_n > Q_{n-2}$. Inoltre è chiaro che si ha:

$$\lim_{n=\infty} \Delta_n = 0$$

essendosi veduto poco fa che le Q_n divengono infinitamente grandi col crescere di n all'infinito. Da tutto ciò segue (art. 619) che la serie infinita:

$$a_0 + \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \dots$$

è convergente. D'altra parte la somma dei primi $n+1$ termini di questa serie è appunto, come si vede dalla formola (7), la ridotta R_n della nostra frazione continua.

Concludiamo dunque che *le successive ridotte della frazione continua tendono ad un limite finito e determinato, il quale altro non è che la somma della serie convergente:*

$$a_0 + \frac{1}{Q_0 Q_1} - \frac{1}{Q_1 Q_2} + \frac{1}{Q_2 Q_3} - \dots .$$

Questo limite si chiamerà il *valore della frazione continua infinita* $a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{}{\ddots}}$

650. Circa il modo secondo cui le successive ridotte tendono al valore I della frazione continua, c'è da osservare quanto segue:

1°) *le ridotte di ordine pari* $R_0, R_2, R_4, \ldots$ *formano una successione di valori sempre crescenti.* Si ha infatti:

$$R_2 = R_0 + (\Delta_1 + \Delta_2)\ ,\ R_4 = R_0 + (\Delta_1 + \Delta_2) + (\Delta_3 + \Delta_4), \ldots$$

e le somme $\Delta_1 + \Delta_2$, $\Delta_3 + \Delta_4$, ... sono tutte positive, poichè per es. Δ_3 è positivo e maggiore in valore assoluto di Δ_4 che è negativo.

2°) *le ridotte di ordine dispari* $R_1, R_3, R_5, \ldots$ *formano una successione di valori sempre decrescenti.* Infatti:

$$R_3 = R_1 + (\Delta_2 + \Delta_3)\ ,\ R_5 = R_3 + (\Delta_4 + \Delta_5) + \ldots$$

dove ora le somme fra parentesi sono invece tutte negative.

3°) *il valore* I *della frazione continua sarà dunque l'elemento di separazione delle due classi di ridotte,* cioè si potrà scrivere:

$$I = (R_0, R_2, R_4, \ldots ; R_1, R_3, R_5, \ldots).$$

4°) di quì segue come corollario che *due ridotte consecutive qualunque* R_n *ed* R_{n+1} *comprendono fra di loro il valore della frazione continua.*

5°) poichè il valore I della frazione continua è compreso fra R_n ed R_{n-1}, l'errore che si commette prendendo R_n, od R_{n-1}, come valore approssimato di I, sarà evidentemente minore della differenza $R_n - R_{n-1} = \Delta_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{Q_{n-1} \cdot Q_n}$.

651. Sia $I = \dfrac{m}{n}$ un numero razionale (m ed n interi). Se n_1 è il resto (positivo) della divisione di m per n, si può scrivere, indicando con a_0 un numero intero, $m = a_0 n + n_1$, onde:

$$\frac{m}{n} = a_0 + \frac{n_1}{n} = a_0 + \frac{1}{\dfrac{n}{n_1}}.$$

Essendo $n_1 < n$, sia a_1 il quoziente intero ed n_2 il resto della divisione di n per n_1; sarà:

$$\frac{n}{n_1} = a_1 + \frac{n_2}{n_1} = a_1 + \frac{1}{\dfrac{n_1}{n_2}}$$

e sostituendo nell'eguaglianza precedente:

$$\frac{m}{n} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\dfrac{n_1}{n_2}}}.$$

Se il numero n_2 fosse uguale a zero, questa espressione si ridurrebbe ad $a_0 + \frac{1}{a_1}$; ma se n_2 è diverso da zero, si può procedere allo stesso modo e si troverà:

$$\frac{m}{n} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{n_2}{n_3}}}$$

e così di seguito finchè si giunga ad un resto $n_{k+1} = 0$, il che accadrà certamente, poichè i numeri n, n_1, n_2, n_3, ... vanno sempre diminuendo almeno di un'unità. Allora il numero $\frac{m}{n}$ si troverà sviluppato sotto forma di una frazione continua *limitata:*

$$\frac{m}{n} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cdots + \cfrac{1}{a_k}}. \tag{11}$$

652. Se il numero I è irrazionale, è chiaro che, procedendo come si è fatto pel caso di un numero razionale, si darà luogo ad una frazione continua *illimitata* $a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots}}$ in cui le a_1, a_2, ... sono numeri interi e positivi diversi da zero. E facile riconoscere che il valore di tale frazione continua è precisamente il numero irrazionale I che le ha dato origine. A tale oggetto basta evidentemente di dimostrare che il numero I è sempre compreso, come lo è il valore limite della frazione continua, fra due ridotte consecutive quali si vogliano R_{n-1} ed R_n. Infatti si ha:

$$R_{n-1} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cdots + \cfrac{1}{a_{n-1}}} \qquad R_n = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cdots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}$$

e queste sono appunto due ridotte consecutive della frazione continua:

$$I = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cdots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{A}}}}$$

che rappresenterebbe il valore esatto di I, qualora non si volesse ulteriormente sviluppare il numero irrazionale A. Ora noi sappiamo che il valore di una ridotta qualunque è sempre compreso fra quelli delle due ridotte che la precedono.

653. Un numero qualunque si può sviluppare in *un solo modo* in frazione continua ad elementi *interi*. Infatti, quando le a_1, a_2,... sono numeri interi positivi, ogni espressione della forma:

$$\cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots}}$$

è certamente una frazione dell'unità. Se dunque si avesse:

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots}} = a'_0 + \cfrac{1}{a'_1 + \cfrac{1}{a'_2 + \cdots}}$$

eguagliando nei due membri le parti intere e le frazionarie si dedurrebbe appunto $a_0 = a'_0$. Similmente si proverebbe poi che $a_1 = a'_1$, ecc.

654. Essendo per supposto i numeri a_0, a_1, a_2, . . . tutti interi (e positivi dal secondo in poi), è chiaro che i due termini P_n e Q_n di una ridotta qualunque R_n saranno numeri interi. Inoltre essi saranno *primi* fra loro, poichè dall' eguaglianza già dimostrata:

$$P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n = (-1)^{n-1}$$

segue che, se P_n e Q_n avessero un divisore comune diverso da 1, questo dovrebbe dividere $(-1)^{n-1}$, il che è assurdo. Dunque le successive ridotte calcolate colla legge data in principio si presenteranno sempre sotto forma di frazioni *già ridotte ai minimi termini.*

655. Notiamo per ultimo che, essendo ora le a_1, a_2, . . . tutti numeri *interi* e positivi, le formole (8) ci dicono che:

$$Q_0 < Q_1 < Q_2 < Q_3 < \dots$$

onde:

$$|\Delta_n| = \frac{1}{Q_{n-1} Q_n} < \frac{1}{Q^2_{n-1}}, \qquad (12)$$

epperò (cfr. art. 650): *l' errore che si commette prendendo come valore approssimato della frazione continua una delle sue ridotte è minore dell'unità divisa per il quadrato del denominatore di tale ridotta.*

656. Ritornando al numero razionale $I = \frac{m}{n}$ già sviluppato all' art. 651 mediante la frazione continua limitata (11), importa an-

cora notare che l'uguaglianza $\frac{m}{n} = \frac{P_k}{Q_k}$ ha per conseguenza necessaria $m = g \cdot P_k$, $n = g \cdot Q_k$, essendo g un certo numero intero, poichè P_k e Q_k sono primi fra loro (art. 654).

Se dunque si supponga la frazione $\frac{m}{n}$ già ridotta ai minimi termini, si avrà $g = \pm 1$; e precisamente (poichè Q_k è sempre positivo) sarà $g = +1$ ovvero $g = -1$, secondochè sia positivo o negativo il numero n; cosicchè la relazione:

$$P_k Q_{k-1} - P_{k-1} Q_k = (-1)^{k-1}$$

si potrà scrivere sotto la forma:

$$mx + ny = 1 \tag{13}$$

essendo x ed y gli interi, positivi o negativi, dati da:

$$x = (-1)^{k-1} g \cdot Q_{k-1} \quad , \quad y = (-1)^k g \cdot P_{k-1}. \tag{14}$$

L'equazione indeterminata (13) *è dunque sempre risolubile con valori interi di* x *ed* y, *comunque siano stati fissati i coefficienti interi* m *ed* n, *purchè primi fra loro.*

657. Il risultato dell'art. precedente ci da ora il modo di risolvere l'equazione indeterminata più generale:

$$Mx + Ny = L \tag{15}$$

comunque siano stati fissati i coefficienti interi, positivi o negativi, M, N, L.

È chiaro, in primo luogo, che l'equazione (15) non sarebbe risolubile con valori interi di x ed y, qualora il massimo comun divisore di M ed N non fosse anche divisore di L; e che, se ciò si verifica, l'equazione si semplificherebbe, dividendone tutti e tre i coefficienti per tale comun fattore, in modo da cambiarsi nell' equazione equivalente:

$$mx + ny = l \tag{16}$$

con m ed n primi fra loro.

Ciò posto, per avere una prima soluzione della (16), basterà evidentemente di prendere:

$$x = lx_0 \quad , \quad y = ly_0$$

essendo x_0, y_0 due interi che soddisfano all' equazione:

$$mx_0 + ny_0 = 1$$

i quali si potranno determinare nel modo già indicato.

658. Determinata così *una* coppia di valori di x ed y, soddisfacenti alla (16), che indicheremo con X ed Y, tutte le altre possibili coppie x, y, che la risolvono, dovranno evidentemente soddisfare all' equazione:

$$m(x - X) = -n(y - Y) \tag{17}$$

che nasce dal sottrarre dall'equazione (16) l'equazione già soddisfatta:

$$mX + nY = l,$$

e reciprocamente.

Ora la (17) ci dice che il prodotto $m(x - X)$, di cui il primo fattore è primo con n, esser deve divisibile per n. S. Sarà dunque $x - X = \mu n$ e conseguentemente $y - Y = -\mu m$, per μ intero positivo o negativo.

Pertanto *la coppia più generale dei valori di* x *ed* y *soddisfacenti alla* (16) *è data da*:

$$x = X + \mu n \quad , \quad y = Y - \mu m$$

restando l'intero μ *affatto arbitrario.*

Note ed Esercizi.

1. Sviluppare in frazione continua i numeri $\frac{3482}{1243}$ e $-\frac{3482}{1243}$.

2. Se $\frac{P}{Q}$, $\frac{P'}{Q'}$, $\frac{P''}{Q''}$, sono tre ridotte consecutive, dimostrare che:

$$\frac{P''-P}{P'} = \frac{Q''-Q}{Q'}.$$

3. Si dimostri che, nel convertire una frazione ridotta ai minimi termini in frazione continua, due resti consecutivi sono sempre primi fra loro.

4. Sviluppare $\sqrt{2}$ in frazione continua.

5. Risolvere le equazioni indeterminate:

$$5x + 14y = 1 \quad , \quad 5x - 14y = 1.$$

6. Se, fissati quattro numeri interi, positivi o negativi, α, β, γ, δ soddisfacenti alla relazione:

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \varepsilon = \pm 1$$

si sostituisca ad un numero arbitrario x il numero y legato ad x dalla relazione:

$$y = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}, \text{ da cui } x = \frac{-\delta y + \beta}{\gamma y - \alpha} \qquad (1)$$

si dice essersi effettuata sopra x una *sostituzione lineare* (*) (a coefficienti interi, di *modulo* $\varepsilon = \pm 1$). L'operazione così eseguita sopra x si suol rappresentare col simbolo $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ e il risultato di tale operazione con $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} x$, cosicchè si potrà anche scrivere in luogo della (1):

$$y = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} x. \qquad (2)$$

Questa notazione si raccomanda per questo che, se dopo aver eseguito

(*) Circa il significato più generale di *sostituzione lineare*, cfr. i capitoli XIV e XVI.

su x l'operazione $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$, si eseguisca poi sul risultato un'altra consimile operazione $\begin{pmatrix}\alpha' & \beta'\\ \gamma' & \delta'\end{pmatrix}$, il risultato finale si potrà rappresentare comodamente con

$$\begin{pmatrix}\alpha' & \beta'\\ \gamma' & \delta'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}x.$$

Il simbolo $\begin{pmatrix}\alpha' & \beta'\\ \gamma' & \delta'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$, premesso al numero x, viene così a rappresentare un'operazione che si chiama il *prodotto* (o la risultante) dell'operazione $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ e dell'operazione $\begin{pmatrix}\alpha' & \beta'\\ \gamma' & \delta'\end{pmatrix}$. Si verificherà immediatamente che:

$$\begin{pmatrix}\alpha' & \beta'\\ \gamma' & \delta'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha'\alpha + \beta'\gamma & \alpha'\beta + \beta'\delta\\ \gamma'\alpha + \delta'\gamma & \gamma'\beta + \delta'\delta\end{pmatrix} \tag{3}$$

d'onde appare che il prodotto di due sostituzioni lineari non è in generale indipendente dall'ordine dei fattori. Esso è una nuova sostituzione lineare il cui modulo è il prodotto dei moduli delle due componenti, poichè:

$$(\alpha'\alpha + \beta'\gamma)(\gamma''\beta + \delta'\delta) - (\gamma'\alpha + \delta'\gamma)(\alpha'\beta + \beta'\delta) = (\alpha'\delta' - \beta'\gamma')(\alpha\delta - \beta\gamma).$$

Se, dopo eseguite queste due sostituzioni, si esegua sul risultato una terza sostituzione $\begin{pmatrix}\alpha'' & \beta''\\ \gamma'' & \delta''\end{pmatrix}$, l'operazione risultante dalle tre sostituzioni si indicherà similmente con $\begin{pmatrix}\alpha'' & \beta''\\ \gamma'' & \delta''\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha' & \beta'\\ \gamma' & \delta'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$, e così via.

7. Si ha in particolare:

$$\frac{1}{x} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}x \quad , \quad x + h = \begin{pmatrix}1 & h\\ 0 & 1\end{pmatrix}x \tag{4}$$

d'onde si deduce subito:

$$h + \frac{1}{x} = \begin{pmatrix}1 & h\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}x = \begin{pmatrix}h & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}x \tag{5}$$

e applicando la formola più volte di seguito:

$$\begin{pmatrix}a_0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}a_n & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}x = a_0 + \frac{1}{a_1 +} \cdots + \frac{1}{a_n} + \frac{1}{x}. \tag{6}$$

8. Poichè il primo membro di (6) altro non è che il risultato di un'unica sostituzione lineare (di modulo $(-1)^n$) applicata alla quantità x, si vede che *se fra due quantità* x *ed* y *ha luogo un legame della forma:*

$$y = a_0 + \frac{1}{a_1 +} \cdots + \frac{1}{a_n} + \frac{1}{x} \tag{7}$$

essendo le $a_0, a_1, \ldots, a_n$ *numeri interi, avrà anche luogo un legame della*

forma:

$$y = \frac{\alpha x \times \beta}{\gamma x \times \delta} \quad , \quad \alpha\delta - \beta\gamma = (-1)^{n+1} = \pm 1 \tag{8}$$

essendo α, β, γ, δ *numeri interi ed* $\alpha\delta - \beta\gamma = \varepsilon = \pm 1$.

9. *Reciprocamente ad ogni legame della forma* (8) *corrisponderà, fra* $\pm$ y, *ed* x, *un legame della forma* (7). Infatti si può dimostrare facilmente (cfr. Cap. XIV) che, fatta astrazione dal segno, il risultato della sostituzione (8) si può anche ottenere mediante sostituzioni dei due tipi più semplici $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ed $\begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

10. Per invertire la relazione (7), cioè per esprimere, sotto forma analoga, x in funzione di y, basta osservare che la (7) equivale (per la nota 7ma) ad:

$$y = \begin{pmatrix} 1 & a_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} 1 & a_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}x \tag{7)'}$$

e che si ha, qualunque sia X:

$$\begin{pmatrix} 1 & -h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}X = X \quad , \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}X = X ,$$

cosicchè dalla (7)' seguirà subito:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -a_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -a_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -a_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}y = x.$$

Di qui si trae facilmente:

$$x = \frac{1}{-a_n} + \frac{1}{-a_{n-1}} + \cdot \cdot + \frac{1}{-a_0 + y}.$$

11. *Date le due frazioni continue:*

$$x = a + \frac{1}{b} + \cdot \cdot + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \quad , \quad y = r + \frac{1}{q} + \cdot \cdot + \frac{1}{b} + \frac{1}{a}$$

se $\frac{Q}{Q'}$ *ed* $\frac{R}{R'}$ *sono risp. la penultima ed ultima ridotta della frazione* x, *quelle della frazione* y *sono* $\frac{R'}{Q'}$, $\frac{R}{Q}$.

Per la dimostrazione di questa proprietà delle frazioni continue *inverse* (conosciuta sotto il nome di teorema di *Gerono*) e di altre notevoli proprietà riguardanti le frazioni continue *simmetriche*, rimandiamo alla memoria di *Catalan: Remarques sur la théorie des nombres et sur les fractions continues* (Giornale di Battaglini—Tomo XXXI, 1893).

12. Si indichino (come all' art. 651) con n_1, n_2, ..., n_k i resti successivi della divisione di m per n. L' equazione indeterminata a coefficienti interi m, n:

$$mx + ny = 1$$

è risoluta dagl' interi:

$$x = m\left(\frac{1}{mn} - \frac{1}{nn_1} + \frac{1}{n_1 n_2} - \ldots + \frac{(-1)^{k-1}}{n_k \cdot 1}\right)$$

ed

$$y = n\left(\frac{1}{nn_1} - \frac{1}{n_1n_2} , \ldots + \frac{(-1)^k}{n_k.1}\right)$$

(cfr. ***Moriconi:*** Periodico di Matematica, 1887).

13. Se gl'interi a, b, c, d non hanno alcun divisore comune a tutti, si possono sempre determinare due interi x ed y tali che i due numeri $ax + by$ e $cx + dy$ riescano primi fra loro.

Sia infatti (posto $ad - bc = n$):

$$n = p^{\alpha} p_1^{\alpha_1} \ldots q^{\beta} q_1^{\beta_1} \ldots ,$$

indicando colle p quei fattori primi di n che dividono simultaneamente a e b e colle q i rimanenti. Basterà prendere:

$$x = 1 \quad , \quad y = qq_1q_2 \ldots .$$

Invero si può scrivere:

$$n = ad - bc = (a + by)d - (c + dy)b ;$$

cosicchè, se $a + by$ e $c + dy$ avessero un divisore primo in comune, questo dovrebbe dividere n e quindi essere una delle p , p_1 , ... ovvero una delle q , q_1 , . . . ; ecc. ecc.

CAPITOLO VIII.

GENERALITÀ SULLA CONTINUITÀ E DERIVABILITÀ DELLE FUNZIONI DI VARIABILI REALI.

---

§ 1.º — Campo di variabilità reale di specie n.

659. Siano n variabili reali fra loro affatto indipendenti: x_1, $x_2, \ldots, x_n$. Due sistemi di valori particolari:

$$a_1, a_2, \ldots, a_n \quad , \quad b_1, b_2, \ldots, b_n$$

dati a queste variabili si riguarderanno come *distinti* se almeno una delle a_i non coincida colla corrispondente b_i.

Ogni insieme od aggregato, finito od infinito, purchè ben determinato, di siffatti sistemi di valori delle $x_1, \ldots, x_n$ si chiamerà anche brevemente un *campo di variabilità* di specie n. Un campo I di specie n si dirà contenuto in un altro campo J della stessa specie, se ogni sistema di valori delle $x_1, \ldots, x_n$ appartenente ad I appartenga anche ad J. Il campo di specie n costituito da tutti i possibili sistemi di valori delle $x_1, \ldots, x_n$ si chiamerà il *campo generale*, o *completo*, di questa specie, giacchè è evidente che esso contiene in sè ogni altro campo della stessa specie.

660. Ogni sistema di valori delle $x_1, \ldots, x_n$ contenuto in un dato campo I si chiamerà, per brevità, un *elemento*, o anche un *punto* (analitico) del campo stesso. Cosicchè si potrà anche dire che il campo generale di variabilità di specie n è l' insieme di tutti i punti analitici di specie n.

L' elemento di specie n definito da un certo sistema di valori $a_1, \ldots, a_n$ delle $x_1, \ldots, x_n$ si potrà rappresentare con:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

I valori $a_1, a_2, \ldots, a_n$ si chiameranno talvolta le *coordinate* dell' elemento $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$; e precisamente a_1 si dirà esserne la prima coordinata, a_2 la seconda coordinata, ecc.

661. Se

$$a_1, a_2, \ldots, a_n \quad , \quad b_1, b_2, \ldots, b_n$$

sono due elementi di specie n, i due elementi:

$$a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n$$

ed

$$a_1 - b_1\,,\ a_2 - b_2\,,\ \ldots\,,\ a_n - b_n$$

si chiameranno rispettivamente la ***somma*** e la ***differenza*** di quei due elementi.

662. Il valore aritmetico di

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}$$

si chiamerà il *valore assoluto* dell'elemento $(a_1\,, a_2\,, \ldots, a_n)$. Non è difficile riconoscere che *il valore assoluto della somma di più elementi analitici è uguale o minore della somma dei valori assoluti degli elementi stessi.*

Siano infatti $(a_1\,, a_2\,, \ldots, a_n)$ e $(b_1\,, b_2\,, \ldots, b_n)$ i due elementi analitici. Dall' identità:

$$(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \ldots + (a_n - b_n)^2 =$$

$$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n)^2$$

segue, poichè il primo membro, come somma di quadrati di numeri reali, è certamente positivo:

$$(a_1^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + \ldots + b_n^2) \geqq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n)^2$$

d'onde è ora agevole dedurre la diseguaglianza da dimostrarsi:

$$\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2} + \sqrt{b_1^2 + \ldots + b_n^2} \geqq \sqrt{(a_1 + b_1)^2 + \ldots + (a_n + b_n)^2}.$$

663. Il valore assoluto della differenza di due punti analitici $(a_1\,, a_2\,, \ldots, a_n)$ e $(b_1\,, b_2\,, \ldots, b_n)$, cioè il valore aritmetico di

$$\sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \ldots + (a_n - b_n)^2}$$

si chiamerà anche, per brevita (per una ragione desunta dalla interpretazione geometrica di punto analitico) la *distanza* dei due punti.

Il punto di coordinate nulle $(0\,, 0\,, \ldots, 0)$ si chiama spesso l' *origine* dei punti analitici $(x_1\,, x_2\,, \ldots, x_n)$ di specie n. In conformità a ciò si può dire evidentemente che *il valore assoluto di un elemento analitico di specie* n *altro non è che la sua distanza dall'origine degli elementi di specie* n.

664. Un campo di specie n si dirà *finito* (o *limitabile*) se esiste un numero positivo superiore ai valori assoluti di tutti i suoi elementi. In caso contrario si dirà che il campo si *estende all' infinito*, o, più brevemente, che è *infinito* (o *illimitabile*).

Così, ad esempio, il campo di 3ª specie costituito da tutti i punti $(x_1\,, x_2\,, x_3)$ le cui coordinate sono numeri interi, è un campo infinito. Invece il campo di 3ª specie formato da tutti i punti le cui coordinate soddisfano alla condizione:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1$$

è finito, benchè contenga un numero infinito di punti.

665. Fra i campi di prima specie si considera spesso il così detto *intervallo*, cioè l' insieme di tutti i valori dell' unica variabile x che soddisfano alla condizione:

$$a \gtreqless x \gtreqless b.$$

666. Fra quelli di seconda specie ha importanza speciale in analisi la così detta *corona circolare*, cioè l' insieme dei punti (x, y) che soddisfano alle condizioni:

$$r \gtreqless (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 \gtreqless \rho$$

essendo dati i numeri α, β, r, ρ (i due ultimi positivi).

Note ed Esercizi.

1. L' elemento analitico di specie n si chiama anche, come si è detto, *punto* analitico di specie n, per il fatto che il punto geometrico si individua, p. es. nello spazio a tre dimensioni, mediante un sistema di tre numeri x, y, z (le sue *coordinate*).

Se l' elemento analitico (x, y, z) si rappresenta geometricamente mediante il punto che ha, rispetto a certi tre assi ortogonali, le coordinate cartesiane ordinarie x, y, z, il punto P che rappresenta la somma, definita all' art. 661, di n punti analitici:

$$P_1 \equiv (x_1, y_1, z_1), \ P_2 \equiv (x_2, y_2, z_2), \ldots, P_n \equiv (x_n, y_n, z_n)$$

si può ottenere mediante la seguente costruzione geometrica: dal punto P_1 si tiri un segmento P_1Q_2 *equipollente*, cioè avente la stessa direzione, senso e grandezza, al segmento OP_2 (essendo O l'origine delle coordinate, quindi da Q_2 un segmento Q_2Q_3 equipollente al segmento OP_3, e così di seguito finchè si giungerà al punto Q_n che rappresenterà precisamente la somma:

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n, \ y_1 + y_2 + \ldots + y_n, \ z_1 + z_2 + \ldots + z_n).$$

Infatti la projezione ortogonale sull' asse delle z della linea spezzata $OP_1Q_2Q_3 \ldots Q_n$ è uguale alla projezione del segmento OQ_n, cioè alla coordinata z del punto Q_n. Ma quella projezione non è altro che la somma delle projezioni dei singoli lati OP_1, P_1Q_2, ..., $P_{n-1}Q_n$ le quali sono risp. eguali alle projezioni dei segmenti equipollenti OP_1, OP_2, ..., OP_n, cioè alle coordinate z dei punti P_1, P_2, ..., P_n.

2. Il valore assoluto (art. 662) del punto analitico (x, y, z) essendo il numero che misura la distanza del corrispondente geometrico dall'origine delle coordinate, e i valori assoluti dei punti analitici P_1, P_2, ..., P_n della nota precedente essendo quindi i numeri che misurano risp. le lunghezze dei segmenti:

$$OP_1, \ P_1Q_2, \ P_2Q_3, \ldots, P_{n-1}Q_n$$

si vede che il teorema dell' art. 662 si traduce nel noto teorema geometrico che *la lunghezza di una linea spezzata non è mai inferiore alla lunchezza del segmento che congiunge i suoi due estremi.*

3. Riconoscere che la distanza analitica, definita all'art. 668, di due punti analitici coincide col numero che misura la distanza geometrica dei corrispondenti punti geometrici.

4. Riconoscere come la formola:

$$\sqrt{(x_3-x_1)^2 + (y_3-y_1)^2 + (z_3-z_1)^2} \gtreqless \sqrt{(x_3-x_2)^2 + (y_3-y_2)^2 + (z_3-z_2)^2} + \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$$

esprimente che un lato di un triangolo è uguale o minore della somma degli altri due, non differisca sostanzialmente dalla formola dell'art. 662, in cui si faccia $n = 3$.

5. La definizione di *intervallo* fra un punto ed un altro punto si può estendere opportunamente a campi di qualsivoglia specie n come segue. Per intervallo dal punto $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ al punto $(b_1, b_2, \ldots b_n)$ intenderemo il campo di specie n i cui punti $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sono definiti dalle formole:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 + \lambda(b_1 - a_1) \\ x_2 &= a_2 + \lambda(b_2 - a_2) \qquad , \qquad 0 \lesseqgtr \lambda \lesseqgtr 1 \\ &\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= a_n + \lambda(b_n - a_n) \end{aligned}$$

dove cioè λ può assumere il valore di un elemento qualunque del campo di prima specie:

$$0 \lesseqgtr \lambda \lesseqgtr 1.$$

6. Riconoscere che l'intervallo da A a B coincide coll'intervallo da B ad A servendosi della identità:

$$a_i + \lambda(b_i - a_i) = b_i + (1 - \lambda)(a_i - b_i).$$

7. Sia P un punto qualunque dell'intervallo, di specie n, che va dal punto A al punto B. Riconoscere che la distanza fra A e B è uguale alla somma della distanza fra A e P e della distanza fra P e B.

8. Riconoscere che anche i punti analitici di specie n sono *ordinabili* (come lo sono evidentemente quelli di prima specie, cioè i semplici numeri reali); ossia, che si può sempre definire la notazione:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) < (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

in modo che se sia:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n) < (y_1, y_2, \ldots, y_n) \;,\; (y_1, y_2, \ldots, y_n) < (z_1, z_2, \ldots, z_n$$

sia anche simultaneamente:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) < (y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

§ 2.º — Interno, contorno e confine di un campo.

667. Sia C un campo di punti analitici $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ di specie n, e sia $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ un punto appartenente a C. Si dirà che esso si trova *nell'interno* di C, se esiste un numero positivo δ tale che ogni punto analitico soddisfacente alla condizione:

$$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2 < \delta$$

appartenga del pari al campo C. O, in altri termini, si dirà che *un certo punto di C è interno a C, se tutti i punti analitici abbastanza vicini ad esso* (cioè la cui distanza da esso, cfr. art. 663, è abbastanza piccola) *appartengono pure a* C. In caso contrario si dirà che il punto $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ si trova *sul contorno* di C. Come si vede, noi facciamo distinzione fra la locuzione *punto appartenente a* C e la locuzione *punto interno a* C.

668. Un campo di specie n può anche essere sprovvisto di con-

torno. Così p. es. il campo di 1ª specie definito dalle condizioni:

$$a < x < b \qquad (1)$$

non ha contorno. Invece l' intervallo :

$$a \lesseqgtr x \lesseqgtr b \qquad (2)$$

ha due punti di contorno ($x = a$ ed $x = b$). Come si vede, il campo (1) altro non è che l'*interno dell'intervallo* (2).

Si ponga dunque attenzione alla differenza che intercede fra il dire che « un punto cade in un dato intervallo » e il dire che « un punto cade nell'interno di un dato intervallo ».

669. Non è difficile di riconoscere che, se da un campo qualunque di specie n dotato di contorno si sopprimono i punti del contorno, ciò che rimane è un campo senza contorno. In altre parole: *i punti interni di un qualsivoglia campo costituiscono un campo senza contorno.*

Così, se dal campo di 2ª specie i cui punti (x, y) sono definiti dalla condizione :

$$x^2 + y^2 \lesseqgtr r^2$$

si sopprimono i punti del contorno $(x^2 + y^2 = r^2)$, ciò che resta, cioè il campo :

$$x^2 + y^2 < r$$

è un campo senza contorno.

670. Sia finalmente $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ un punto del campo generale di specie n, il quale non cada nell' interno del campo C. Noi diremo che esso si trova sul *confine* di C, se, comunque si fissi il numero positivo δ, esiste nel campo C almeno un punto la cui distanza da esso sia inferiore a δ. Questa condizione è evidentemente soddisfatta se $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ cade sul contorno stesso di C, giacchè in tal caso si potrà prendere come punto di C distante da $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ per meno di δ, lo stesso punto $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Il confine di C si comporrà dunque del contorno di C e, almeno in generale, anche di altri punti non appartenenti a C.

Esempio *a*). Il campo di 1ª specie definito dalle condizioni :

$$a \lesseqgtr x \lesseqgtr b$$

ha per contorno i due punti a e b, i quali ne sono al tempo stesso anche il confine.

Esempio *b*). Il campo :

$$a < x < b$$

non ha contorno, ma ha i due punti di confine a e b.

Esempio *c*). Il campo :

$$a \lesseqgtr x < b$$

ha per contorno il solo punto a e per confine l'insieme dei due punti a e b.

671. I punti che non cadono nè sul confine, nè all'interno del campo C, si diranno *esterni* a C. Si badi a non confondere la locuzione *esterno* a C colla locuzione *estraneo* a C (cioè *non appartenente* a C).

Tutti i punti $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ si dividono dunque rispetto ad un dato campo C in tre categorie: punti interni a C, punti al confine di C e punti esterni a C.

Note ed Esercizi.

1. Sia C' il campo complementare di C, cioè l'insieme di tutti i punti $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ non appartenenti a C. Riconoscere che C e C' hanno lo stesso confine, ma non hanno mai in comune alcuna parte di contorno; e che l'insieme dei due contorni costituisce l'intero confine di ciascuno di essi.

2. Data una progressione finita di punti analitici $A_1, A_2, \ldots, A_m$, di specie qualsivoglia, la progressione degli *intervalli* (cfr. la Nota 5ª del § prec.) che vanno rispettivamente da A_1 ad A_2, da A_2 ad A_3, e così via fino ad A_m, la chiameremo per brevità una *progressione d'intervalli che collega il punto* A_1 *col punto* A_m.

Ciò premesso, si dirà che l'*interno* di un campo C, di specie n, è *continuo* se due punti qualisivogliano dell'interno di C possono essere collegati mediante una progressione di intervalli del pari interni a C (cioè i cui punti siano tutti interni a C).

Così, secondo la definizione data, si dirà continuo l'interno di un intervallo di 1ª specie. Quanto agli intervalli di specie superiore, non vi ha luogo a parlare di ciò essendo essi sprovvisti d'interno.

3. Diremo che un campo C è *compatto* in un certo punto $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ se esiste un numero positivo δ tale che tutti i punti $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ distanti da $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ per meno di δ siano punti interni o punti di confine di C. È chiaro che se $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ è interno a C, esso sarà anche punto di compattezza di C; in questo caso si dirà però anche, più propriamente, che il campo C è *continuo nel punto* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Analogamente poi alla definizione già data di campo continuo, diremo che C (o meglio il campo formato dai punti di compattezza di C) è *un campo compatto*, se due punti qualunque A e B nei quali C è compatto, possono essere collegati con una progressione di intervalli i cui punti sono tutti i punti di compattezza di C.

4. Consideriamo il campo di 1ª specie, Γ, definito dalle condizioni:

$$a < x < b \tag{α}$$

alle quali si aggiunga quella che x sia un numero razionale. Riconoscere che questo campo non ha affatto *interno;* cosicchè i valori di x soddisfacenti alle (α) saranno punti di contorno di Γ ovvero semplici punti di confine, secondochè essi siano razionali od irrazionali. Riconoscere inoltre che il campo Γ è compatto in ogni punto x soddisfacente alle (α); e che per conseguenza si può anche dire che è compatto l'*intero campo* Γ.

5. Un punto A (di specie n) si dice *isolabile* rispetto ai punti di un campo C della stessa specie, se esista un numero positivo δ tale che tutti i punti distanti da A per meno di δ siano estranei al campo C (fatta al più eccezione per lo stesso A, il quale in tal caso è un così detto *punto isolato* di C).

6. Riassumendo, vediamo che fra i punti A appartenenti al campo C si possono fare le seguenti distinzioni:

1°) il punto A è isolato;

2°) il punto A non è isolabile;

3°) il punto A è un punto di compattezza di C (cioè un punto in cui il campo C è compatto);

4°) il punto A è un punto di continuità di C (cioè cade nell'interno di C).

Si riconosca su qualche esempio come i punti della 2ª categoria possano anche appartenere alla 3ª, ma non necessariamente.

7. Teorema. — *Se ogni punto di specie* n *è isolabile dai punti del campo finito* C, *della stessa specie, il campo* C *non può constare che di un certo numero finito di punti.*

Infatti, essendo il campo C finito, le variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$ varieranno pei punti di C rispettivamente entro certi limiti:

$$a_1, b_1 ; a_2, b_2, \ldots ; a_n, b_n.$$

Ciò posto, diviso ognuno degli intervalli $a_i b_i$ in k intervalli di eguale lunghezza, si vede che, se il teorema non si verificasse, il campo C dovrebbe avere infiniti punti compresi in un campo della forma:

$$a'_1 \lesseqqgtr x_1 \lesseqqgtr b'_1 , \; a'_2 \lesseqqgtr x_2 \lesseqqgtr b'_2 , \ldots , a'_n \lesseqqgtr x_n \lesseqqgtr b'_n$$

essendo $|b'_i - a'_i|$ la k^{ma} parte di $|b_i - a_i|$, per $i = 1, 2, \ldots, n$. Suddividendo di nuovo ognuno di questi n intervalli in k intervalli eguali e così di seguito, si finirà per concludere che il campo C ha infiniti elementi *nell' intorno* di un certo punto ben determinato $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ cioè nel campo:

$$|x_1 - X_1| < \delta , \; |x_2 - X_2| < \delta , \ldots , |x_n - X_n| < \delta$$

essendo δ fissato piccolo ad arbitrio. Il punto $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ non sarebbe dunque isolabile dai punti di C, contro il supposto.

§ 3.° — Estremo superiore ed estremo inferiore di un campo finito di prima specie.

672. Ogni campo finito C, contenuto nel campo generale di prima specie rappresentato dalla variabile x, ha necessariamente dei punti di confine. Noi dimostreremo anzi qualche cosa di più, cioè l'esistenza di due valori a e b, che chiameremo risp. l'*estremo inferiore* e l'*estremo superiore* del campo C, i quali godono delle seguenti proprietà: *esistono punti di* C *che differiscono da* a (*o da* b) *per meno di un numero positivo* δ *assegnabile ad arbitrio; non esistono valori di* C *inferiori ad* a *o superiori a* b.

Sia infatti, detto α un punto di C ed ε_n un numero positivo tendente a zero per $n = \infty$, nella progressione aritmetica:

$$\alpha , \alpha + \varepsilon_1 , \alpha + 2\varepsilon_1 , \alpha + 3\varepsilon_1 , \ldots$$

l' intervallo che ha per estremi:

$$b_1 = \alpha + m\varepsilon_1 \quad , \quad c_1 = \alpha + (m+1)\varepsilon_1$$

l' ultimo che contiene qualche punto di C. Suddiviso di nuovo quest' intervallo in intervalli a differenza ε_2 mediante la progressione:

$$b_1 , b_1 + \varepsilon_2 , b_1 + 2\varepsilon_2 , \ldots ,$$

siano similmente b_2 e c_2 gli estremi dell'ultimo intervallo che comprende qualche punto di C. Così procedendo si verrà a definire un numero:

$$b = (b_1 , b_2 , b_3 , \ldots , c_1 , c_2 , c_3 , \ldots)$$

il quale potrà evidentemente essere raggiunto, o almeno avvicinato indefinitamente, dai punti di C. Inoltre un numero qualunque c, maggiore di b, non può appartenere a C; poichè c dovrebbe superare (art. 562) qualche numero c_i della classe $c_1 , c_2 , c_3 , \ldots$, nel mentre che l'intervallo avente per estremi b_i e c_i era l'ultimo, fra quelli a differenza ε_i, che potesse contenere elementi di C. Il punto b così determinato è dunque il limite superiore del campo C. Similmente si dimostrerebbe l'esistenza del limite inferiore, per mezzo delle progressioni a differenza $-\varepsilon_i$.

Note ed Esercizi.

1. Dimostrare che *in un campo finito di qualsivoglia specie esiste sempre qualche punto di confine.* A quest'oggetto si consideri un punto qualunque $(a_1 , a_2 , \ldots , a_n)$ appartenente al campo dato C. I valori di x_1 tali che il punto $(x_1 , a_2 , a_3 , \ldots , a_n)$ appartenga al campo dato, formano un campo di prima specie per il quale esisterà un limite superiore A_1. È facile riconoscere che il punto $(A_1 , a_2 , a_3 , \ldots , a_n)$ è necessariamente un punto di confine del campo C.

2. Supponiamo ora che il campo C sia di seconda specie. I suoi elementi (x_1 , x_2) si potranno rappresentare geometricamente mediante i punti di un piano; cioè il punto analitico (x_1 , x_2) mediante il punto geometrico che ha per ascissa x_1 e per ordinata x_2. Sia A un punto interno al campo C e su ogni retta passante per A si segnino i due estremi, analoghi a quelli dianzi definiti, del campo formato dai punti della retta appartenti a C. Il luogo di tutti questi estremi sarà ancora un campo di seconda specie ma *ad una sola dimensione,* p. es. una così detta linea, che si potrà chiamare una *linea di confine di* C. Si studino le condizioni sotto le quali la linea così costruita costituirà l'intero confine di C.

3. Si estendano queste considerazioni ai campi di qualsivoglia specie, mostrando come si possa costruire per un campo di specie n un suo *campo di confine* di specie n, ma di dimensione $n-1$.

§ 4.° — Continuità delle funzioni di una variabile reale.

673. Sia C un intervallo (cfr. art. 665) contenuto nel campo generale di prima specie percorso dall'unica variabile reale x; e sia $f(x)$ una funzione (cfr. Cap. IV, § 15) di x data nel campo C, cosicchè ad ogni valore di x contenuto in C corrisponda un unico valore ben determinato di $f(x)$.

Se a è un punto qualunque di C, si dice che la funzione $f(x)$ è *continua nel punto* a *di* C qualora, fissato a piacere il numero positivo δ, esista un numero positivo ε tale che per tutti i valori di x contenuti in C e soddisfacenti alla diseguaglianza:

$$|x - a| < \varepsilon$$

si abbia:

$$|f(x) - f(a)| < \delta.$$

674. Siano:

$$a \lesseqgtr x \lesseqgtr \beta \tag{1}$$

le diseguaglianze che definiscono l'intervallo C. Se $f(x)$ è continua in ogni punto di C, cioè per ogni valore di x soddisfacente le (1), diremo che essa è *continua nell'intervallo* C. Se invece si sappia soltanto che essa è continua in ogni punto x soddisfacente alle diseguaglianze:

$$\alpha < x < \beta,$$

si dirà (cfr. § 2°, art. 667) che essa è *continua nell' interno dell' intervallo* C.

675. *Se la funzione* f(x) *è continua nell'intervallo* C, *essa è anche finita in* C, *cioè i valori da essa assunti in* C *non possono superare, in valore assoluto, un certo numero positivo assegnabile.*

Ammettiamo infatti, se è possibile, che $f(x)$ possa prendere valori grandi quanto si voglia nel campo C, i cui estremi siano a e b. Suddiviso questo intervallo in k intervalli eguali, è chiaro che almeno in uno di essi, che sia l'intervallo avente per estremi a_1 e b_1, potrà la $f(x)$ divenire infinitamente grande. Suddiviso di nuovo allo stesso modo anche questo intervallo in k più piccoli, ve ne sarà fra essi almeno uno, di estremi a_2 e b_2, nel quale $f(x)$ potrà prendere valori grandi a piacere. Così procedendo si verrà ad individuare un punto:

$$\alpha = (a\ ,\ a_1\ ,\ a_2\ ,\ \ldots\ ;\ b\ ,\ b_1\ ,\ b_2\ ,\ \ldots)$$

tale che $f(x)$ potrà divenire grande a piacere per valori di x distanti da α di tanto poco quanto si voglia. Ora ciò è in contraddizione colla supposta continuità di $f(x)$, in virtù della quale $f(x)$ differisce da $f(\alpha)$ per meno di una quantità assegnata, per tutti i valori di x abbastanza vicini ad α.

676. *Se la funzione* f(x) *è continua nell'intervallo* C, *esiste in* C *almeno un valore* x *pel quale* f(x) *raggiunge il valore massimo* (e così pure un punto nel quale raggiunge il valore minimo), *cioè un valore maggiore od al più eguale* (risp. minore od al più eguale) *a qualsiasi altro valore da essa assunto in* C.

Cominciamo dall'osservare che, dovendo la $f(x)$, per quanto si è testè dimostrato, restare finita in C, l'insieme dei valori che $f(x)$ può prendere in C costituirà un campo finito di prima specie, il quale ammetterà (art. 672) un estremo superiore h ed un estremo inferiore k.

Poichè ora il valore h non può essere superato, ma può essere avvicinato indefinitamente dai valori che $f(x)$ può assumere in C, è chiaro che, suddiviso, come all' art. precedente, l' intervallo C in k intervalli più piccoli, ne esisterà fra questi almeno uno, di estremi a_1 e b_1, tale che $f(x)$ potrà avvicinarsi indefinitamente ad h con valori di x in esso contenuti. Lo stesso accadrà per un

certo nuovo intervallo più piccolo, di estremi a_2 e b_2, ottenuto suddividendo anche l'intervallo da a_1 a b_1 in k intervalli più piccoli; e così di seguito. Così procedendo si verrà a determinare un punto:

$$\alpha = (a\,,\, a_1\,,\, a_2\,,\, \ldots\,;\, b\,,\, b_1\,,\, b_2\,,\, \ldots)$$

tale che $f(x)$ potrà avvicinarsi indefinitamente ad h per valori di x distanti da α per meno di una quantità fissata piccola a piacere. Pertanto, detto δ un numero positivo fissato a piacere, e scelta la ε in modo che per tutti i valori di x distanti da α per meno di ε si abbia:

$$|f(x) - f(\alpha)| < \delta, \tag{2}$$

il che è possibile essendo $f(x)$ continua per supposto nel punto α, dovrà essere soddisfatta, almeno per un valore di x, simultaneamente alla (2), anche la disuguaglianza:

$$|f(x) - h| < \delta. \tag{3}$$

Ora dalle (2) e (3) sommate membro a membro segue *a fortiori*:

$$|f(\alpha) - h| < 2\delta$$

e questa diseguaglianza, dovendo essa sussistere per gli stessi valori α ed h qualunque sia δ, ci dice appunto che:

$$f(\alpha) = h\,,$$

cioè che esiste effettivamente nell'intervallo C un punto α nel quale $f(x)$ raggiunge il suo valore massimo, cioè h.

In modo del tutto simile si dimostrerebbe poi l'esistenza di un punto β pel quale $f(\beta) = k$.

Note ed Esercizi.

1. Se la funzione $f(x)$ resta finita nell'intervallo C, l'estremo superiore del campo formato dai valori assunti da $f(x)$ in C si suol chiamare il *limite superiore* della funzione $f(x)$ in C.

Ciò premesso, la prima parte della dimostrazione da noi data all'art. 676, richiedendo soltanto che $f(x)$ resti finita in C, ci dice che *se la funzione* f(x) *resta finita nell'intervallo* C, *esiste in* C *almeno un punto* a *tale che* f(x) *può avvicinarsi indefinitamente al suo limite superiore in* C *per valori di* x *distanti da* a *di tanto poco quanto si vuole.*

2. È importante di osservare che i teoremi degli articoli 675 e 676 cesserebbero di sussistere qualora nei loro enunciati, in luogo di supporre che $f(x)$ sia continua in C, si presupponesse soltanto che essa sia continua *nell'interno* di C.

Si riconosca la verità di questo asserto esaminando la funzione $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ la quale è continua nell'interno dell'intervallo: $1 \gtreqless x \gtreqless 2$, ma è discontinua (e del resto neanche ben determinata) nel punto $x = 1$.

3. Riconoscere che *se* a *è un punto interno al campo in cui è data* f(x), *affinchè* f(x) *sia continua nel punto* a, *è necessario e sufficiente che si abbia*:

$$\lim_{x=a} f(x) = f(a).$$

4. TEOREMA. — *Se la funzione* f(x) *è continua nell'intervallo* C, *esisterà sempre, fissato a piacere il numero positivo* δ, *un numero positivo* ε *tale che sia in valore assoluto inferiore a* δ *la differenza* $f(y) - f(z)$, *comunque si scelgano i valori* y *e* z *entro* C, *purchè sia* $|y - z| < \varepsilon$.

Supponiamo infatti che la proprietà da dimostrarsi non sussistesse per l'intervallo C e per un certo valore prefissato di δ. Si inseriscano fra i due estremi a e b di C altri due punti c e d, cosicchè sia:

$$a < c < d < b \quad , \quad c - a = d - c = b - c,$$

e si considerino i due intervalli C'_1, C'_2, dei quali il primo abbia gli estremi a e d ed il secondo gli estremi c e b. La proprietà da dimostrarsi non sussisterà allora, sempre per lo stesso δ prefissato, almeno per uno dei due nuovi intervalli C'_1, C'_2; poichè, se essa sussistesse per C'_1 prendendo $\varepsilon = \varepsilon_1$ e per C'_2 prendendo $\varepsilon = \varepsilon_2$, essa sussisterebbe evidentemente anche per C, prendendo per ε la più piccola fra le tre quantità:

$$\varepsilon_1 \ , \ \varepsilon_2 \ , \ \frac{1}{3}|b-a|.$$

Esiste dunque in C un'intervallo C', di lunghezza $\frac{2}{3}|b - a|$, per il quale la proprietà da dimostrarsi non è soddisfatta. Ragionando ora su C' come si è fatto su C, si dimostrerà l'esistenza di un intervallo C'' contenuto in C', di lunghezza eguale ai due terzi di quella di C' per il quale neanche sussiste, sempre per lo stesso δ già fissato, la proprietà da dimostrarsi. Così procedendo si stabilirà l'esistenza di un punto ben determinato P comune a tutti gli infiniti intervalli C, C', C'', ... tale che per punti di C vicini quanto si voglia a P non sussista la proprietà da dimostrarsi. Ora ciò è in manifesta contraddizione col supposto che $f(x)$ sia continua nel punto P.

§ 5.º — Sulla continuità delle funzioni intere.

677. Data una certa funzione intera, di grado n, della variabile x:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n, \qquad (1)$$

imaginiamo di considerare, in luogo del valore x della variabile, il valore $x + h$, cioè il valore x a cui si sia dato, come suol dirsi, l'*incremento* h, h potendo essere del resto un numero qualunque. Il nuovo valore della funzione sarà $f(x + h)$, e se poniamo:

$$f(x + h) - f(x) = \mathrm{H}, \qquad (2)$$

si potrà scrivere:

$$f(x + h) = f(x) + \mathrm{H},$$

onde si vede che H è l'incremento subito dalla funzione $f(x)$ per l'incremento h dato alla variabile. D'ora innanzi *per incremento di una funzione* f(x) *corrispondente all'incremento* h *della variabile intenderemo dunque la differenza* $f(x + h) - f(x)$.

678. Poichè (art. 503):

$$f(x + h) - f(x) = h\frac{f'(x)}{1} + h^2\frac{f''(x)}{\underline{|2}} + h^3\frac{f'''(x)}{\underline{|3}} + \ldots + h^n\frac{f^{(n)}(x)}{\underline{|n}}, \qquad (3)$$

si avrà, per il teorema che il valore assoluto di una somma non può superare la somma dei valori assoluti delle parti:

$$|f(x+h)-f(x)| \lesseqgtr |h| \cdot \left|\frac{f'(x)}{1}\right| + |h|^2 \cdot \left|\frac{f''(x)}{\underline{|2}}\right| +$$

$$+ |h|^3 \cdot \left|\frac{f'''(x)}{\underline{|3}}\right| + \ldots + |h|^n \cdot \left|\frac{f^{(n)}(x)}{\underline{|n}}\right|.$$

Si vede dunque che, prendendo il valore assoluto $|h|$ sempre più piccolo, ciascuno degli n termini che compongono il secondo membro, e quindi anche la loro somma, finirà per divenire e conservarsi più piccola di qualsiasi quantità positiva δ assegnata piccola a piacere. Lo stesso dunque, a maggior ragione, accadrà del primo membro, cioè: *fissata a piacere una quantità positiva piccolissima* δ, *si avrà:*

$$|f(x+h)-f(x)| < \delta \tag{4}$$

per tutti i valori dell'incremento h *il cui valore assoluto sia abbastanza piccolo.*

Questo teorema si suol enunciare comunemente in modo più semplice ma meno rigoroso, dicendo che, *per ogni funzione intera* f(x), *ad incrementi piccolissimi dati alla variabile corrispondono incrementi piccolissimi della funzione.*

Noi possiamo però enunciarlo in modo rigoroso ed ancor più breve, in base alla definizione di funzione continua da noi data nel precedente §, con dire che *le funzioni intere sono continue in ogni punto del campo percorso dalla variabile.*

679. Dividendo entrambi i membri della (3) per h si ha:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) + \left\{h\frac{f''(x)}{\underline{|2}} + h^2\frac{f'''(x)}{\underline{|3}} + \ldots + h^{n-1}\frac{f^{(n)}(x)}{\underline{|n}}\right\},$$

dove la quantità scritta fra parentesi nel secondo membro, componendosi di parti ciascuna delle quali tende al limite zero quando h tende al valore zero, avrà essa pure per limite lo zero per h tendente a zero. Si avrà dunque:

$$\lim_{h=0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x). \tag{5}$$

Il primo membro di questa eguaglianza è il limite cui tende, per $h=0$, il quoto $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, che suol chiamarsi brevemente *rapporto incrementale* della funzione $f(x)$, essendo esso appunto il rapporto fra l'incremento della funzione e l'incremento corrispondente della variabile. La (5) ci dice dunque che *la prima derivata* f'(x) *di una funzione intera* f(x) *è il limite del rapporto incrementale di* f(x), *quando l'incremento tende a zero.*

680. Si è già notato che, se si ha una funzione $\varphi(x)$ della forma:

$$a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n,$$

cioè una funzione intera che si annulla per $x=0$, il valore assoluto di questa funziene si può rendere più piccolo di un numero positivo δ, assegnato a piacere, per tutti i valori abbastanza piccoli di $|x|$. Ora è utile di avere un'espressione semplice di un limite al disotto del quale si possa poi prondere a piacere $|x|$ colla sicurezza che resti soddisfatta la disuguaglianza:

$$|\varphi(x)| < \delta. \qquad (\alpha)$$

Per il teoreme già invocato sulla somma dei valori assoluti, detti $A_1, A_2, \ldots$ risp. i valori assoluti di $a_1, a_2, \ldots$, si ha:

$$|\varphi(x)| \lesseqgtr A_1 \cdot |x| + A_2 \cdot |x|^2 + \ldots + A_n \cdot |x|^n,$$

onde, indicando con A il massimo fra i numeri $A_1, A_2, \ldots, A_n$, si ha anche *a fortiori :*

$$|\varphi(x)| \lesseqgtr A \{|x| + |x|^2 + \ldots + |x|^n\}$$

ed effettuando la somma della progressione geometrica:

$$|\varphi(x)| \lesseqgtr A \frac{|x| - |x|^{n+1}}{1 - |x|} = A \frac{|x|}{1 - |x|} - A \frac{|x|^{n+1}}{1 - |x|};$$

ed *a fortiori*, trascurando la parte $-A \frac{|x|^{n+1}}{1 - |x|}$, che è certamente negativa quando si prenda:

$$|x| < 1, \qquad (\beta)$$

si avrà:

$$|\varphi(x)| \lesseqgtr A \frac{|x|}{1 - |x|}. \qquad (\gamma)$$

La diseguaglianza (α) sarà dunque certamente soddisfatta, se si prenda $|x|$ in modo da avere:

$$A \frac{|x|}{1 - |x|} < \delta$$

o, che è la stessa cosa:

$$A \cdot |x| < \delta - \delta \cdot |x| \quad , \quad (A + \delta) \cdot |x| < \delta ,$$

cioè se si prenda:

$$|x| < \frac{\delta}{A + \delta};$$

e notiamo che, se si prende $|x|$ in modo da soddisfare a questa diseguaglianza, esso soddisferà poi anche certamente all'altra diseguaglianza presupposta (β), poichè $\frac{\delta}{A + \delta}$ è evidentemente già un numero minore di 1.

Pertanto: *se* A *è il massimo fra i valori assoluti dei coefficienti di una fnnzione intera* $\varphi(\mathbf{x})$, *che si annulla per* $\mathbf{x}=0$, *e si prenda*:

$$|\mathbf{x}| < \frac{\delta}{A + \delta},$$

sarà certamente $|\varphi(\mathbf{x})| < \delta$.

681. Esempio. — Se A è il massimo valore assoluto dei coefficienti di $f(x) = a_1 x + \ldots + a_n x^n$, e si prenda:

$$|x| < \frac{1}{1 + (A \times 1000000000)},$$

si avrà certamente:

$$|\varphi(x)| < \frac{1}{1000000000}.$$

§ 6.° — Sulle radici di una funzione continua di una variabile reale.

682. *Sia* f(x) *una funzione continua per ogni valore di* x *appartenente all' intervallo:*

$$a \lesseqgtr x \lesseqgtr b. \tag{1}$$

Se f(a) *ed* f(b) *sono di segno contrario, esisterà nel detto intervallo almeno una radice di* f(x), *cioè almeno un valore di* x *soddisfacente all'equazione* f(x) = 0.

Detta δ la lunghezza, $b - a$, dell'intervallo in parola e c il medio aritmetico di a e di b, per l'uno o per l'altro dei due intervalli, da a a c oppure da c a b, la cui lunghezza è $\frac{1}{2}\delta$, accadrà che $f(x)$ assuma nei due estremi valori di segno opposto; a meno che fosse $f(c) = 0$, nel qual caso sarebbe già dimostrato quanto si desiderava. Infatti, se $f(c)$ ha lo stesso segno di $f(a)$, avrà invece segno opposto a quello di $f(b)$ e viceversa. Vediamo dunque che dall'intervallo (1) di lunghezza δ, possiamo passare ad un intervallo più piccolo:

$$a' \lesseqgtr x \lesseqgtr b' \tag{2}$$

di lunghezza $\frac{1}{2}\delta$, tutto contenuto nel precedente e pel quale si ha similmente che $f(a')$ ed $f(b')$ sono di segno contrario. Allo stesso modo si dedurrà ora dall'intervallo (2) un nuovo intervallo:

$$a'' \lesseqgtr x \lesseqgtr b'',$$

di lunghezza $\frac{1}{2^2}\delta$ e tutto contenuto nel precedente, pel quale siano di segno contrario $f(a'')$ ed $f(b'')$, e così di seguito.

Poichè ognuna delle $a, a', a'', \ldots$ è minore di ognuna delle $b, b', b'', \ldots$ e d'altra parte, per k abbastanza grande, il numero:

$$\frac{\delta}{2^k}$$

si può rendere piccolo a piacere, esisterà il numero:

$$\alpha = (a, a', a'', \ldots; b, b', b'', \ldots);$$

ed è facile riconoscere che esso è appunto una radice di $f(x)$. In-

fatti, poichè $f(x)$ è continua per $x = \alpha$, e i numeri $a^{(k)}$, $b^{(k)}$ differiscono da α di tanto poco quanto si vuole purchè si prenda k abbastanza grande, anche $f(a^{(k)})$ ed $f(b^{(k)})$ potranno farsi differire da $f(\alpha)$ di tanto poco quanto si vuole. Ma, dei due numeri $f(a^{(k)})$ ed $f(b^{(k)})$, uno è positivo e l'altro è negativo. Il numero $f(\alpha)$ può dunque essere avvicinato indefinitamente sia con numeri positivi che con numeri negativi; onde esso è evidentemente lo zero, c. d. d.

683. *Se* f(x) *è continua in tutto l'intervallo da* a *a* b *ed* A *è un numero qualunque compreso fra* f(a) *ed* f(b), *esisterà fra* a *e* b *almeno un valore di* x *pel quale sia* f(x) = A.

È questo un corollario del teorema dell' art. prec.; poichè, se $f(a) - A$ è positivo, $f(b) - A$ è negativo e viceversa. La funzione $f(x) - A$ ha dunque una radice α nell'intervallo da a a b, cosicchè sarà:

$$f(\alpha) - A = 0, \text{ cioè appunto: } f(\alpha) = A.$$

Note ed Esercizi.

1. Riconoscere che l' equazione:

$$(x - a)^n + c(x - b)^n = 0$$

in cui n è dispari e c è positivo, ha una radice compresa fra a e b. Si faccia poi anche la verifica di ciò mediante il calcolo della sua espressione effettiva in funzione di a, b e c.

2. Nell' equazione $f(x) = 0$ in cui:

$$f(x) = p_0x^n + p_1x^{n-1} + \ldots + x - r,$$

se q é il massimo fra i valori assoluti dei coefficienti $p_0, p_1, \ldots$ ed r è positivo e minore di $\frac{1}{2 + 4q}$, vi è una radice reale positiva minore di $2r$. (Cfr. Todhunter. Teoria delle equazioni, Napoli 1872, § VII, art. 111).

§ 7.° — Definizione generale della derivata di una funzione. Esempi.

684. La proprietà della prima derivata di una funzione intera da noi data all'art. 679, potrebbe anche assumersi come sua definizione in luogo della definizione da noi già data (art. 501) fondata sulla legge di derivazione. Si avrebbe così il vantaggio di dare della prima derivata una definizione che può estendersi anche a funzioni di x che non siano intere. In effetto, qualunque sia la natura della funzione $F(x)$, si definisce come prima derivata $F'(x)$ la funzione:

$$F'(x) = \lim_{h=0} \frac{F(x + h) - F(x)}{h}$$

tutte le volte che il rapporto incrementale di $F(x)$ tenda effettiva-

mente ad un limite finito e ben determinato col tendere a zero dell' incremento h.

685. Esempio I. — Se a è una costante reale e positiva ed x una variabile limitata al campo reale, la funzione a^x ha, come sappiamo, un valore unico, finito e ben determinato per ogni valore di x. Il suo rapporto incrementale è dato da

$$\frac{a^{x+h}-a^x}{h}=a^x\frac{a^h-1}{h}$$

onde si ha (art. 642):

$$\lim_{h=0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}=a_x\lim_{h=0}\frac{a^h-1}{h}=a^x\log_e a.$$

Cioè: *la funzione esponenziale* a^x *ha per derivata la funzione stessa moltiplicata per il logaritmo naturale di* a.

686. Esempio II.—Consideriamo ora la funzione $\log_a x$, alla quale si può attribuire (art. 610) un valore unico e finito per ogni valore reale e positivo di x (purchè diverso da zero), se la costante positiva a è diversa da zero e dall'unità. Il suo rapporto incrementale:

$$\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}=\frac{1}{h}\log_a\frac{x+h}{x}=\frac{1}{h}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

si può anche scrivere (cfr. art. 611) ponendo $\frac{h}{x}=\varepsilon$:

$$\frac{1}{x}\cdot\frac{\log_a(1+\varepsilon)}{\varepsilon}=\frac{1}{x\log_e a}\cdot\frac{\log_e(1+\varepsilon)}{\varepsilon},$$

cosicchè si ha subito (art. 641):

$$\lim_{h=0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}=\frac{1}{x\log_e a}.$$

Dunque: *la funzione* $\log_a$x *ha per derivata l'unità divisa per* x *e per il logaritmo naturale di* a.

687. Se per un dato valore di x la derivata di $f(x)$ è diversa da zero, il rapporto incrementale $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, in cui supporremo ora che h sia un incremento positivo, tenderà, col tendere di h a zero, verso un limite determinato e diverso da zero, il cui valore è $f'(x)$. Pertanto, se $f'(x)$ è positiva, la differenza $f(x+h)-f(x)$ dovrà essere positiva per tutti i valori abbastanza piccoli di h, e dovrà invece per tutti i valori abbastanza piccoli di h essere negativa, se $f'(x)$ ha valore negativo. In altri termini: per tutti i valori positivi abbastanza piccoli di h si ha algebricamente:

$$f(x+h)>f(x),\quad \text{ovvero}\quad f(x+h)<f(x)$$

risp. secondochè:

$$f'(x) > 0, \quad \text{ovvero} \quad f'(x) < 0.$$

688. Nel primo caso è chiaro che, facendo crescere algebricamente il valore di x, crescerà anche il valore della funzione $f(x)$; nel secondo all'opposto la $f(x)$ decrescerà col crescere di x. Il risultato dell'art. precedente si può dunque anche enunciare più brevemente dicendo che: *il valore di* f(x) *cresce o decresce col crescere di* x, *secondochè* f'(x) *ha valore positivo o negativo.*

Note ed Esercizi.

1. Trovare le derivate delle funzioni:

$$\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}, \dots .$$

2. La derivata di x^α è data da $\alpha x^{\alpha-1}$, qualunque sia α, come già sappiamo pel caso di α intero e positivo.

3. Riconoscere, in base alla definizione stessa di derivata, che se una funzione di x ammette la derivata per un certo valore a di x, essa è anche continua nel punto a.

4. *Se una funzione* f(x), *della variabile reale* x, *ammette una derivata finita e determinata per ogni valore di* x *compreso fra* a *ed* a + h, *si ha*:

$$f(a+h) - f(a) = h f'(a + \theta h), \quad 0 < \theta < 1.$$

Omettiamo la dimostrazione di questa formola che lo studioso troverà data nelle prime pagine di ogni trattato di calcolo infinitesimale.

5. Da questa formola segue manifestamente che: *se una funzione di variabile reale ha la derivata nulla per tutti i valori di* x *compresi fra* a *e* b, *il suo valore è costante in questo intervallo.*

§ 8.° — Derivata della somma, del prodotto e del quoto di due funzioni.

689. *La derivata della somma di due o più funzioni (ciascuna delle quali ammetta una derivata) è uguale alla somma delle derivate delle singole funzioni.*

Sia infatti:

$$F(x) = \varphi(x) + \psi(x)$$

data come somma di due funzioni $\varphi(x)$ e $\psi(x)$. Si avrà:

$$F(x+h) = \varphi(x+h) + \psi(x+h),$$

onde:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} + \frac{\psi(x+h) - \psi(x)}{h}$$

e passando al limite per $h = 0$, nell'ipotesi che ciascuna delle due funzioni $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ ammetta una derivata:

$$\lim_{h=0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h=0} \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} + \lim_{h=0} \frac{\psi(x+h) - \psi(x)}{h},$$

cioè appunto (art. 684):

$$F'(x) = \varphi'(x) + \psi'(x).$$

690. *Per formare la derivata del prodotto di due funzioni, si moltiplica la prima funzione per la derivata della seconda, quindi la seconda per la derivata della prima, e si fa poi la somma dei due risultati.*

Sia infatti:

$$F(x) = \varphi(x) \cdot \psi(x).$$

Dando ad x l'incremento h si ha:

$$F(x+h) = \varphi(x+h) \cdot \psi(x+h),$$

onde:

$$F(x+h) - F(x) = \varphi(x+h)\,\psi(x+h) - \varphi(x)\,\psi(x)$$

$$= [\varphi(x+h) - \varphi(x)]\varphi(x+h) + [\psi(x+h) - \psi(x)]\varphi(x)$$

e dividendo per h:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}\,\psi(x+h) + \frac{\psi(x+h) - \psi(x)}{h}\,\varphi(x),$$

e passando al limite per $h=0$, nell'ipotesi che $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ ammettano una prima derivata:

$$\lim_{h=0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h=0} \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} \cdot \lim_{h=0} \psi(x+h)$$

$$+ \lim_{h=0} \frac{\psi(x+h) - \psi(x)}{h} \cdot \varphi(x).$$

691. Corollario. — *La derivata del prodotto di una funzione per un fattore costante è uguale al fattore costante moltiplicato per la derivata della funzione.*

Infatti la derivata di una costante è evidentemente nulla.

692. La regola si estende facilmente ad un prodotto di n funzioni. Sia p. es. il prodotto di tre funzioni:

$$F(x) = \varphi(x) \cdot \psi(x) \cdot \chi(x). \tag{1}$$

Considerandolo come un prodotto di due sole funzioni, cioè scrivendo:

$$F(x) = [\varphi(x)\,\psi(x)] \cdot \chi(x),$$

si ha per la regola dell' art. precedente:

$$F'(x) = [\varphi(x)\,\psi(x)] \cdot \chi'(x) + [\varphi(x)\,\psi(x)]' \cdot \chi(x).$$

Ma per la stessa regola si ha poi:

$$[\varphi(x)\,\psi(x)]' = \varphi'(x)\,\psi(x) + \varphi(x)\,\psi'(x),$$

onde si conchiude:

$$F'(x) = \varphi'(x)\,\psi(x)\,\chi(x) + \varphi(x)\,\chi'(x)\,\psi(x) + \varphi(x)\,\chi(x)\,\psi'(x). \tag{2}$$

Si vede dunque in generale che: *la derivata di un prodotto di* n *funzioni è uguale alla somma di* n *prodotti che si ottengono moltiplicando successivamente la derivata di ogni fattore per i rimanenti* (n — 1) *fattori.*

693. Se dividiamo entrambi i membri di (2) per $F(x)$ e teniamo presente la (1), troviamo:

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} + \frac{\psi'(x)}{\psi(x)} + \frac{\chi'(x)}{\chi(x)}.$$

In generale, se $F(x) = \varphi(x)\,\psi(x)\,\chi(x)\ldots\theta(x)$, si avrà:

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} + \frac{\psi'(x)}{\psi(x)} + \frac{\chi'(x)}{\chi(x)} + \ldots + \frac{\theta'(x)}{\theta(x)}. \tag{3}$$

694. La derivata della potenza n^{ma} (n intero e positivo) di una funzione $f(x)$ si calcolerà, colla stessa regola dell'art 692, considerando la potenza n^{ma} come il prodotto di n fattori tutti eguali ad $f(x)$.

Evidentemente si otterrà:

$$[f(x)^n]' = n \cdot f(x)^{n-1} \cdot f'(x).$$

695. *Se* $F(x) = \dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ *è data come quoziente di due funzioni* $\varphi(x)$ *e* $\psi(x)$, *la sua derivata è espressa da*

$$F'(x) = \frac{\varphi'(x)\,\psi(x) - \varphi(x)\,\psi'(x)}{[\psi(x)]^2}. \tag{4}$$

Invero, poichè:

$$F(x+h) - F(x) = \frac{\varphi(x+h)}{\psi(x+h)} - \frac{\varphi(x)}{\psi(x)},$$

si può scrivere, facendo sparire i denominatori:

$$\begin{aligned} &\psi(x+h)\psi(x)[F(x+h) - F(x)] \\ &= \varphi(x+h)\psi(x) - \psi(x+h)\varphi(x) \\ &= [\varphi(x+h) - \varphi(x)]\psi(x) - [\psi(x+h) - \psi(x)]\varphi(x) \end{aligned}$$

d'onde:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\dfrac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}\psi(x) - \dfrac{\psi(x+h)-\psi(x)}{h}\varphi(x)}{\psi(x+h)\psi(x)}$$

la qual formola si converte precisamente nella (4), quando si passi al limite per $h = 0$.

Note ed Esercizi.

1. Essendo le f_i, φ_i, ψ_i funzioni di x, dimostrare che:

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \\ \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 \end{vmatrix}' = \begin{vmatrix} f'_1 & f_2 & f_3 \\ \varphi'_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \\ \psi'_1 & \psi_2 & \psi_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1 & f'_2 & f_3 \\ \varphi_1 & \varphi'_2 & \varphi_3 \\ \psi_1 & \psi'_2 & \psi_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f'_3 \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi'_3 \\ \psi_1 & \psi_2 & \psi'_3 \end{vmatrix}$$

ed enunciare similmente la regola generale per la derivazione di un determinante di ordine n.

2. Applicando questa regola di derivazione (rispetto alla variabile x_1) all' identità:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{vmatrix} = (x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_4-x_1)(x_3-x_2)(x_4-x_2)(x_4-x_3)$$

dedurne l' identità:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 2x_1 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ 3x_1^2 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{vmatrix} = \Delta \left\{ \frac{1}{x_1-x_2} + \frac{1}{x_1-x_3} + \frac{1}{x_1-x_4} \right\}.$$

Indicando poi con Δ_i la derivata di Δ rispetto ad x_i, dimostrare che:

$$\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 = 0.$$

3. Teorema di Leibnitz. — *Se* u *e* v *sono due funzioni della variabile* x, *la derivata* n^{esima} *del loro prodotto è data da*

$$(uv)^{(n)} = uv^{(n)} + \binom{n}{1} u^{(n-1)} v' + \binom{n}{2} u^{(n-2)} v'' + \ldots + uv^{(n)}. \qquad (\alpha)$$

Si troverà infatti dapprima:

$$(uv)' = uv' + u'v$$

e poi derivando una seconda volta:

$$(uv)'' = uv'' + 2u'v' + u''v$$

e derivando una terza volta:

$$(uv)''' = uv''' + 3u'v'' + 3u''v + u'''v.$$

Queste espressioni essendo conformi alla (α), i cui coefficienti numerici sono gli stessi che si presenterebbero nello sviluppo di $(u+v)^n$, la validità della formola (α) si potrà stabilire col noto metodo d'induzione matematica.

4. Trovare la derivata n^{esima} del prodotto x^2a^x e così pure quella del prodotto x^3a^x, essendo a una costante.

5. Dalla Nota 5ª del precedente § segue come corollario che: *se due funzioni hanno la stessa derivata per tutti i valori di* x *contenuti in un certo intervallo, la loro differenza è costante in tutto l'intervallo.*

Invero, se $f(x)$ e $\varphi(x)$ sono le due funzioni in discorso, la loro differenza $f(x)-\varphi(x)$ ha per derivata $f'(x)-\varphi'(x)$, cioè lo zero.

§ 8.º — Sulla multiplicità delle radici di un'equazione.

696. Se $f(x)$ è una funzione razionale intera, a coefficienti reali, di x ed α è una radice dell'equazione:

$$f(x) = 0, \tag{1}$$

si dimostrerà con procedimento identico a quello degli articoli 491 e 493 che il polinomio $f(x)$ è divisibile esattamente per $x-\alpha$.

Può però accadere che $f(x)$ sia divisibile non solamente per $x-\alpha$, ma anche per $(x-\alpha)^2$, ovvero anche per $(x-\alpha)^3$, ecc. In questi casi si dice che α è una radice *multipla* dell'equazione (1). E precisamente, se $(x-\alpha)^k$ è la più alta potenza di $x-\alpha$ che divide $f(x)$, si dice che α è una radice *multipla del grado* k o anche che *l'equazione* (1) *ammette* k *radici tutte eguali ad* α.

Se α non è radice multipla, cioè se $f(x)$ è divisibile per $(x-\alpha)$, ma non per $(x-\alpha)^2$, si dirà che α è radice *semplice* di $f(x)=0$.

697. Se nello sviluppo (cfr. art. 505):

$$f(x) = f(\alpha) + (x-\alpha)\frac{f'(\alpha)}{\lfloor 1} + (x-\alpha)^2\frac{f''(\alpha)}{\lfloor 2} + \dots \tag{2}$$

che vale qualunque siano i valori di x e di α, supponiamo che α sia radice non solo dell'equazione $f(x)=0$, ma anche della sua derivata $f'(x)=0$, o più generalmente di un certo numero di derivate, cosicchè si abbia:

$$f(\alpha)=0\,,\ f'(\alpha)=0\,,\ \dots,\ f^{(k-1)}(\alpha)=0\,,\ f^{(k)}(\alpha)\gtrless 0,$$

esso ci da per $f(x)$, qualunque sia x:

$$f(x) = (x-\alpha)^k\left\{\frac{f^{(k)}(\alpha)}{\lfloor k} + (x-\alpha)\frac{f^{(k+1)}(\alpha)}{\lfloor k+1} + \dots\right\}$$

dove l'espressione fra parentesi è una funzione intera di x del grado $n-k$. Quest'identità ci dice che il primo membro $f(x)$ dell'equazione $f(x)=0$ è divisibile esattamente per $(x-\alpha)^k$, cioè anche, per la definizione data all'art. prec., che α è una radice multipla, del grado k, dell'equazione $f(x)=0$.

698. Passiamo ora a dimostrare che, reciprocamente, se α è radice multipla di grado k dell'equazione $f(x)=0$, essa dovrà altresì essere radice delle prime $k-1$ derivate. Infatti, se α è radice doppia di $f(x)=0$, dovrà $f(x)$ essere divisibile esattamente per $(x-\alpha)^2$. Ma, essendo $f(\alpha)=0$, la (2) ci da:

$$\frac{f'(\alpha)}{1} + \frac{f''(\alpha)}{\lfloor 2}(x-\alpha) + \frac{f'''(\alpha)}{\lfloor 3}(x-\alpha)^2 + \dots$$

come quoziente della divisione di $f(x)$ per $(x-\alpha)$; onde questo quoziente dev'essere ancora divisibile per $x-\alpha$, ossia, che è la stessa cosa, deve annullarsi per $x=\alpha$. Ciò avviene evidentemente sol quando sia $f'(\alpha)=0$, cioè quando α sia anche radice di $f'(x)=0$. Il quoziente di $f(x)$ per $(x-\alpha)^2$ è allora:

$$\frac{f''(\alpha)}{\lfloor 2} + \frac{f'''(\alpha)}{\lfloor 3}(x-\alpha) + \frac{f^{\text{IV}}(\alpha)}{\lfloor 4}(x-\alpha)^2 + \ldots .$$

Se α è soltanto radice doppia di $f(x)=0$, questo quoziente non sarà più divisibile per $(x-\alpha)$, ma se α è radice tripla, esso dovrà ancora esserlo; cioè dovrà annullarsi se in esso facciamo $x=\alpha$, e ciò richiede che sia $f''(\alpha)=0$. Così procedendo si vede che, se α è radice quadrupla, dovrà essere anche $f'''(\alpha)=0$, e così di seguito.

Concludiamo dunque che: *affinchè una certa radice* α, *di una equazione* $f(x)=0$, *sia radice multipla di grado* k, *è necessario e sufficiente che essa sia anche radice delle prime* $k-1$ *equazioni derivate*:

$$f'(x)=0\,,\ f''(x)=0\,,\ \ldots,\ f^{(k-1)}(x)=0. \tag{3}$$

699. Di qui segue come corollario il teorema equivalente: *affinchè* α *sia radice multipla del grado* k *di un'equazione, è necessario e sufficiente che* α *sia anche radice multipla del grado* $k-1$ *della sua prima derivata.*

Infatti, se α è radice multipla del grado k di $f(x)=0$, essa soddisfa per il teorema dell' art. prec. a tutte le (3) le quali, per quello stesso teorema, ci dicono che α è radice multipla, del grado $k-1$, di $f'(x)=0$; ecc.

700. Tutto quanto si è stabilito o definito al Cap. IV (articoli 541-546) circa la divisibilità delle funzioni intere a coefficienti razionali si estende senz'altro anche alle funzioni intere con coefficienti reali.

Ciò posto, è agevole riconoscere che *se le funzioni intere* $f(x)$ *ed* $f'(x)$ *sono prime fra loro, le radici di* $f(x)=0$ *sono necessariamente tutte semplici* (*). Infatti, se $f(x)$ ammettesse una radice multipla α, le due funzioni $f(x)$ ed $f'(x)$ avrebbero il divisore comune $(x-\alpha)$, e non sarebbero quindi prime fra loro, contro il supposto.

701. *Se* $D(x)$ *sia il massimo comun divisore,* che si determinerà col procedimeato dell'art. 545, *di* $f(x)$ *e di* $f'(x)$, *e sia*:

$$f(x)=D(x)\cdot F(x), \tag{4}$$

le radici reali di $f(x)=0$ *saranno anche radici dell' equazione*

(*) La proposizione reciproca, che non sarebbe vera nel campo dei numeri reali, è vera invece, come si riconoscerà a suo tempo, nel campo più esteso dei numeri complessi. In quest'ultimo campo si potrà asserire che *affinchè l'equazione* $f(x)=0$ *abbia soltanto radici semplici, è necessario e sufficiente che* $f(x)$ *ed* $f'(x)$ *siano prime fra loro.*

$F(x) = 0$ *la quale avrà però il vantaggio di avere soltanto radici semplici.*

Sia infatti α una radice semplice o multipla di grado k, dell'equazione $f(x) = 0$. Poichè $f(x)$ è divisibile per $(x-\alpha)^k$, dovrà, in virtù dell'identità (4), il prodotto:

$$D(x)\,F(x)$$

essere divisibile per $(x-\alpha)^k$. Di qui si vede che se α non fosse radice di $F(x)=0$, cioè se $F(x)$ non fosse affatto divisibile per $x-\alpha$, dovrebbe essere divisibile per $(x-\alpha)^k$ il fattore $D(x)$; e quindi dovrebbe essere divisibile per $(x-\alpha)^k$ anche $f'(x)$, di cui $D(x)$ è divisore. Invece $f'(x)$ è divisibile soltanto (art. 699) per $(x-\alpha)^{k-1}$.

Supponiamo in secondo luogo, se è possibile, che α non fosse radice semplice di $F(x) = 0$. Sarebbe allora $F(x)$ divisibile almeno per $(x-\alpha)^2$ e quindi poichè $D(x)$ è divisibile per $(x-\alpha)^{k-1}$ (che divide simultaneamente $f(x)$ ed $f'(x)$ e per conseguenza anche il loro massimo comun divisore), il prodotto $D(x)\cdot F(x)$, cioè $f(x)$, esser dovrebbe divisibile per $(x-\alpha)^{k-1}(x-\alpha)^2$, ossia per $(x-\alpha)^{k+1}$, contro il supposto.

Nota.

1. Noi abbiamo dato la definizione di radice multipla di $f(x) = 0$ soltanto nel caso in cui $f(x)$ è una funzione razionale intera. È però facile di vedere come quella definizione si possa estendere ad una funzione qualunque $f(x)$ che sia continua nel punto $x = a$. Se col tendere di x ad a il quoto:

$$\frac{f(x)}{(x-a)^k}$$

tende ad un valore finito e diverso da zero, si dirà che a è radice multipla di grado k dell'equazione $f(x) = 0$.

Se $f(x)$ ammette le prime $k-1$ derivate, si potrà dunque porre:

$$f(x) = (x-a)^k \varphi(x) \qquad (\alpha)$$

dove $\varphi(x)$ è pure continua ed ammette le prime $k-1$ derivate per $x = a$. Derivando ora la (α) colla regola del prodotto $k-1$ volte di seguito, si riconoscerà subito dover essere simultaneamente:

$$f(a) = 0\ ,\ f'(a) = 0\ ,\ f''(a) = 0\ ,\ \ldots\ ,\ f^{(k-1)}(a) = 0,$$

e, se $f(x)$ ammetta anche la k^{esima} derivata:

$$f^{(k)}(a) \gtrless 0.$$

§ 9.° — Interpretazione geometrica di una funzione e della sua prima derivata.

702. Sia $y = f(x)$ una funzione data di x per tutti i valori reali di x, o almeno per tutti i valori di x compresi entro certi limiti. Se interpretiamo ogni valore di x ed il corrispondente valore di y risp. come l'ascissa e l'ordinata di un punto P del piano, vediamo che, variando x da $-\infty$ a $+\infty$, il punto P varierà nel piano de-

scrivendo una certa curva che si potrà considerare come la rappresentazione geometrica della funzione $f(x)$.

703. Ciò premesso, passiamo a ricercare l'interpretazione geometrica della prima derivata $f'(x)$, che è definita (art. 684) dalla formola:

$$f'(x) = \lim_{h=0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

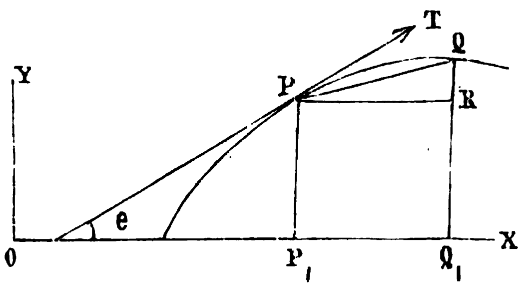
Siano P e Q i due punti della curva rappresentante $f(x)$ che hanno risp. per ascissa:

$$OP_1 = x \quad \text{ed} \quad OQ_1 = x + h.$$

Tirata da P la parallela all'asse delle x, sia R il punto in cui essa incontra la Q_1Q.

Si avrà evidentemente:

$$RQ = Q_1Q - P_1P = f(x+h) - f(x)$$



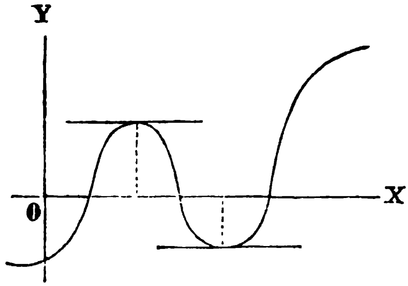
$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{PQ}{PR} = \operatorname{tg}\varphi,$$

e quindi: detto φ l'angolo QPR, per una nota proprietà dei triangoli rettangoli (giacchè noi supponiamo i due assi OX, OY ortogonali).

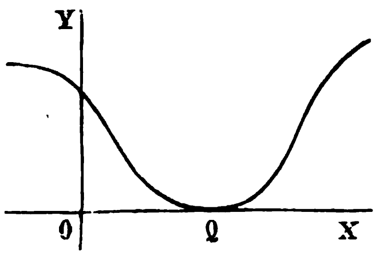
Facendo ora tendere h verso zero, è chiaro che il punto Q_1 si avvicinerà sempre più a P_1 ed il punto Q al punto P; onde la retta PQ tenderà a confondersi colla tangente PT alla curva nel punto P e l'angolo φ coll'angolo θ che questa tangente PT fa colla direzione positiva dell'asse delle x. Si avrà dunque al limite $f'(x) = \operatorname{tg}\theta$, cioè: *la prima derivata* $f'(x)$ *è uguale alla tangente trigonometrica dell'angolo* θ *che la tangente alla curva nel punto di ascissa* x *forma colla direzione positiva dell'asse delle* x.

704. Perchè sia $f'(x) = 0$, dev'essere $\operatorname{tg}\varphi = 0$, cioè la retta PT deve riuscire parallela all'asse delle X. Di qui è facile dedurre, mediante la stessa intuizione geometrica che quei valori di x pei

quali la corrispondente ordinata $y = f(x)$ prende i valori massimi o minimi, sono altrettante radici della prima derivata di $f(x)$.



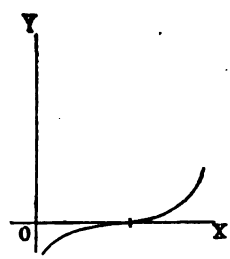
705. Se la curva toccasse in un punto Q l'asse OX, il numero x che misura il segmento OQ, non sarebbe dunque solamente radice dell' equazione $f(x) = 0$, ma altresì dell' equazione $f'(x) = 0$. Esso sarebbe dunque (cfr. art. 697) una radice doppia di $f(x) = 0$. È questa la giustificazione della locuzione usata dai geometri che,



cioè, in questo caso *la curva incontra la retta* OX *in due punti infinitamente vicini* (riuniti in Q).

Note ed Esercizi.

1. Riconoscere (cfr. la nota del precedente §) che se la curva rappresentante la funzione $f(x)$ tocca l'asse OX nel punto Q in modo da attraversarlo (come è significato dalla figura qui accanto), l'ascissa del punto Q è almeno radice tripla dell'equazione $f(x) = 0$.



2. Verificare che il polinomio $x^3 - 2x + 1$ acquista un valore massimo per $x = -\sqrt{\frac{2}{3}}$ ed un valore minimo per $x = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

§ 10.º — Limite di una progressione infinita di punti analitici di specie n.

706. Sia:

$$P', P'', P''', \ldots, \tag{1}$$

una progressione infinita di punti analitici, di specie n, appartenenti al campo generale $x_1, x_1, \ldots, x_n$. Si dirà che essa ha per *limite* un certo punto Π, se la distanza (cfr. art. 663) fra il punto Π ed un punto qualunque $P^{(i)}$ della progressione tende allo zero col crescere dell'apice i all'infinito.

Cioè, se $a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, \ldots, a_n^{(i)}$ sono i valori di $x_1, x_2, \ldots, x_n$ che definiscono il punto $P^{(i)}$ (le coordinate di $P^{(i)}$) ed $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sono le coordinate di Π, si dovrà avere:

$$\lim_{i=\infty} \{ (a_1^{(i)} - \alpha_1)^2 + (a_2^{(i)} - \alpha_2)^2 + \ldots + (a_n^{(i)} - \alpha_n)^2 \} = 0 \tag{2}$$

e quindi, a maggior ragione, poichè i quadrati nel primo membro sono numeri positivi:

$$\begin{aligned} &\lim_{i=\infty} a_1^{(i)} = \alpha_1 \\ &\lim_{i=\infty} a_2^{(i)} = \alpha_2 \\ &\ldots\ldots \\ &\lim_{i=\infty} a_n^{(i)} = \alpha_n. \end{aligned} \tag{3}$$

Reciprocamente, se sono soddisfatte le (3), sarà evidentemente soddisfatta anche la (2), cioè il punto $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ sarà il limite della (1). Pertanto possiamo anche dire che *affinchè il punto* $(a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, \ldots, a_n^{(i)})$ *abbia per limite, col crescere di* i *all'infinito, il punto* $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, *è necessario e sufficiente che la coordinata* $a_1^{(i)}$ *abbia per limite la coordinata* α_1, *la coordinata* $a_2^{(i)}$ *abbia per limite la* α_2, ecc.

707. *Affinchè una progressione infinita di punti analitici* $P', P'', \ldots$ *ammetta un limite finito, è necessario e sufficiente che, fissato a piacere il numero positivo* ε, *esista un indice* k *tale che la distanza fra il punto* $P^{(k)}$ *ed uno qualunque dei successivi* $P^{(k+1)}, P^{(k+2)}, \ldots$ *sia inferiore ad* ε.

Abbiamo infatti dimostrato testè che, affinchè la successione (1) ammetta un limite, è necessario e sufficiente che ammetta un limite ciascuna delle n progressioni di numeri reali:

$$\begin{aligned} &a_1', a_1'', a_1''', \ldots \\ &a_2', a_2'', a_2''', \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &a_n', a_n'', a_n''', \ldots. \end{aligned} \tag{4}$$

È dunque necessario (art. 586) che, scelto a piacere ε, esista un indice k tale da soddisfare le disuguaglianze:

$$\begin{aligned} &|a_1^{(k)} - a_1^{(k+h)}| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \\ &|a_2^{(k)} - a_2^{(k+h)}| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \qquad , h = 1,\ 2,\ 3, \ldots \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ &|a_n^{(k)} - a_n^{(k+h)}| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \cdot \end{aligned}$$

Ma da queste disuguaglianze, sommate membro a membro, segue appunto:

$$(a_1^{(k)} - a_1^{(k+h)})^2 + (a_2^{(k)} - a_2^{(k+h)})^2 + \ldots + (a_n^{(k)} - a_n^{(k+h)})^2 < \varepsilon^2, \quad (5)$$
$$h = 1,\ 2,\ 3, \ldots,$$

cioè che la distanza fra il punto $P^{(k)}$ ed uno qualunque dei successivi è inferiore ad ε. Reciprocamente, dalla diseguaglianza (5) segue a maggior ragione:

$$|a_1^{(k)} - a_1^{(k+h)}| < \varepsilon, \ldots, |a_n^{(k)} - a_n^{(k+h)}| < \varepsilon, \qquad \text{per } h=1,\ 2,\ 3, \ldots$$

le quali ci dicono (art. 586) che ognuna delle progressioni (4) ammette un limite. L'asserto resta così dimostrato.

708. Teorema. — *Sia* C′, C″, C‴, . . . *una progressione infinita di campi analitici di specie* n, *ognuno dei quali sia contenuto nel precedente. Supponiamo inoltre che, per ogni numero positivo* ε, *esista un campo* $C^{(k)}$ *tale che la distanza fra due qualunque dei suoi punti sia inferiore ad* ε. *Esisterà allora un punto, unico e ben determinato,* Π *il quale godrà della proprietà di essere punto interno, o almeno punto di confine, rispetto a ciascuno degli infiniti campi* C′, C″, ...

Si scelga infatti, secondo una legge da fissarsi ad arbitrio, una progressione infinita di punti P′, P″, P‴, . . . contenuti risp. nei campi C′, C″, C‴, ... Scelto a piacere un numero positivo ε, esisterà fra i punti P′, P″, . . . , per la seconda ipotesi fatta, un punto $P^{(k)}$ la cui distanza da ogni altro punto del campo $C^{(k)}$ sia inferiore ad ε. Sarà quindi inferiore ad ε la distanza fra $P^{(k)}$ ed uno qualunque dei punti $P^{(k+1)}$, $P^{(k+2)}$, . . . , i quali, in virtù della prima ipotesi, sono tutti contenuti in $C^{(k)}$. La progressione P′, P″, . . . ammetterà dunque un limite Π, il quale dimostreremo ora essere punto interno o almeno punto di confine per uno qualunque, p. es. $C^{(i)}$, dei campi dati.

A tale oggetto basterà dimostrare, che, fissato a piacere un numero positivo δ, esiste in $C^{(i)}$ qualche punto la cui distanza da Π è inferiore a δ. In effetto, poichè la progressione P′, P″, . . . ha per limite Π, esiste un indice k, maggiore di i, tale che il punto

$P^{(k)}$ disti da Π per meno di δ; ed, essendo $k > i$, il punto $P^{(k)}$ fa parte, per la prima delle due ipotesi, del campo $C^{(i)}$.

Nota.

L'insieme dei punti della progressione P', P'', P''', ... forma un campo di specie n, i cui elementi, oltre ad essere *ordinati*, cioè disposti in un ordine di successione ben determinato, si fanno corrispondere univocamente ai numeri naturali 1, 2, 3, ... Si può però facilmente concepire l'esistenza di un campo ordinato per il quale non sia possibile stabilire una cosiffatta corrispondenza. In tal caso il campo ordinato non si chiamerà più *progressione*, ma soltanto *successione* di punti di specie n. Il lettore vedrà facilmente come si debba definire il limite di una successione di specie n, e come i teoremi dimostrati in questo § si estendano quasi immediatamente, cioè senza modificazioni essenziali nelle dimostrazioni, anche ai limiti delle successioni, di cui le progressioni non sono che un caso particolare.

§ 11.° — Continuità delle funzioni di più variabili reali.

709. Sia

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

una funzione (cfr. Cap. IV, art. 400) delle n variabili reali x_1, $x_2, \ldots, x_n$, e C un campo, di specie n, contenuto nel campo generale $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Si dice che la funzione y è *data, univocamente*, nel campo C, quando per ogni punto del campo C è dato, in modo unico e ben determinato, il corrispondente valore di y.

Se ora $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ è un punto situato nell'interno (o anche sul contorno) del campo C, si dice che tale funzione è *continua in questo punto di* C se, preso a piacere il numero positivo δ, esiste un numero positivo ε tale che per ogni punto $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ di C, la cui distanza da $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ sia inferiore ad ε, si abbia:

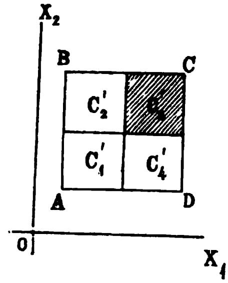
$$|f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n)| < \delta.$$

710. *Se la funzione* $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *è data ed è continua in ogni punto del campo finito* C, *essa si mantiene necessariamente finita entro questo campo, semprechè i punti di confine di* C *facciano parte del campo* (*cioè siano anche punti di contorno di* C).

Quando diciamo che una funzione *si mantiene finita* o *resta finita* entro il campo C, intendiamo significare l'esistenza di un numero positivo L, tale che il valore assoluto di qualsiasi valore preso dalla funzione nel campo C sia inferiore ad L. O, in altri termini (cfr. art. 664), che il campo, di prima specie, costituito dai valori assunti dalla funzione nel campo C, è un campo finito.

Per dimostrare il teorema ora enunciato, supporremo, per meglio fissare le idee, che il campo C sia di seconda specie. Imaginiamo anche, per rendere la dimostrazione più intuitiva, che il punto (x_1, x_2) di C sia rappresentato da quel punto del piano che, rispetto a certi due assi coordinati OX_1, OX_2, ha per ascissa x_1 e per ordinata x_2. Poichè il campo C è finito, esisterà un quadrato ABCD nella cui area siano contenuti tutti i punti di C.

Dividendo il quadrato in quattro parti mediante le parallele condotte dal centro ai lati, anche il campo C si verrà a scindere in quattro campi C'_1, C'_2, C'_3, C'_4 contenuti risp. nei quattro quadrati più piccoli; ed è chiaro che ammesso, se è possibile, che la funzione $f(x_1, x_2)$ non restasse finita nel campo C, essa dovrebbe divenire infinita almeno in uno dei quattro nuovi campi, p. es. in C'_3. Diviso ora allo stesso modo il quadrato in cui cade C'_3 in quattro quadrati più piccoli, anche il campo C'_3 si scinderà in quattro campi C''_1, C''_2, C''_3, C''_4 in uno almeno dei quali, p. es. C''_1, la funzione $f(x_1, x_2)$ non resterà finita. Così procedendo si verrà a costruire una progressione infinita di campi:



$$C, C', C'', C''', \ldots \qquad (1)$$

ognuno dei quali è contenuto nel precedente e tali che la distanza fra due punti qualunque di $C^{(i)}$ è piccola quanto si vuole, purchè si prenda l'indice i abbastanza grande. Esisterà dunque (articolo 708) un punto ben determinato P il quale è punto interno, o almeno di confine, per ognuno dei campi (1), cosicchè, se a_1, a_2 sono le coordinate di P, la funzione $f(x_1, x_2)$ è continua nel punto (a_1, a_2), nel quale assume il valore $f(a_1, a_2)$ rispetto ad ognuno degl'infiniti campi (1).

Si avrà dunque, purchè si scelga l'indice i abbastanza grande,

$$|f(x_1, x_2) - f(a_1, a_2)| < 1$$

per tutti i punti (x_1, x_2) contenuti in $C^{(i)}$, giacchè questi punti, per i abbastanza grande, distano di quanto poco si vuole dal punto (a_1, a_2). Per tutti i punti di $C^{(i)}$ la funzione $f(x_1, x_2)$ avrebbe dunque un valore compreso fra $f(a_1, a_2) + 1$ ed $f(a_1, a_2) - 1$, cioè si manterrebbe finita, contro quanto si è ammesso. Il teorema è dunque dimostrato.

711. Per $n = 1$ il teorema testè dimostrato ricade in quello dell'art. 675. E la dimostrazione di indole affatto generale da noi quì data prende la forma semplicissima della dimostrazione data in quell' articolo.

Note.

1. La nozione di funzione dei punti di un campo di specie n non è che un caso particolare della nozione di corrispondenza fra i punti $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ di un campo C di specie n ed i punti $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ di un campo Γ di specie m. La corrispondenza si dice *bi-univoca* (o *univoca* nel senso assoluto della parola) quando ad ogni punto C corrisponde un unico punto di Γ e reciprocamente. Se si sappia soltanto, come nel caso considerato

dianzi, che ad ogni punto di C corrisponda un unico punto di Γ, la corrispondenza si dirà *univoca rispetto al campo* Γ.

2. Supposto che ad ogni punto P di G corrisponda un unico punto Q di Γ, tale corrispondenza si dirà *continua nel punto* P se, fissato a piacere il numero positivo δ, esista un numero positivo ε tale che ad ogni punto di C la cui distanza da P sia inferiore ad ε corrisponda un punto di Γ la cui distanza da Q sia inferiore a δ.

§ 12.º — Altri teoremi sulle funzioni continue di più variabili reali.

712. Teorema. — *Sia* $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *una funzione data e continua in ogni punto situato nell' interno o sul confine di un certo campo finito* C. *Sia poi* h *un certo numero ben determinato, tale che scelto a piacere il numero positivo* ε, *esista nel campo* C *almeno un punto* $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *pel quale sia*:

$$|f(x_1, x_2, \dots, x_n) - h| < \varepsilon.$$

Esisterà allora anche, entro il campo C, *un punto nel quale la funzione assume precisamente il valore* h.

In altri termini, se il valore h può essere *avvicinato indefinitamente* mediante valori di $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, esso può anche essere *raggiunto*.

Diviso infatti, precisamente come all' art. 710, il campo C nei quattro campi più piccoli C'_1, C'_2, C'_3, C'_4, è chiaro che il valore h potrà essere avvicinato indefinitamente mediante i valori assunti da $f(x_1, x_2)$ in uno di questi campi, p. e. nel campo C'_3; poichè altrimenti esso non potrebbe essere avvicinato indefinitamente neanche nel campo C. Diviso poi a sua volta il campo C'_3 nei quattro campi $C''_1, C''_2, C''_3, C''_4$, dovrà h essere avvicinabile indefinitamente anche coi soli valori assunti da $f(x_1, x_2)$ in uno almeno di essi, p. es. in C''_1. Così procedendo si verrà a costruire una progressione infinita di campi $C, C', C'', C''', \dots$, ognuno dei quali è contenuto nel precedente e tali che la distanza fra due punti qualunque di $C^{(i)}$ sia inferiore ad un numero fissato piccolo a piacere, purchè si scelga opportunamente l' indice i. Siano a_1, a_2 le coordinate del punto P che si trova (art. 708) nell'interno o sul confine di ognuno dei campi C, C′, C″,.... Poichè il punto P è evidentemente situato nell'interno o sul confine del campo C, la funzione data avrà in esso un valore ben determinato $f(a_1, a_2)$, e sarà in esso continua. In virtù della continuità, si avrà dunque per ogni punto (x_1, x_2) di $C^{(i)}$, purchè si sia scelto opportunamente l' indice i:

$$|f(x_1, x_2) - f(a_1, a_2)| < \varepsilon. \qquad (\alpha)$$

D' altra parte, poichè il valore h è avvicinabile indefinitamente mediante i punti di $C^{(i)}$, esisterà in $C^{(i)}$ un punto (y_1, y_2) pel quale sia:

$$|f(y_1, y_2) - h)| < \varepsilon \qquad (\beta)$$

e, siccome (y_1, y_2) appartiene al campo $C^{(i)}$, si avrà al tempo stesso, per la (α):

$$|f(y_1, y_2) - f(a_1, a_2)| < \varepsilon. \qquad (\gamma)$$

Dalle (β) e (γ) segue ora manifestamente:

$$|f(a_1, a_2) - h| < 2\varepsilon.$$

Questa disuguaglianza, dovendo sussistere per gli stessi valori di a_1, a_2 e di h comunque si scelga ε, ci dice che il suo primo membro è più piccolo di qualunque numero assegnabile. Esso è dunque rigorosamente uguale a zero, cioè si ha $f(a_1, a_2) = h$: con che resta dimostrato quanto si voleva.

713. *Se* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *è una funzione data univocamente in ogni punto di un certo campo* C, *entro il quale essa si mantiene finita, esiste un numero reale* b (*che si chiama il* LIMITE SUPERIORE *dei valori della funzione*) *il quale non è superato da alcuno dei valori assunti dalla funzione nel campo* C, *ma può essere da essi avvicinato a meno di tanto poco quanto si voglia.*

È questa una facile conseguenza del teorema dell'art. 672. Infatti, l'insieme dei valori assunti dalla funzione data nei punti di C costituisce, per ipotesi, un campo finito Γ di prima specie; per il quale esisterà quindi un estremo superiore b ed un estremo inferiore a. Il numero b, non essendo superato da alcun valore di Γ, sarà dunque uguale o maggiore ad ogni valore di f in C, e sarè avvicinabile indefinitamente dai punti di Γ, ossia appunto dai valori che f prende in C.

Similmente si vede che *il numero* a *è uguale o minore ad ogni valore di* f *in* C, *ma può essere avvicinato dai valori di* f *in* C *a meno di tanto poco quanto si voglia*. Il numero a si chiamerà, analogamente a b, il *limite inferiore* dei valori assunti dalla funzione f nel campo C.

714. TEOREMA. — *Sia* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *una funzione data univocamente e continua in ogni punto situato nell'interno o sul confine di un certo campo finito* C. *Esisteranno, nell'interno o sul confine di* C, *un punto* $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ *ed un punto* $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ *tali che ogni valore assunto dalla funzione data sia maggiore od uguale ad* $f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ *e minore od uguale ad* $f(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$.

In altri termini: la funzione f non solamente ammette, come nel caso dell'art. prec., un limite inferiore a ed un limite superiore b, ma questi valori a e b possono anche essere effettivamente *raggiunti* dalla funzione risp. nel punto ben determinato $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ e nel punto $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$.

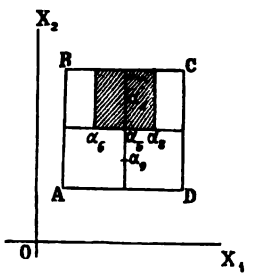
Per dimostrare ciò, cominciamo dall'osservare che la funzione f si mantiene (secondo il teorema dell'art. 710) necessariamente finita entro il campo C, inclusovi il confine. Esisteranno dunque, per l'art. prec., un limite inferiore a ed un limite superiore b, dei valori da essa assunti, i quali, potendo essere avvicinati indefinitamente dai valori di f, verranno anche raggiunti risp. in certi

due punti $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ e $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ di C, secondo il teorema dell'art. 712, giacchè la funzione f è continua così nell'interno, come sul confine di C.

Nota.

1. Teorema. — *Se* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *è una funzione data univocamente e continua in ogni punto del campo finito* C (*il cui confine faccia pure parte del campo stesso*), *fissato a piacere il numero positivo* δ, *esisterà un numero positivo* ε *tale che i valori assunti dalla funzione in due punti qualunque di* C *distanti fra loro per meno di* ε, *differiscano fra loro di una quantità inferiore in valore assoluto a* δ.

La dimostrazione si può fare modificando opportunamente il metodo, da noi ormai già più volte usato, di cui abbiamo dato il primo esempio nella dimostrazione dell'art. 710. Invece di considerare, come in quell'articolo, nel quadrato ABCD i soli quattro quadrati C'_1, C'_2, C'_3, C'_4, considereremo anche altri cinque quadrati $C'_5, C'_6, C'_7, C'_8, C'_9$ eguali fra loro e coi lati paralleli ai primi, aventi risp. i centri nei punti designati nella figura qui accanto colle lettere $\alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8, \alpha_9$. In questa figura è messa in evidenza, come esempio, l'area del quadrato C'_7. Ciò posto, supponiamo, se è possibile, che la proprietà da dimostrarsi non abbia luogo per il campo C e per una certa quantità prefissata δ. È facile, allora, di riconoscere che essa non avrà luogo, sempre per la stessa quantità prefissata δ, neanche quando il campo di variabilità del punto si ristringa ad uno, opportunamente scelto, dei nove campi $C'_1, C'_2, \ldots, C'_9$. Infatti, se essa avesse luogo per ognuno di essi, dando ad ε risp. certi valori $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_9$, è chiaro che, detto ε' il più piccolo dei nove numeri $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_9$, due punti di C distanti per meno di ε' cadrebbero *simultaneamente* almeno in uno dei nove quadrati $C'_1, C'_2, \ldots, C'_9$; cosicchè la differenza dei valori assunti in essi da f esser dovrebbe, in valore assoluto, inferiore a δ, contro il supposto.



Detto ora $\overline{C'}$ uno dei nove campi $\overline{C'_1}, \ldots, \overline{C'_9}$ formati risp. dai punti di C che si trovano nei nove quadrati $C'_1, \ldots, C'_9$, per il quale non sussiste, sempre rispetto al numero prefissato δ, la proprietà da dimostrarsi, si considereranno anche per $\overline{C'}$, analogamente a quanto si è fatto per C, i nove quadrati $C''_1, C''_2, \ldots, C''_9$ per uno almeno dei quali, p. es. per C'', non sussisterà, per la differenza δ, la proprietà da dimostrarsi. Si verrà dunque, così procedendo, a costruire la progressione infinita di campi:

$$C, \overline{C'}, \overline{C''}, \overline{C'''}, \ldots,$$

ognuno dei quali è contenuto nel precedente, con area tendente a zero, tali che in uno qualunque di essi si possono sempre trovare due punti, distanti fra loro di tanto poco quanto si vuole, per i quali i corrispondenti valori di f non differiscono di una quantità inferiore in valore assoluto a δ. Ma ciò è manifestamente in contraddizione coll'ipotesi che f sia continua nel punto P, di cui si è dimostrata l'esistenza (art. 708), che si trova nell'interno o sul confine di ognuno degli infiniti campi $C, \overline{C'}, \overline{C''}, \ldots$.

CAPITOLO IX.

PROPRIETÀ GENERALI DELLE EQUAZIONI A COEFFICIENTI REALI.

§ 1.° — Osservazioni preliminari.

715. In questo e nel seguente capitolo ci occuperemo specialmente di funzioni *razionali intere* a coefficienti reali e dei valori che esse assumono per valori reali della variabile.

Data una funzione intera $f(x)$ della variabile x di un certo grado n, essa può anche non essere *completa*, cioè può mancare di alcuni termini; in particolare potrà mancare dell'ultimo termine o dei due ultimi, ecc. riuscendo così divisibile esattamente per x, x^2, ecc. Sia in generale $A_p \cdot x^p (p \gtreqless 0)$ il termine di grado più basso ed $A_n x^n$ quello di grado più alto, cosicchè sarà:

$$f(x) = A_p x^p + A_{p+1} x^{p+1} + \ldots + A_n x^n. \qquad (1)$$

Per le cose già dimostrate è facile di riconoscere che:

1) *per tutti i valori abbastanza piccoli* (*positivi o negativi*) *di* x *il segno di* $f(x)$ *coincide col segno del termine di grado più basso* $A_p x^p$;

2) *per tutti i valori abbastanza grandi* (*positivi o negativi*) *di* x *il segno di* $f(x)$ *coincide col segno del suo termine di più alto grado* $A_n x^n$.

716. Scrivendo infatti la (1) come segue:

$$f(x) = x^p[A_p + A_{p+1}x + A_{p+2}x^2 + \ldots], \qquad (2)$$

osserviamo (cfr. art. 680) che, prendendo x abbastanza piccolo, il valore assoluto di

$$A_{p+1}x + A_{p+2}x^2 + \ldots$$

si può rendere piccolo a piacere ed in particolare si può rendere più piccolo del valore assoluto di A_p; onde per questi valori abbastanza piccoli di x il segno della somma:

$$A_p + [A_{p+1}x + A_{p+2}x^2 + \ldots]$$

dipenderà dal segno della prima parte A_p il cui valore assoluto prevale sul valore assoluto della seconda. Dunque nell' espres-

sione (2) di $f(x)$ il segno del fattore fra parentesi coinciderà col segno di A_p, epperò il segno di $f(x)$ coinciderà appunto col segno di $x^p \cdot A_p$.

717. Per dimostrare la seconda asserzione, si osservi che la funzione:

$$f(x) = A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + A_{n-2} x^{n-2} + \ldots$$

si può anche scrivere:

$$f(x) = x^n \cdot \left\{ A_n + A_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right) + A_{n-2}\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \ldots \right\}.$$

Ciò posto, poichè, crescendo sempre più il valore assoluto di x, il valore di $\left(\frac{1}{x}\right)$ diviene sempre più piccolo, è chiaro, per la dimostrazione stessa di poco fa, che, per valori abbastanza piccoli di $\left(\frac{1}{x}\right)$, cioè per valori abbastanza grandi di x, il segno dell' espressione fra parentesi coinciderà col segno di A_n. E quindi il segno di $f(x)$ coinciderà per valori abbastanza grandi di x col segno di $x^n A_n$, c. d. d.

718. *Un'equazione algebrica di grado dispari ammette sempre almeno una radice reale.*

È questo un corollario della seconda parte dell' enunciato dell'art. 715. Infatti, se il grado n dell'equazione:

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

è dispari, il segno di $f(x)$ per un valore negativo abbastanza grande, $-A$, di x coinciderà col segno di $a_0(-A)^n$, cioè col segno di $-a_0$ nel mentre che per un valore positivo abbastanza grande B coinciderà col segno di $a_0 B^n$, cioè col segno di a_0. La funzione $f(x)$ assumerà dunque segni opposti per $x = -A$ e per $x = B$; onde fra $-A$ e B dovrà trovarsi (art. 682) almeno una radice di $f(x)=0$.

719. *Se l' equazione*:

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

non ha radici reali.

1°) *il grado di* f(x) *sarà un numero pari*;

2°) *la funzione* f(x) *conserverà sempre lo stesso segno qualunque sia il valore di* x;

3°) *il segno costante di* f(x) *coinciderà col segno del suo primo coefficiente* a_0.

La prima proprietà è un corollario immediato dell'art. prec. La seconda è un corollario del pari ovvio dell'art. 682. Quanto alla terza proprietà, essa si dimostra osservando che per un valore positivo abbastanza grande di x il segno di $f(x)$ coincide appunto (art. 715) col segno di a_0.

Esercizi.

Date le funzioni:

$$-x^7+8x^5+8x^4+10 \ , \ -x^7+8x^5-8x^4$$

$$x^6+10x^3-100 \ , \ x^6+10x^3$$

determinare i segni dei valori che esse assumono per

$$x=+\infty \ , \ x=-\infty \ , \ x=\varepsilon \ , \ x=-\varepsilon$$

essendo ε una quantità positiva piccolissima.

§ 2.° — Parità o disparità del numero di radici di un'equazione comprese fra due numeri dati.

720. Dati a piacere due numeri reali α e β $(\alpha<\beta)$, ci proponiamo di dimostrare che: *il numero delle radici reali dell'equazione a coefficienti reali* $f(x)=0$, *che si trovano comprese in valore algebrico fra* α *e* β, *è pari se* $f(\alpha)$ *ed* $f(\beta)$ *hanno lo stesso segno ed è invece dispari se* $f(\alpha)$ *ed* $f(\beta)$ *hanno segno contrario.*

Siano infatti $x_1, x_2, \ldots, x_p$ tutte le radici reali dell'equazione:

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=0 \qquad (1)$$

contate ciascuna anche più volte a seconda del suo grado di multiplicità. Si avrà identicamente (art. 493), qualunque, cioè, sia il valore di x:

$$f(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_p)\cdot\varphi(x)$$

essendo $\varphi(x)$ una funzione razionale intera di x, con coefficienti reali, del grado $n-p$, che non è annullata da alcun valore reale di x.

Da questa identità, sostituendo in essa in luogo di x una volta il valore α ed una volta il valore β, segue:

$$f(\alpha)=(\alpha-x_1)(\alpha-x_2)\ldots(\alpha-x_p)\varphi(\alpha)$$

$$f(\beta)=(\beta-x_1)(\beta-x_2)\ldots(\beta-x_p)\varphi(\beta)$$

d'onde:

$$\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}=\frac{\alpha-x_1}{\beta-x_1}\cdot\frac{\alpha-x_2}{\beta-x_2}\cdots\frac{\alpha-x_p}{\beta-x_p}\cdot P, \qquad (2)$$

dove $P=\frac{\varphi(\alpha)}{\varphi(\beta)}$ è una quantità positiva, giacchè, se $\varphi(\alpha)$ e $\varphi(\beta)$ fossero di segno contrario, dovrebbe fra α e β essere compresa almeno una radice dell'equazione $\varphi(x)=0$; che invece non ne può avere affatto, come già si è notato.

Considerando la i^{ma} frazione: $\frac{\alpha-x_i}{\beta-x_i}$, è ora facile di riconoscere che essa avrà valore negativo se la radice x_i è compresa fra α e β e positivo in caso contrario. Infatti, se $\alpha<x_i<\beta$, sarà $\alpha-x_i$

negativo e $\beta - x_i$ positivo, onde la frazione sarà negativa. Se invece si abbia $\alpha < \beta < x_i$ ovvero $x_i < \alpha < \beta$, le differenze $\alpha - x_i$ e $\beta - x_i$ saranno entrambe negative ovvero entrambe positive, onde il loro quoziente sarà positivo. Concludiamo che delle p frazioni $\frac{\alpha - x_i}{\beta - x_i}$ ve ne sono tante di negative quante sono le radici reali di $f(x) = 0$ comprese fra (α) e (β); le altre son tutte positive. Perciò il secondo membro della (2) sarà evidentemente positivo o negativo secondochè il numero di tali radici comprese fra α e β sia pari ovvero dispari. Ma, se il secondo membro è positivo, il primo membro $\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}$ dev'essere pure positivo, cioè $f(\alpha)$ ed $f(\beta)$ di segno eguale, e se il secondo membro è negativo, dev'essere negativo $\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}$, cioè $f(\alpha)$ ed $f(\beta)$ di segno contrario. Resta così dimostrato quanto si voleva.

721. In particolare, si potrà sempre decidere, per mezzo del teorema dimostrato, se l'equazione $f(x) = 0$ abbia un numero pari ovvero dispari di radici positive. Supponiamo per semplicità che l'ultimo coefficiente a_n di $f(x)$ sia diverso da zero (giacchè nel caso di $a_n = 0$ l'equazione $f(x) = 0$ si dividerebbe esattamente per x e basterebbe quindi considerare un'equazione di grado $n - 1$).

Prendendo $\alpha = 0$ si trova $f(0) = a_n$, e prendendo $\beta = +\infty$ (cioè un numero positivo abbastanza grande, cosicchè fra α e β siano comprese tutte le radici positive di $f(x) = 0$) sappiamo per il § prec. che il segno di $f(\beta)$ coincide con quello del primo termine $a_0\beta^n$, cioè con quello di a_0, essendo β^n positivo.

Dunque *le radici positive di* $f(x) = 0$ *sono in numero pari o dispari secondochè i coefficienti estremi* a_0 *ed* a_n *sono di segno eguale ovvero di segno contrario.*

722. In modo affatto simile si potrà procedere per decidere se sia pari o dispari il numero delle radici negative, sostituendo cioè $x = 0$ ed $x = -\infty$. Ma, più semplicemente, potrà bastare l'osservazione che la differenza, $n - p$, fra il grado dell'equazione $f(x) = 0$ e il numero delle sue radici reali è sempre un numero pari, poichè questa differenza è il grado dell'equazione $\varphi(x) = 0$ che non ammetteva radici reali (cfr. art. 719), onde *il numero delle radici reali sarà pari o dispari secondochè sia pari o dispari il grado dell'equazione.* Quindi, *se l'equazione è di grado pari, le radici positive o negative saranno entrambe in numero pari ovvero entrambe in numero dispari. Se invece l'equazione è di grado dispari, se il numero delle radici positive è pari, quello delle negative sarà dispari e viceversa.*

Note ed Esercizi.

1. Verificare colla sostituzione di $x = +\infty$ ed $x = -\infty$ che il numero delle radici reali di un'equazione a coefficienti reali è pari o dispari secondochè è pari o dispari il grado dell'equazione.

2. Dimostrare che l'equazione $3x^5 - 3x^4 + 8x - 2 = 0$ ha un numero dispari di radici positive, le quali sono tutte più piccole dell'unità.

3. Dimostrare che *se la funzione razionale intera* $f(x)$ *conserva sempre lo stesso segno qualunque sia il valore di* x, *dev'essere identicamente*:

$$f(x) = [\varphi(x)]^2 \cdot \psi(x)$$

essendo $\varphi(x)$ *e* $\psi(x)$ *due funzioni razionali intere, delle quali la seconda è tale che l'equazione* $\psi(x) = 0$ *non ammetta alcuna radice reale.*

4. L'equazione:

$$\frac{x_1^2}{\lambda - a_1} + \frac{x_1^2}{\lambda - a_2} + \ldots + \frac{x_n^2}{\lambda - a_n} = 1\,, \tag{1}$$

che, fatti sparire i denominatori prende la forma di un'equazione ordinaria del grado n in λ, ha tutte le sue radici reali qualunque siano i valori reali che si attribuiscano alle $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ed alle $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Posto per brevità:

$$(\lambda - a_1)(\lambda - a_2)\ldots(\lambda - a_n)\left\{1 - \frac{x_1^2}{\lambda - a_1} - \ldots - \frac{x_n^2}{\lambda - a_n}\right\} = \psi(\lambda)$$

e supposto, come è sempre lecito:

$$a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_{n-1} < a_n\,,$$

si dimostrerà l'asserto verificando che le quantità:

$$\psi(a_1)\,,\ \psi(a_2)\,,\ \psi(a_3)\,,\ \ldots\,,\ \psi(a_{n-1})\,,\ \psi(a_n)\,,\ \psi(+\infty)$$

sono risp. dei segni:

$$(-1)^n\,,\ (-1)^{n-1}\,,\ (-1)^{n-2}\,,\ \ldots\,,\ (-1)^2\,,\ (-1)\,,\ +.$$

Dette $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ le n radici di (1) scritte nell'ordine di grandezza algebrica crescente, si avrà quindi:

$$a_1 < \lambda_1 < a_2 < \lambda_2 < a_3 \ldots < \lambda_{n-1} < a_n < \lambda_n.$$

5. Come ad ogni sistema di valori reali delle $x_1, x_2, \ldots, x_n$ corrisponde, tenendo costanti in (1) le $a_1, a_2, \ldots, a_n$, un unico sistema di valori reali delle radici $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, così, reciprocamente, ad ogni sistema di valori reali delle $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ corrisponde un unico sistema $x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2$.

Per dimostrare ciò si ponga:

$$(\lambda - a_1)(\lambda - a_2)\ldots(\lambda - a_n) = f(\lambda) \tag{2}$$

e si faccia vedere che:

$$x_i^2 = -\frac{1}{f'(a_i)}(a_i - \lambda_1)(a_i - \lambda_2)\ldots(a_i - \lambda_n). \tag{3}$$

6. I teoremi precedenti hanno molta importanza in quanto servono di base alla teoria delle *coordinate ellittiche.*

Supponiamo, per fissare le idee, $n = 8$, cioè consideriamo l'ordinario spazio a tre dimensioni, e siano x, y, z le ordinarie coordinate cartesiane ortogonali di un suo punto qualunque. Si chiamano coordinate ellittiche del punto (x, y, z) le tre radici λ_1, λ_2, λ_3 dell' equazione:

$$\frac{x^2}{\lambda-a} - \frac{y^2}{\lambda-b} + \frac{z^2}{\lambda+c} = 1. \qquad (4)$$

Ogni punto (x, y, z) viene così a considerarsi come l'intersezione di tre superficie di 2° ordine le cui equazioni si ottengono dalle (4) ponendo risp. per λ una volta λ_1, una volta λ_2 e finalmente λ_3. Supposto:

$$a < \lambda_3 < b < \lambda_2 < c < \lambda_1 ,$$

la prima di queste superficie è un ellissoide, la seconda un iperboloide a una falda, la terza un iperboloide a due falde.

È importante di notare che tutte le superficie, rappresentate dall'equazione (4) variando comunque il valore del parametro λ, sono *omofocali* (cioè hanno gli stessi 6 fuochi), e che per ogni punto dello spazio ne passano soltanto tre, appartenenti alle tre diverse specie sopra indicate, le quali in esso punto si tagliano ad angolo retto.

§ 3.° — Segni di $f(x)$ e di $f'(x)$ in prossimità delle radici di $f(x) = 0$. Conseguenze diverse.

723. Sia α una radice reale dell' equazione a coefficienti reali $f(x) = 0$. Chiameremo valori di x *antecedenti* ad α tutti i valori di x che sono algebricamente minori di α e ne differiscono di una quantità piccolissima (*); e similmente chiameremo valori di x *susseguenti* ad α quei valori di x che differiscono da α di una quantità piccolissima e sono algebricamente maggiori di α. Indicando quindi con k una quantità positiva abbastanza piccola, è chiaro che i valori di x antecedenti ad α saranno dati da $x = \alpha - k$ e quelli susseguenti da $x = \alpha + k$.

Ovvero anche, più semplicemente, detta h una quantità positiva o negativa abbastanza piccola in valore assoluto, i valori di x adiacenti ad α saranno rappresentati da $x = \alpha + h$, e saranno antecedenti o susseguenti ad α a seconda che h sia negativo o positivo.

724. Ciò premesso, ci proponiamo di dimostrare che, *se α è una radice reale dell' equazione* $f(x) = 0$, *le due funzioni* $f(x)$ *ed* $f'(x)$ *hanno valori di segni opposti per i valori di* x *antecedenti ad* α, *ed hanno invece segni uguali per i valori di* x *susseguenti ad* α.

Ciò equivale a dire che il quoto $\dfrac{f(x)}{f'(x)}$ ha valore negativo per x antecedente ad α e valore positivo per x susseguente ad α. Ve-

(*) Il grado di piccolezza non si stabilisce *a priori;* è necessario anzi che resti indeterminato, per poter prendere a seconda dei casi una piccolezza sempre maggiore purchè diversa da zero.

dremo poi che per $x = \alpha$ esso ha sempre il valore zero, il che è già manifesto quando α sia radice semplice, poichè in tal caso si ha $f(\alpha) = 0$ ed $f'(\alpha) \gtrless 0$.

Tutto si riduce dunque a dimostrare che, per h abbastanza piccolo in valore assoluto, il valore di $\frac{f(\alpha+h)}{f'(\alpha+h)}$ è negativo, nullo o positivo secondochè è negativo, nullo o positivo il valore di h.

725. Per dimostrare ciò osserviamo che si ha per lo sviluppo di Taylor:

$$\frac{f(\alpha+h)}{f'(\alpha+h)} = \frac{f(\alpha) + h\frac{f'(\alpha)}{\lfloor 1} + h^2\frac{f''(\alpha)}{\lfloor 2} + \ldots}{f'(\alpha) + h\frac{f''(\alpha)}{\lfloor 1} + h^2\frac{f'''(\alpha)}{\lfloor 2} + \ldots}. \qquad (1)$$

Indichiamo poi con λ il grado di multiplicità della radice α (cosicchè si avrà almeno $\lambda = 1$, nel caso cioè in cui α sia soltanto una radice semplice), e ricordiamo (art. 698) che in tale supposto si ha:

$$f(\alpha)=0\,,\ f'(\alpha)=0\,,\ f''(\alpha)=0\,,\ \ldots,\ f^{(\lambda-1)}(\alpha)=0\,,\ f^{(\lambda)}(\alpha)\gtrless 0.$$

La (1) si riduce così alla formola seguente:

$$\frac{f(\alpha+h)}{f'(\alpha+h)} = \frac{h^\lambda\frac{f^{(\lambda)}(\alpha)}{\lfloor\lambda} + h^{\lambda+1}\frac{f^{(\lambda+1)}(\alpha)}{\lfloor\lambda+1} + \ldots}{h^{\lambda-1}\frac{f^{(\lambda)}(\alpha)}{\lfloor\lambda-1} + h^\lambda\frac{f^{(\lambda+1)}(\alpha)}{\lfloor\lambda} + \ldots}. \qquad (2)$$

Ciò posto, il numeratore del secondo membro è una funzione intera di h ordinata secondo le potenze crescenti della stessa h. Per conseguenza, per valori abbastanza piccoli di h, il segno di questo numeratore coinciderà col segno del suo primo termine $h^\lambda\frac{f^{(\lambda)}(\alpha)}{\lfloor\lambda}$, (art. 715). Lo stesso dicasi pel denominatore, il cui segno, per h abbastanza piccolo, coinciderà col segno di $h^{\lambda-1}\frac{f^{(\lambda)}(\alpha)}{\lfloor\lambda-1}$.

Da ciò si conclude che il segno del quoziente che sta nel 2° membro della (2) coinciderà, per h abbastanza piccolo, col segno del quoziente di questi due primi termini:

$$\frac{h^\lambda.\frac{f^{(\lambda)}(\alpha)}{\lfloor\lambda}}{h^{\lambda-1}\frac{f^{(\lambda)}(\alpha)}{\lfloor\lambda-1}} = \frac{h}{\lambda}\,,$$

cioè col segno di h, essendo λ un numero positivo.

Il quoziente $\frac{f(\alpha+h)}{f'(\alpha+h)}$ è dunque dello stesso segno di h, c. d. d.

726. La formola (2) si può semplificare dividendo numeratore e denominatore del secondo membro per $h^{\lambda-1}$. Con ciò essa prende la forma:

$$\frac{f(\alpha+h)}{f'(\alpha+h)} = h\,\frac{\dfrac{f^{(\lambda)}(\alpha)}{\lfloor\lambda} + h\{\ldots\}}{\dfrac{f^{(\lambda)}(\alpha)}{\lambda-1} + h\{\ldots\}}$$

dalla quale, facendo $h=0$, si trae:

$$\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} = 0,$$

come dovevamo dimostrare a complemento del teorema.

727. Teorema 1.° — *Fra due radici reali consecutive di un'equazione a coefficienti reali è sempre compreso* (*) *un numero dispari di radici della sua prima derivata, e quindi almeno una.*

Sieno infatti α e β $(\alpha<\beta)$ due radici reali consecutive di $f(x)=0$, tali cioè che fra α e β non sia compresa alcun'altra radice reale di questa equazione. Detta h una quantità positiva abbastanza piccola, il rapporto $\dfrac{f(\alpha+h)}{f'(\alpha+h)}$ ha segno positivo, giusta il teorema dell'art. 724, nel mentre che il rapporto $\dfrac{f(\beta-h)}{f'(\beta-h)}$ avrà invece segno negativo. D'altra parte, poichè fra α e β, e quindi anche fra $\alpha+h$ e $\beta-h$, non cade alcuna radice di $f(x)=0$, sostituendo in $f(x)$, in luogo di x, i due valori $\alpha+h$ e $\beta-h$, si devono avere risultati dello stesso segno (art. 720), cioè $f(\alpha+h)$ e $f(\beta-h)$ devono avere segno eguale. Ma i rapporti $\dfrac{f(\alpha+h)}{f'(\alpha+h)}$ ed $\dfrac{f(\beta-h)}{f'(\beta-h)}$ hanno segno opposto; quindi è chiaro che i denominatori $f'(\alpha+h)$ ed $f'(\beta-h)$ esser devono di segno contrario. E di quì segue, per lo stesso teorema dell'art. 720, che fra $\alpha+h$ e $\beta-h$ o, che è lo stesso, fra α e β, essendo h piccolo a piacere, è compreso un numero dispari di radici di $f'(x)=0$, c. d. d.

728. Teorema 2.° (**)—*Due radici reali consecutive della prima derivata di un' equazione a coefficienti reali o non comprendono nessuna radice reale della proposta o ne comprendono una sola radice semplice.*

Sieno infatti α' e β' due radici consecutive della prima derivata e supponiamo, se è possibile, che esse comprendano due radici distinte α e β della proposta. Pel teorema precedente fra α e β dovrebbe essere compreso almeno una radice γ' della prima derivata. Ma allora γ', essendo compresa fra α e β, sarebbe anche

(*) Dicendo radici *comprese* fra due limiti a e b s' intendono escluse quelle che per avventura coincidessero con a o con b.

(**) Conosciuto col nome di teorema di *Rolle*.

compresa fra α' e β', cioè le due radici α' e β' della prima derivata non sarebbero più consecutive contrariamente al supposto; e neanche è possibile che fra α' e β' sia compresa per es. una radice doppia α della proposta, perchè se α è radice doppia della proposta, essa è radice semplice della prima derivata; onde anche :n questo caso α' e β' non sarebbero più consecutive, perchè comprenderebbero un'altra radice α della prima derivata. Il teorema è così dimostrato.

729. TEOREMA 3.° — *Se λ è il numero delle radici reali della prima derivata, il numero delle radici reali della proposta non può superare $\lambda + 1$.*

Siano infatti $\alpha', \beta', \gamma', \ldots, \delta'$ le λ radici reali della prima derivata scritte nell'ordine stesso del loro valore algebrico crescente, e consideriamo la successione di valori crescenti:

$$-\infty\ , \alpha'\ , \beta'\ , \gamma'\ , \ldots , \delta'\ , +\infty . \tag{3}$$

Con ragionamento affatto analogo a quello dell'art. prec. si riconoscerà che fra $-\infty$ ed α' è compresa al più una sola radice dell'equazione proposta. Pel teorema poi dell'art. prec. sappiamo che fra α' e β', come pure fra β' e γ', ecc., cade al più una sola radice della proposta. E finalmente si riconoscerà che fra δ' e $+\infty$ cade pure al più una sola radice reale della proposta.

In tal modo l'intero campo da $-\infty$ a $+\infty$ resta diviso in $\lambda'+1$ intervalli, in ciascuno dei quali cade al più una sola radice della proposta.

La proposta non potrà dunque avere più di $\lambda + 1$ radici reali, c. d. d.

730. Nella dimostrazione ora data si è supposto implicitamente che l'equazione proposta avesse le sue radici reali tutte distinte, cosicchè nessuna di esse si trovasse a coincidere con una delle (3). Il teorema 3° però vale incondizionatamente, sempreché le radici reali della proposta o della derivata si contino col loro grado di multiplicità.

Per convincersi di ciò basterà riflettere che, se siano p. es. a, b, c tre radici consecutive ($a < b < c$) distinte della prima derivata e b sia radice multipla di grado λ della proposta:

1°) nessuna delle altre due radici a, c può essere anche radice della proposta;

2°) nell'intervallo fra a e b, e così pure nell'intervallo fra b e c, non cade in questo caso alcuna radice della proposta;

3°) la b è multipla (art. 699) di grado $\lambda - 1$ per la prima derivata.

731. TEOREMA 4.° — *Se μ è il numero delle radici reali di una equazione, la sua k^{ma} derivata avrà almeno $\mu - k$ radici reali.*

Infatti, se $f^{(k)}(x) = 0$ avesse $\mu - k - h$ radici reali, $f^{(k-1)}(x)$ ne avrebbe, pel teorema 3°, al più $\mu - k - h + 1$, $f^{(k-2)}(x)$ al più $\mu - k - h + 2$ e così via finchè si concluderebbe che la proposta $f(x) = 0$ ne avrebbe al più $\mu - k - h + k$, cioè $\mu - h$ contro il supposto.

732. Corollario. — *Se un' equazione ha tutte le sue radici reali* (*), *anche le sue derivate, di tutti gli ordini, avranno tutte le loro radici reali.*

Invero, se l' equazione $f(x)=0$, di grado n, ha tutte le radici reali, la derivata $f^{(k)}(x)=0$ ne avrà, pel teorema 4°, almeno $n-k$. Ma $n-k$ è appunto il grado dell'equazione $f^{(k)}(x)=0$; quindi, ecc.

Note ed Esercizi.

1. Se l' equazione del terzo grado, a radici distinte:

$$x^3+px^2+qx+r=0$$

ha tre radici reali, e si indichi con δ il numero delle sue radici positive, si ha:

$$\begin{array}{llll} \delta=0 & \text{per} & r>0\ ,\ q>0\ ,\ p>0 & \\ \delta=2 & » & r>0\ ,\ q>0\ ,\ p<0 & \text{e per}\quad r>0\ ,\ q<0 \\ \delta=1 & » & r<0\ ,\ q>0\ ,\ p>0 & »\qquad r<0\ ,\ q<0 \\ \delta=3 & » & r<0\ ,\ q>0\ ,\ p<0. & \end{array}$$

Per dimostrare ciò si comincierà dall' osservare che δ è pari o dispari secondochè sia (art 721) $r>0$ ovvero $r<0$. Si completerà poi il criterio osservando che la derivata: $3x^2+2px+q=0$ ha pure le radici reali, cosicchè dai segni di quest'ultime si argomenteranno facilmente (cfr. art. 729) i segni delle radici della primitiva.

2. Mostrare come si determini il numero delle radici reali di un' equazione conoscendo i valori delle radici reali della derivata.

3. Dimostrare che se: $(n-1)b^2<2nac$, l' equazione a coefficienti reali $ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}\ldots=0$ non ha più di $n-2$ radici reali.

Si applichi il teorema 4°.

4. Se μ è il numero delle radici reali multiple di un'equazione (contate ciascuna una volta sola) e λ il numero delle radici reali distinte della prima derivata, si ha $\mu \leqq \frac{\lambda}{2}$ per λ pari e $\mu \leqq \frac{\lambda+1}{2}$ per λ dispari.

5. In molte questioni di analisi (in quelle per esempio in cui occorrono le funzioni *sferiche*) e di fisica matematica hanno grande importanza certe particolari funzioni intere di x di 1°, 2°, 3°, ... grado, che si chiamano risp. *polinomi* di *Legendre* del 1°, 2°, 3°, ... *ordine* (**).

Il polinomio di Legendre dell' ordine n, che indicheremo con $P_n(x)$ ha l' espressione seguente:

$$P_n(x)\equiv\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{1\cdot 2\ldots n}\left\{x^n-\frac{n(n-1)}{2\cdot(2n-1)}x^{n-2}\right.$$
$$\left.+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4\cdot(2n-1)(2n-3)}x^{n-4}-\ldots\right\} \qquad (1)$$

e trae la sua origine dallo sviluppo in serie:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}}=1+P_1(x)\cdot\alpha+P_2(x)\cdot\alpha^2+\ldots. \qquad (2)$$

(*) Con ciò intendiamo dire brevemente che essa ha tante radici reali quanto è il suo grado.

(**) Circa le funzioni di *Laplace*, cfr. Jordan: Cours d' Analyse. Tome II, 2ª Ediz. pg. 245.

La stessa funzione $P_n(x)$ si può anche ottenere derivando n volte di seguito rispetto alla variabile x la funzione: $(x^2-1)^n$, e precisamente, se si pone per brevità:

$$f(x)=\frac{1}{2^n\lfloor n}\cdot(x^2-1)^n, \tag{3}$$

si ha:

$$P_n(x)=f^{(n)}(x). \tag{4}$$

Da quest'ultima espressione di $P_n(x)$ è facile dedurre che *le equazioni* $P_n(x)=0$, *che si ottengono eguagliando a zero uno qualunque dei polinomi di Legendre, hanno tutte le loro radici reali.*

Infatti, poichè l'equazione:

$$(x^2-1)^n=0 \tag{5}$$

ha tutte le sue $2n$ radici reali, (la radice $+1$ e la radice -1 ripetute ciascuna n volte), tutte le sue derivate, e quindi in particolare la sua n^{ma} derivata, avranno del pari (art. 732) tutte le loro radici reali.

6. Dimostrare che *l'equazione* $P_n(x)=0$ *ha inoltre tutte le sue radici diseguali e comprese fra* -1 *e* $+1$.

Basterà applicare più volte di seguito all'equazione (5) il teorema dell'art. 727 e quello dell'art. 699. Così, per quest'ultimo teorema, la derivata di (5) avrà la radice $+1$ e la radice -1 ripetuta ciascuna $n-1$ volte e, per il teorema dell'art. 727, avrà inoltre una radice compresa fra -1 e $+1$; e così via.

7. Mediante le (3) e (4) si dimostrino le formole seguenti:

$$P'_{n+1}(x)-P'_{n-1}(x)=(2n+1)P_n(x)\,,$$

$$(n+1)P_{n+1}-(2n+1)xP_n+nP_{n-1}=0\,,$$

$$(1-x^2)P''_n(x)+2xP'_n(x)+n(n+1)P_n(x)=0.$$

§ 4.° — Variazioni e permanenze. Teorema di Budan e Fourier. Regola dei segni di Cartesio.

733. Sia data una successione di un numero finito di numeri reali, diversi da zero, scritti in un certo ordine sopra altrettanti posti. Si dirà che in uno di questi posti vi è una *permanenza* ovvero una *variazione* secondochè il segno del numero che occupa quel posto è uguale o contrario al segno del numero che occupa il posto precedente. Così, ad esempio, nella successione: 3, —2, 4, 5, -6 vi sono tre variazioni (2°, 3°, e 5° posto) ed una permanenza (4° posto).

Poichè al primo posto non c'è nè variazione, nè permanenza (non essendoci alcun termine che lo preceda), così è chiaro che *la somma complessiva del numero di variazioni e di permanenze in una successione di* n *quantità sarà* $n-1$.

734. Teorema di Budan e Fourier. — *Siano* α *e* β *due numeri reali qualunque, che non siano però radici nè dell'equazione* $f(x)=0$ (*di grado* n), *nè delle sue derivate successive; e sia* α *algebricamente minore di* β. *Se si considerano allora le due succes-*

sioni:

$$f(\alpha)\ ,\ f'(\alpha)\ ,\ f''(\alpha)\ ,\ f'''(\alpha)\ ,\ \ldots\ ,\ f^{(n)}(\alpha) \qquad (1)$$

$$f(\beta)\ ,\ f'(\beta)\ ,\ f''(\beta)\ ,\ f'''(\beta)\ ,\ \ldots\ ,\ f^{(n)}(\beta)\ , \qquad (2)$$

si ha:

1.° *che il numero di variazioni contenute nella prima successione è maggiore od uguale al numero delle variazioni contenute nella seconda;*

2.° *che il numero delle radici reali dell'equazione* $f(x)=0$ *comprese fra* α *e* β *non può mai superare la differenza fra il numero di variazioni della prima e della seconda successione, ma può esserle inferiore di un numero pari.*

Per riconoscere in qual modo i segni della successione (1) possano differire dai segni della successione (2), consideriamo la successione generale:

$$f(x)\ ,\ f'(x)\ ,\ f''(x)\ ,\ \ldots\ ,\ f^{(n)}(x) \qquad (3)$$

e immaginiamo di seguire col pensiero i diversi valori che vanno prendendo gli n termini di questa successione, quando la x si fa crescere con continuità dal valore α al valore β passando per tutti i valori intermedi.

Durante questo crescere della x da α a β, noi sappiamo che una qualunque, $f^{(i)}$, delle funzioni (3) potrà cambiare di segno soltanto nel momento in cui la x passa per un valore che l' annulla, cioè per una radice di $f^{(i)} = 0$.

Dobbiamo dunque ricercare che cosa avvenga dei segni della successione (3) quando la x attraversa un certo valore γ che annulla una delle funzioni (3). Incominceremo dal supporre che γ annulli proprio la stessa funzione $f(x)$. Allora, se λ sia, in generale, il grado di multiplicità di γ come radice dell' equazione $f(x) = 0$, si avrà, come sappiamo, (art. 698):

$$f(\gamma)=0\ ,\ f'(\gamma)=0\ ,\ f''(\gamma)=0\ ,\ \ldots\ ,\ f^{(\lambda-1)}(\gamma)=0\ ,\ f^{(\lambda)}(\gamma)\gtreqless 0\ \ldots.$$

In questa successione non è il caso di considerare variazioni o permanenze, poichè i suoi termini sono in parte nulli.

Detta però h una quantità positiva piccolissima, potremo confrontare fra loro le due successioni:

$$f(\gamma-h)\ ,\ f'(\gamma-h)\ ,\ f''(\gamma-h)\ ,\ \ldots\ ,\ f^{(\lambda-1)}(\gamma-h)\ ,\ f^{(\lambda)}(\gamma-h)\ ,\ \ldots$$

ed

$$f(\gamma+h)\ ,\ f'(\gamma+h)\ ,\ f''(\gamma+h)\ ,\ \ldots\ ,\ f^{(\lambda-1)}(\gamma+h)\ ,\ f^{(\lambda)}(\gamma+h)\ ,\ \ldots$$

che corrispondono a due valori di x l' uno antecedente e l' altro susseguente a γ.

Ora, per quanto si è visto poco innanzi (art. 724), essendo γ radice di $f(x)=0$, $f(\gamma-h)$ ed $f'(\gamma-h)$ sono di segno opposto, nel mentre che $f(\gamma+h)$ ed $f'(\gamma+h)$ sono di egual segno.

Ciò significa che la prima successione ha una variazione nel secondo posto, nel mentre che in questo stesso posto la seconda successione ha una permanenza. Similmente, poichè γ è anche radice di $f'(x)=0$, si avrà che $f'(\gamma-h)$ ed $f''(\gamma-h)$ sono di segno opposto nel mentre che $f'(\gamma+h)$ ed $f''(\gamma+h)$ sono di egual segno, onde an-

che al terzo posto si avrà una variazione per la prima successione ed una permanenza per la seconda.

E questa stessa conclusione si potrà fare evidentemente fino al posto $(\lambda+1)^{mo}$ inclusivamente. In questo posto poi $f^{(\lambda)}(\gamma-h)$ ed $f^{(\lambda)}(\gamma+h)$ hanno lo stesso segno, poichè γ non è radice di $f^{(\lambda)}(x)=0$. Dunque: *quando la* x *cresce passando attraverso un valore speciale* γ *radice di* $f(x)=0$, *la serie di Budan:*

$$f(x)\,,\,f'(x)\,,\,f''(x)\,,\,\ldots\,,\,f^{(n)}(x) \tag{3}$$

perde precisamente tante variazioni quanto è il grado di multiplicità della radice γ.

735. Consideriamo ora l'altro caso che può presentarsi durante il crescere di x da α verso β, cioè che x passi per un valore speciale γ che sia radice di una certa derivata p^{ma} (senza esserlo della precedente).

Se k è il grado di multiplicità di γ, si avrà:

$$f^{(p-1)}(\gamma)\gtrless 0\,,\,f^{(p)}(\gamma)=0\,,\,f^{(p+1)}(\gamma)=0\,,\,\ldots\,,$$
$$f^{(p+k-1)}(\gamma)=0\,,\,f^{(p+k)}(\gamma)\gtrless 0.$$

Anche qui dobbiamo confrontare le due successioni di valori:

$$f^{(p-1)}(\gamma-h)\,,\,f^{(p)}(\gamma-h)\,,\,f^{(p+1)}(\gamma-h)\,,\,\ldots\,,$$
$$f^{(p+k-1)}(\gamma-h)\,,\,f^{(p+k)}(\gamma-h)\,,$$

ed

$$f^{(p-1)}(\gamma+h)\,,\,f^{(p)}(\gamma+h)\,,\,f^{(p+1)}(\gamma+h)\,,\,\ldots\,,$$
$$f^{(p+k-1)}(\gamma+h)\,,\,f^{(p+k)}(\gamma+h)\,,$$

che corrispondono a due valori di x l' uno antecedente e l' altro susseguente a γ.

Poichè γ è radice di $f^{(p)}(x)=0$, ripetendo il ragionamento precedente, si troverebbe che, dal terzo posto in poi, si hanno nella prima di queste due successioni k variazioni, le quali si cambiano in altrettante permanenze nella seconda successione. Rimane quindi a vedere che cosa accade al secondo posto, giacchè, quanto al primo posto, è chiaro che $f^{(p-1)}(\gamma-h)$ ha lo stesso segno di $f^{(p-1)}(\gamma+h)$, non essendo compresa fra $\gamma-h$ e $\gamma+h$ alcuna radice di $f^{(p-1)}(x)=0$. Invece $f^{(p)}(\gamma-h)$ ed $f^{(p)}(\gamma+h)$ saranno di segni eguali o contrari (art. 720) secondochè k sia pari o dispari; poichè γ è radice di $f^{(p)}(x)=0$ di multiplicità k, cosicchè si deve ritenere che fra $\gamma-h$ e $\gamma+h$ vi sono k radici di $f^{(p)}(x)=0$.

Nel caso di k pari le due successioni avranno dunque ai primi due posti assolutamente gli stessi segni, onde passando dalla prima successione alla seconda si verificherà semplicemente la perdita delle k variazioni sopra menzionate. Si perderà quindi un numero pari di variazioni.

Nel caso di k dispari il secondo posto cambia di segno passando dalla prima successione alla seconda, cosicchè, se al secondo posto si aveva una permanenza, si avrà poi una variazione e viceversa. Al secondo posto si sarà dunque perduta ovvero guadagnata

una variazione dopo il passaggio, cosicchè il numero totale di variazioni perdute non sarà più k (come quando k era pari) ma bensì $k \pm 1$, che è evidentemente un numero pari positivo (o nullo).

Riassumendo questi due casi concludiamo che il passaggio di x attraverso una radice di una derivata porta con sè che la serie di Budan (3) perda un numero pari, che può anche essere nullo, di variazioni.

736. Esaminati così i casi possibili di cambiamenti di segni nella serie di Budan, immaginiamo che la x cresca con continuità da α verso β. Dopo quanto si è spiegato, è chiaro che la serie di Budan durante questo crescere di x non guadagnerà mai variazioni; bensì essa perderà una variazione per ogni radice di $f(x)=0$ che viene attraversata da x; di più, ogni qualvolta x attraversa una radice di una derivata, essa perde un numero pari (che può essere anche nullo) di variazioni. Si conclude ehe la perdita di variazioni che si verifica confrontando la successione (1) colla successione (2) è uguale o maggiore del numero di radici reali di $f(x)=0$ comprese fra α e β, e, se è maggiore, ne differisce di un numero pari, c. d. d.

737. Regola dei segni di Cartesio. — Sia:

$$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_{n-1}x^{n-1} + c_nx^n = 0$$

l'equazione data. Applichiamo ad essa il teorema di Budan per $\alpha = 0$ e $\beta = +\infty$.

Si avrà allora che il numero delle sue radici comprese fra 0 e $+\infty$ (cioè il numero delle sue radici *reali* e *positive*) non potrà superare il numero di variazioni che la serie delle funzioni:

$$\begin{aligned} f(x) &= c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \ldots + c_nx^n \\ f'(x) &= \phantom{c_0 + {}} c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + \ldots + nc_nx^{n-1} \\ f''(x) &= \phantom{c_0 + c_1 + {}} 2c_2 + 6c_3x + \ldots + n(n-1)c_nx^{n-2} \\ f'''(x) &= \phantom{c_0 + c_1 + 2c_2 + {}} 6c_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{4}$$

perde passando x dal valore 0 al valore $+\infty$.

Ora, per $x=0$, i segni di queste funzioni coincidono coi segni dei coefficienti:

$$c_0\,,\; c_1\,,\; c_2\,,\; c_3\,,\ldots$$

risp. e per $x=\infty$ coincidono (art. 715) coi segni dei termini di più alto grado, cioè hanno tutte il segno di c_n, il che significa che per $x=\infty$ la serie $f(x)\,,\, f'(x)\,,\ldots$ presenta soltanto permanenze. Si conclude dunque che per $x=0$ la serie di Budan ha precisamente tante variazioni quante ne ha la serie dei coefficienti dell'equazione, e che queste variazioni si perdono tutte passando ad $x=+\infty$. Si avrà dunque pel teorema di Budan che: ***il numero delle radici positive di un'equazione non può mai superare***

il numero di variazioni che presenta la serie dei suoi coefficienti, e, se ne è inferiore, ne differisce per un numero pari.

Così, p. es., l'equazione: $x^5 - 4x^4 - 3x^3 + 12x^2 + 8x + 1 = 0$ non può avere più di due radici positive, perchè la serie dei suoi coefficienti 1, -4, -3, 12, 8, 1 presenta due sole variazioni. Inoltre possiamo aggiungere che essa avrà o nessuna oppure due radici positive.

738. La regola dei segni di Cartesio si presta egualmente a dare un limite superiore del numero delle radici negative dell'equazione proposta. Basterà infatti trasformare l'equazione nell'equazione a radici di segno contrario, con che le radici negative si cangiano nelle positive della trasformata, e applicare a quest'ultima la regola di Cartesio. Così nell'es. prec. la trasformata a radici di segno contrario è: $x^5 + 4x^4 - 3x^3 - 12x^2 + 8x - 1 = 0$, che ha tre variazioni. Perciò la proposta non potrà avere più di tre radici negative (e precisamente ne avrà una o tre).

739. La dimostrazione data all'art. 737 cade in difetto quando l'equazione proposta sia incompleta, cioè manchi di alcuni termini. In questo caso infatti i valori delle funzioni di Budan per $x = 0$ (cioè, che è lo stesso, i coefficienti dell'eq.) sono in parte nulli, onde il teorema non si può applicare immediatamente. Converrà bensì sostituire, in luogo di $x = 0$, un valore piccolissimo positivo $x = \varepsilon$, tanto piccolo da potersi ritenere che fra $x = 0$ ed $x = \varepsilon$ non cadano radici dell'equazione proposta. Si cercherà allora il numero di variazioni della serie $f(\varepsilon)$, $f'(\varepsilon)$, $f''(\varepsilon)$, ...

Ma è facile riconoscere che questo numero di variazioni coincide ancora precisamente col numero delle variazioni della serie dei coefficienti (diversi da zero) dell'equazione incompleta.

Suppongasi infatti che manchino i termini compresi fra $c_h x^h$ e $c_k x^k (h < k)$, cioè che sia nell'equazione proposta:

$$c_h \gtrless 0 \, , \, c_{h+1} = 0 \, , \, \ldots \, , \, c_{k-1} = 0 \, , \, c_k \gtrless 0$$

e vediamo quali siano i segni delle corrispondenti derivate:

$$f^{(h)}(\varepsilon) \, , \, f^{(h+1)}(\varepsilon) \, , \, \ldots \, , \, f^{(k-1)}(\varepsilon) \, , \, f^{(k)}(\varepsilon). \tag{5}$$

Quanto al segno di $f^{(h)}(\varepsilon)$, esso coincide (art. 715) col segno del suo termine di grado meno elevato, cioè, come si vede dalle (4), col segno di c_h. Lo stesso dicasi per le $f^{(h+1)}(\varepsilon)$, $f^{(h+2)}(\varepsilon)$, ...; per queste funzioni però il termine di grado meno elevato (essendo $c_{h+1} = 0$, $c_{h+2} = 0$, . . . , $c_k \gtrless 0$) si presenta in tutte col coefficiente c_k che è il primo coefficiente diverso da zero dopo c_h. Concludiamo dunque che i segni delle (5) coincidono coi segni della successione:

$$c_h \; c_k \; c_k \; c_k \; . \; . \; . \; c_k$$

la quale contiene evidentemente tante variazioni quante ne contiene la semplice coppia $c_h c_k$. È dunque chiaro che la regola dei segni di Cartesio si può applicare anche alle equazioni incomplete, non tenendo alcun conto dei termini che mancano. Così ad es. l'equazione $x^4 - 8x - 110 = 0$ non contenendo nei suoi coeffi-

cienti 1, − 8, − 110 che una sola variazione, non potrà avere che una sola radice reale positiva, e questa esisterà certamente.

740. *Se un'equazione ha tutte le radici reali, il numero delle sue radici comprese fra due numeri qualunque α e β $(\alpha < \beta)$ è precisamente uguale al numero delle variazioni perdute dalla serie di Budan passando da $x = \alpha$ ad $x = \beta$.*

Sia infatti n il grado dell'equazione. Facendo variare con continuità la x da $-\infty$ a $+\infty$, la serie di Budan dovrà perdere (articolo 734) n variazioni corrispondentemente al passaggio per ognuna delle n radici dell'equazione. Attraversando le radici delle derivate non potrà quindi perdere alcuna variazione, poichè altrimenti il numero totale di variazioni perdute passando da $-\infty$ a $+\infty$ sarebbe superiore ad n; il che è assurdo non potendo la serie di Budan (art. 733) contenere più di n variazioni.

741. *In un'equazione a radici tutte reali il numero delle variazioni che presenta la serie dei suoi coefficienti è precisamente uguale al numero delle sue radici positive.*

È questa una conseguenza del teorema dal precedente quale si dedurrà assolutamente nello stesso modo tenuto per dedurre dal teorema di Budan la regola dei segni di Cartesio.

Note ed Esercizi.

1. Applicare la regola dei segni di Cartesio all'equazione $x^5+x^4+x^2-25x-36=0$. Sostituire quindi i valori $x=-3, -2, -1, 1, 2, 3$ e riconoscere così che essa ha precisamente due radici reali negative ed una reale positiva.

2. Un'equazione a coefficienti tutti positivi non ha radici positive e una equazione completa a coefficienti alternativamente positivi e negativi non ha radici negative.

3. Il numero di variazioni di segno che presenta la successione dei coefficienti di un'equazione è pari o dispari secondochè i coefficienti estremi sono dello stesso segno o di segno contrario.

4. Data l'equazione di grado n:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-2}x + a_n = 0 \qquad (1)$$

si considerino, in luogo delle successive derivate, le funzioni più semplici:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= a_0x^{n-1} + a_1x^{n-2} + \ldots + a_{n-2}x + a_{n-1} \\ f_2(x) &= a_0x^{n-2} + a_1x^{n-3} + \ldots + a_{n-2} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_{n-1}(x) &= a_0x + a_1 \\ f_n(x) &= a_0. \end{aligned} \qquad (2)$$

Si ha il seguente teorema dovuto a *Laguerre:*

Se α è un numero positivo, il numero delle variazioni nella serie:

$$f(\alpha)\ ,\ f_1(\alpha)\ ,\ f_2(\alpha)\ ,\ \ldots\ ,\ f_n(\alpha) \qquad (3)$$

è uguale, o superiore di un numero pari, al numero delle radici positive superiori ad α dell'equazione f(x) = 0.

5. La dimostrazione di questo teorema data da Laguerre si basa sul lemma seguente, che si può considerare come una generalizzazione della regola dei segni di Cartesio:

Sia F(x) *una serie ordinata secondo le potenze crescenti di* x, *convergente per tutti i valori positivi di* x *più piccoli di un numero dato α, la quale cessi di essere convergente per* x = α. *Ammettiamo inoltre che il numero delle variazioni di segno che si presentano nella successione dei coefficienti della serie sia finito. Il numero dei valori di* x *per i quali la serie* F(x) *è convergente ed ha per valore zero è al più eguale al numero delle variazioni della serie* F(x), *e, se ne è inferiore, ne differisce di un numero pari.* (*Laguerre — Notes sur la résolution des équations numériques.* Paris 1880).

6. Ciò premesso, per dimostrare il teorema di Laguerre cominciamo dall'osservare che si ha identicamente, per la regola di Ruffini:

$$f(x)=(x-\alpha)\{f_m(\alpha)x^{m-1}+f_{m-1}(\alpha)x^{m-2}+\ldots+f_1(\alpha)\}+f(\alpha)$$

d'onde:

$$\frac{f(x)}{x-\alpha}=f_m(\alpha)x^{m-1}+f_{m-1}(\alpha)x^{m-2}+\ldots+f_1(\alpha)+\frac{f(\alpha)}{x-\alpha}.$$

Ma per $x>\alpha$ si ha (art. 628) lo sviluppo convergente:

$$\frac{f(\alpha)}{x-\alpha}=\frac{f(\alpha)}{x}\cdot\frac{1}{1-\frac{\alpha}{x}}=\frac{f(\alpha)}{x}\left\{1+\frac{\alpha}{x}+\frac{\alpha^2}{x^2}+\ldots\right\}.$$

Si può dunque scrivere:

$$\frac{f(x)}{x-\alpha}=f_m(\alpha)\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^{-(m-1)}+f_{m-1}(\alpha)\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^{-(m-2)}+\ldots+f_1(\alpha)$$

$$+f(\alpha)\cdot\left(\frac{1}{x}\right)+\alpha f(\alpha)\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^2+\alpha^2 f(\alpha)\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^3+\ldots$$

che è uno sviluppo ordinato secondo le potenze crescenti della variabile $\left(\frac{1}{x}\right)$, il quale è convergente per i valori di $\frac{1}{x}$ compresi fra 0 ed $\frac{1}{\alpha}$.

Poichè le variazioni presentate dai coefficienti di questo sviluppo non differiscono evidentemente da quelle della serie (3), si ha dunque, in virtù del lemma premesso, che il numero dei valori di $\frac{1}{x}$ compresi fra 0 ed $\frac{1}{\alpha}$ (o, che è lo stesso, il numero dei valori di x compresi fra $+\infty$ ed α) per i quali si annulla $\frac{f(x)}{x-\alpha}$ non può superare il numero delle variazioni della serie (3) ed in ogni caso ne differisce di un numero pari, c. d. d.

7. È importante di osservare che il teorema di Laguerre si applica nella pratica con grande facilità, poichè gli $n+1$ valori (3) sono appunto quelli stessi che s'incontrano (art. 492) nell'usuale calcolo pratico del valore di $f(\alpha)$.

Così, ad esempio, data l'equazione:

$$f(x)\equiv x^5-3x^4+8x^3-2x+1=0, \tag{4}$$

dovendosi calcolare il valore di $f(2)$ per riconoscere se il numero di radici positive comprese fra 0 e 2 sia pari o dispari (art. 720), si incontre-

ranno naturalmente i numeri:

$$1\ ,\ -1\ ,\ -6\ ,\ -12\ ,\ -26\ ,\ -51 = f(2).$$

Presentando questi una sola variazione, il teorema di Laguerre ci dice che l'equazione (4) ha una radice positiva, ed una sola, superiore a 2.

8. Come altro esempio si applichi il teorema di Budan a ricercare un limite superiore del numero di radici positive, comprese fra 2 e $+\infty$, dell'equazione: $x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 4x - 1 = 0$.

Si costruirà, col procedimento di Horner (cfr. capitolo XIV), il quadro:

1	−1	1	−2	−5
1	1	3	4	
1	3	9		
1	5			
1				

di cui la prima orizzontale ci dice, pel teorema di Laguerre, che il numero di tali radici è uguale od inferiore a 3; nel mentre che la diagonale $\left(\text{la quale ci dà i valori di } f(2), \frac{f'(2)}{\lfloor 1}, \ldots\right)$ ci dice, pel teorema di Budan, che l'equazione ha una sola radice superiore a 2.

9. Per altri teoremi che presentano molta analogia con quelli dimostrati in questo § cfr. le due Note: *Sulla separazione delle radici delle equazioni mediante il calcolo delle differenze.* (Rendiconto della R. Acc. delle Scienze di Napoli, novembre e dicembre 1894); come pure i §§ 3° e 4° del capitolo che segue.

§ 5.° — Teorema di Sturm.

742. *Sturm* è giunto pel primo a costruire una successione di funzioni:

$$f(x)\ ,\ f_1(x)\ ,\ f_2(x)\ ,\ f_3(x)\ ,\ \ldots$$

tali che la perdita di variazioni che essa subisce passando da un valore $x = \alpha$ ad un valore $x = \beta$, $(\beta > \alpha)$, sia eguale precisamente al numero delle radici reali distinte di $f(x)=0$ comprese fra α e β.

Le prime due funzioni $f(x)$ ed $f_1(x)$ altro non sono che il primo membro dell'equazione e la sua prima derivata $f'(x)$, che ora indicheremo per simmetria con $f_1(x)$. Le altre funzioni si costruiscono come segue. Per $f_2(x)$ si prende il resto (con segno cambiato) della divisione di $f(x)$ per $f_1(x)$; per $f_3(x)$ il resto (con segno cambiato) della divisione di $f_1(x)$ per $f_2(x)$ e così di seguito; cosicchè si hanno le identità:

$$\begin{aligned} f(x) &= \varphi_1(x)\, f_1(x) - f_2(x) \\ f_1(x) &= \varphi_2(x)\, f_2(x) - f_3(x) \qquad\qquad (1) \\ f_2(x) &= \varphi_3(x)\, f_3(x) - f_4(x) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_{k-2}(x) &= \varphi_{k-1}(x)\, f_{k-1}(x) - f_k(x)\ ,\ f_k(x) = \text{Cost.} \end{aligned}$$

nell'ultima delle quali, poichè i gradi dei resti vanno diminuendo

sempre almeno di una unità (cfr. art. 545), si può ritenere che l'ultimo resto $f_k(x)$ sia una costante C.

Inoltre, ammettendo per ora che la funzione $f(x)$ e la sua prima derivata $f'(x)$ siano prime fra loro, possiamo anche ritenere (cfr. art. 545) che questa costante C sia diversa da zero.

743. Ciò posto, passiamo a dimostrare che *la perdita di variazioni che subisce la serie di funzioni*:

$$f(x)\ ,\ f_1(x)\ ,\ f_2(x)\ ,\ \ldots\ ,\ f_k(x) \tag{2}$$

così costruita, passando dal valore $x = \alpha$ *al valore* $x = \beta$, $(\beta > \alpha)$, *è precisamente uguale al numero delle radici reali di* $f(x)=0$ *comprese fra* α *e* β.

A tale oggetto è essenziale di notare che le funzioni (2) godono delle due seguenti proprietà fondamentali.

1.° *Due funzioni consecutive della serie* (2) *non si possono annullare per uno stesso valore di* x.

Supponiamo infatti, se è possibile, che si avesse per un certo valore α di x:

$$f_i(\alpha) = 0\ ,\ f_{i+1}(\alpha) = 0.$$

Poichè fra le (1) sussiste la relazione identica:

$$f_i(x) = \varphi_{i+1}(x)\, f_{i+1}(x) - f_{i+2}(x)\ ,$$

si avrebbe in particolare:

$$f_i(\alpha) = \varphi_{i+1}(\alpha)\, f_{i+1}(\alpha) - f_{i+2}(\alpha)\ ,$$

d'onde si dedurrebbe, essendo per supposto $f_i(\alpha) = 0$, $f_{i+1}(\alpha) = 0$, dover essere altresì $f_{i+2}(\alpha) = 0$. Essendo ora $f_{i+1}(\alpha)=0$, $f_{i+2}(\alpha)=0$, si dimostrerebbe similmente dover essere $f_{i+3}(\alpha) = 0$, e così procedendo si concluderebbe finalmente che dev'essere $f_k(\alpha) = 0$. Ma ciò è assurdo, poichè $f_k(x)$ è una costante diversa da zero.

2.° *Se una funzione di Sturm si annulla per* $x=\alpha$, *le due funzioni della serie* (2) *che la comprendono, prendono, per* $x=\alpha$, *valori di segno opposto*. Dalle relazioni (1) si ha infatti:

$$f_{i-1}(\alpha) = \varphi_i(\alpha)\, f_i(\alpha) - f_{i+1}(\alpha).$$

Di qui si vede che, se $f_i(\alpha) = 0$, si ha:

$$f_{i-1}(\alpha) = - f_{i+1}(\alpha)\ ,$$

cioè appunto che le due funzioni $f_{i-1}(x)$ ed $f_{i+1}(x)$ che comprendono $f_i(x)$, hanno segni opposti per $x = \alpha$.

744. Venendo ora alla dimostrazione del teorema, notiamo, come si è fatto pel teorema di Budan, che, facendo crescere la x da α verso β, le funzioni di Sturm allora soltanto possono subire cambiamenti di segno, quando la x attraversi un valore speciale che annulli qualcuna di queste funzioni. Inoltre, con ragionamento

identico a quello tenuto pel teorema di Budan, si riconosce che, se x attraversa una radice α (semplice, per supposto) dell'equazione proposta $f(x)=0$, la serie di Sturm perderà (al secondo posto) una variazione.

Se dunque noi dimostreremo che *la serie di Sturm non perde alcuna variazione quando la* x *passi per un valore di* γ *che annulli un'altra qualunque delle funzioni* (2), è chiaro che il teorema enunciato resterà stabilito completamente.

Supponiamo pertanto che la x attraversi un valore γ per il quale si abbia $f_i(\gamma)=0$, e confrontiamo al solito i valori:

$$f_{i-1}(\gamma-h)\ ,\ f_i(\gamma-h)\ ,\ f_{i+1}(\gamma-h) \tag{a}$$

coi valori:

$$f_{i-1}(\gamma+h)\ ,\ f_i(\gamma+h)\ ,\ f_{i+1}(\gamma+h). \tag{b}$$

In virtù della prima proprietà (art. 743) delle funzioni di Sturm, essendo $f_i(\gamma)=0$, sarà invece:

$$f_{i-1}(\gamma) \gtreqless 0\ ,\ f_{i+1}(\gamma) \lesseqgtr 0\ ,$$

onde, per h abbastanza piccolo, i tre numeri:

$$f_{i-1}(\gamma-h)\ ,\ f_{i-1}(\gamma)\ ,\ f_{i-1}(\gamma+h)$$

avranno egual segno e così pure i tre numeri:

$$f_{i+1}(\gamma-h)\ ,\ f_{i+1}(\gamma)\ ,\ f_{i+1}(\gamma+h).$$

Ma, per la seconda proprietà, $f_{i-1}(\gamma)$ ed $f_{i+1}(\gamma)$ hanno segni opposti; avranno dunque segni opposti anche $f_{i-1}(\gamma-h)$ ed $f_{i+1}(\gamma-h)$, come pure avranno segni opposti $f_{i-1}(\gamma+h)$ ed $f_{i+1}(\gamma+h)$. Poichè ora nella terna (a) i termini estremi hanno segni opposti, è chiaro che, qualunque sia il segno del termine intermedio, questa terna presenterà una variazione seguita da una permanenza, ovvero una permanenza seguita da una variazione; cioè in complesso avrà una sola variazione. Per la stessa ragione anche la terna (b) avrà una sola variazione. Non c'è dunque nè perdita nè guadagno di variazioni passando da (a) a (b), c. d. d.

745. Ci resta ora a far vedere che il teorema di Sturm vale anche nel caso che $f(x)$ ed $f'(x)$ abbiano un massimo comun divisore variabile (cioè almeno di 1° grado) $\psi(x)$. Soltanto vedremo che allora il numero delle variazioni perdute dalla serie di Sturm passando da α a β indica semplicemente il numero delle radici reali *distinte* di $f(x)=0$ comprese fra α e β, senza tenere alcun conto del loro grado di multiplicità.

Da quanto già sappiamo sulla ricerca del massimo comun divisore di due funzioni e dall'ispezione del quadro (1), che serve appunto a questa ricerca, segue che anche le funzioni $f_2(x), f_3(x),\ldots, f_{k-1}(x)$ saranno tutte divisibili per $\psi(x)$; anzi l'ultima di queste $f_{k-1}(x)$ coinciderà appunto con $\psi(x)$, nel mentre che la costante $f_k(x)$ riescirà eguale a zero.

Se dunque poniamo:

$$f(x)=\psi(x)F(x)\ ,\ f_1(x)=\psi(x)F_1(x)\ ,\ \ldots\ ,\ f_{k-1}(x)=\psi(x)\ , \tag{3}$$

sostituiamo nelle (1) e dividiamo quindi tutte le prime $k-2$ uguaglianze per $\psi(x)$, otteniamo le identità:

$$\begin{aligned} F(x) &= \varphi_1(x)F_1(x) - F_2(x) \\ F_1(x) &= \varphi_2(x)F_2(x) - F_3(x) \\ F_2(x) &= \varphi_3(x)F_3(x) - F_4(x) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_{k-3}(x) &= \varphi_k(x)F_{k-2}(x) - 1 \end{aligned} \tag{1)'$$

in virtù delle quali le funzioni:

$$F(x)\ ,\ F_1(x)\ ,\ F_2(x)\ ,\ \ldots\ ,\ F_{k-1}(x)\ ,\ 1 \tag{2)'$$

si trovano nelle stesse condizioni di quelle considerate nei precedenti articoli, e soddisfano quindi alle stesse due proprietà fondamentali. Inoltre, se γ è radice multipla di $f(x)=0$, essa è soltanto radice semplice di $F(x)=0$ (cfr. articolo 701) e non è affatto radice di $F_1(x)=0$. Si giungerà dunque alle stesse conseguenze; cioè che il numero di radici reali di $F(x)=0$ (o, che è lo stesso, il numero di radici reali *distinte* di $f(x)=0$), comprese fra α e β è uguale al numero delle variazioni che perde la successione (2)' passando da $x=\alpha$ ad $x=\beta$. Ma dalle (3) si vede che i segni della successione (2)' coincidono (ovvero sono tutti opposti) coi segni della successione:

$$f(x)\ ,\ f_1(x)\ ,\ f_2(x)\ ,\ \ldots\ ,\ f_{k-1}(x)$$

secondochè $\psi(x)$ ha segno positivo o negativo. In ogni caso si vede che le variazioni e permanenze di quest'ultima successione coincideranno con quelle della successione (2)'. Resta così dimostrato quanto si voleva, poichè si ritorna così precisamente alla successione (2), della quale soltanto si deve trascurare l'ultimo termine $f_k(x)$ che è ora identicamente uguale a zero.

746. Volendo conoscere il numero preciso delle radici reali dell'equazione proposta $f(x)=0$, basterà sostituire nella serie di Sturm $x=-\infty$ ed $x=+\infty$ e vedere quante variazioni si perdono passando dall'uno all'altro valore.

Poichè i gradi delle funzioni di Sturm vanno successivamente diminuendo almeno di un'unità, così è chiaro che il numero delle funzioni di Sturm non può mai essere superiore ad $n+1$. Affinchè poi l'equazione abbia le sue radici reali e distinte, è necessario primieramente che il numero delle funzioni di Sturm sia proprio $n+1$, poichè altrimenti non si potrebbero perdere n variazioni passando da $-\infty$ a $+\infty$. Oltre a questa condizione deve poi verificarsi l'altra, che i coefficienti dei termini di più alto grado delle funzioni di Sturm siano tutti dello stesso segno. Siano in-

fatti:

$$ax^n\ ,\ bx^{n-1}\ ,\ cx^{n-2}\ ,\ \ldots\ ,\ tx\ ,\ r$$

i primi termini delle funzioni di Sturm.

Per $x = -\infty$, queste funzioni prenderanno i segni dei loro primi termini; onde presenteranno appunto n variazioni soltanto se a, b, c, ... sono dello stesso segno.

Per $x = +\infty$ questi primi termini riesciranno poi allora tutti dello stesso segno. Le n variazioni saranno così perdute passando da $-\infty$ a $+\infty$ e l' equazione avrà tutte le radici reali.

747. *Se una delle funzioni di Sturm, p. es.* $f_i(x)$, *non cambia mai di segno per tutti i valori* x *compresi fra* α *e* β, *per calcolare il numero di radici reali comprese fra* α *e* β, *basterà operare come se la serie di Sturm si componesse delle sole* $i+1$ *funzioni:*

$$f(x)\ ,\ f_1(x)\ ,\ f_2(x)\ ,\ \ldots\ ,\ f_i(x).$$

È questo un corollario quasi evidente della dimostrazione fatta all'art. 744. Esso può avere molta importanza pratica, perchè potrà in molti casi far risparmiare il calcolo delle rimanenti funzioni $f_{i+1}(x)\ ,\ f_{i+2}(x)\ \ldots$.

748. Aggiungeremo un' altra osservazione riguardante l' ultima funzione di Sturm, la quale, come si è visto, è una costante.

Per l'applicazione del teorema non è necessario conoscere il valore di tale costante, ma basta conoscerne il segno. Ora, segue evidentemente dalla seconda delle due proprietà fondamentali (articolo 743), cui soddisfano le funzioni di Sturm, che questo segno è opposto a quello che assume la terzultima funzione per quel valore di x che annulla la penultima, che è in generale di primo grado in x. Nella pratica sarà per lo più conveniente calcolare in questo modo il segno della funzione costante.

Note ed Esercizi.

1. Prendendo l'equazione del terzo grado (come è lecito) sotto la forma:

$$f(x) = x^3 + 3hx + g = 0,$$

si trovano per le altre funzioni di Sturm le seguenti:

$$f_1(x) = x^2 + h\ ,\ f_2(x) = -2hx - g\ ,\ f_3(x) = -g^2 - 4h^3.$$

In base a ciò trovare le condizioni perchè l' equazione abbia tutte le radici reali, ovvero tutte reali con un dato numero di radici positive (cfr. poi la Nota 1.ª del § 8.°).

2. Se nell' equazione generale del quarto grado:

$$ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = 0 \qquad (1)$$

si fa la trasformazione: $y = ax + b$, essa prende la forma (cfr. Cap. XIV, § 6.°, Nota 1.ª):

$$f(y) = y^4 + 6Hy^2 + 4Gy + (a^2I - 3H^2) = 0,$$

dove:

$$H = ac - b^2 \ , \ I = ae - 4bd + 3c^2 \ , \ G = a^2d - 3abc + 2b^3.$$

Ponendo inoltre: $J = ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3$, si trovano per $f(y) = 0$, le altre funzioni di Sturm:

$$f_1(y) = y^3 + 3Hy + G \ , f_2(y) = -3H^2y - 3Gy - (a^2I - 3H^2),$$

$$f_3(y) = -(2HI - 3aJ)y - GI \ , f_4(y) = I^3 - 27J^2.$$

3. Trovare le condizioni perchè la (1) abbia un dato numero di radici reali.

CAPITOLO X.

RISOLUZIONE NUMERICA DELLE EQUAZIONI.

§ 1.° — Determinazione di limiti che comprendano le radici reali positive (o negative) di un' equazione a coefficienti reali.

749. Data un' equazione a coefficienti reali:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0, \tag{1}$$

ci proponiamo di determinare un numero positivo, possibilmente piccolo, il quale superi tutte le radici positive della (1), o, come si dice, un *limite superiore* delle radici positive di (1).

Noi supporremo, come è sempre lecito, che il primo coefficiente a_0 dell'equazione sia positivo (poichè in caso contrario basterebbe moltiplicare tutta l'equazione per -1). Allora, se anche tutti gli altri coefficienti dell' equazione fossero positivi, l' equazione non potrebbe evidentemente avere radici positive, poichè per x positivo $f(x)$ prenderebbe evidentemente un valore positivo e diverso da zero. Sia dunque $a_k (k \gtreqless n)$ il primo coefficiente negativo (diverso da zero). O, in altri termini, poichè:

$$a_0 > 0 \, , \, a_1 \gtreqless 0 \, , \, a_2 \gtreqless 0 \, , \, \ldots \, , \, a_{k-1} \gtreqless 0 \, , \, a_k < 0,$$

sia k *il numero dei coefficienti consecutivamente positivi* (*o nulli*) *a cominciare da* a_0. *In tale supposto, se* A *indichi il valore assoluto del massimo coefficiente negativo dell'equazione* (1), *l'espressione* $1 + \sqrt[k]{\frac{A}{a_0}}$ *ci darà un limite superiore delle radici positive di quest' equazione.*

750. Invero aggiungendo e togliendo alla funzione intera $f(x)$ la somma $Ax^{n-k} + Ax^{n-k-1} + \ldots + Ax + A$, si può scrivere identicamente:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{k-1}x^{n-k+1} + [(A + a_k)x^{n-k}$$

$$+ (A + a_{k+1})x^{n-k-1} + \ldots + (A + a_n)] + \frac{A}{x-1} - A\frac{x^{n-k+1}}{x+1},$$

poichè $A(x^{n-k} + x^{n-k-1} + \ldots + x + 1)$ è una progressione geometrica che ha per somma $A \cdot \frac{1 - x^{n-k+1}}{1 - x}$.

Se ora in questa espressione di $f(x)$ sostituiamo per x un numero positivo, la parte contenuta nella parentesi quadra riuscirà certo positiva, perchè è una funzione di x i cui coefficienti sono positivi, essendo ciascuno di essi la somma del numero positivo A e di uno dei numeri a_k, a_{k+1}, ... i quali o sono anch'essi positivi, o, se sono negativi, hanno sempre un valore assoluto minore di A per l' ipotesi fatta sul numero A. Se inoltre supponiamo di prendere d'ora innanzi $x > 1$, sarà positiva anche la parte $\frac{A}{x-1}$; e finalmente notiamo che sarà anche certamente positiva la parte $a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+...+a_{k-1}x^{n-k+1}$, poichè i k coefficienti $a_0, a_1, a_2, ..., a_{k-1}$ si sono supposti tutti positivi. Se indichiamo dunque con τ un certo numero positivo, possiamo scrivere:

$$f(x) = a_0x^n - \frac{Ax^{n-k+1}}{x-1} + \tau$$

o anche:

$$f(x) = \frac{a_0(x-1)x^n - Ax^{n-k+1}}{x-1} + \tau = \frac{x^{n-k+1}\{a_0(x-1)x^{k-1} - A\}}{x-1} + \tau.$$

Se nel secondo membro trascuriamo la parte positiva τ e, se in luogo del numero positivo x^{k-1} scriviamo il numero positivo più piccolo $(x-1)^{k-1}$, si avrà algebricamente *a fortiori*:

$$f(x) > \frac{x^{n-k+1}\{a_0(x-1)^k - A\}}{x-1}. \tag{2}$$

Esaminando ora il secondo membro si vede che il fattore x^{n-k+1} ed il denominatore $x-1$ sono positivi, cosicchè l'intero secondo membro sarà positivo semprechè sia positiva la quantità fra parentesi $a_0(x-1)^k - A$, cioè semprechè si abbia:

$$a_0(x-1)^k \gtreqless A,$$

o, che è lo stesso,

$$x - 1 \gtreqless \sqrt[k]{\frac{A}{a_0}} \quad \text{ed} \quad x \gtreqless 1 + \sqrt[k]{\frac{A}{a_0}}.$$

Segue dunque dalla (2) *a fortiori*:

$$f(x) > 0, \quad \text{per} \quad x \gtreqless 1 + \sqrt[h]{\frac{A}{a_0}}. \tag{3}$$

Ciò posto, se α sia una radice positiva di $f(x) = 0$, si dovrà avere:

$$\alpha < 1 + \sqrt[k]{\frac{A}{a_0}},$$

poichè, se si avesse $\alpha \gtreqless 1 + \sqrt[k]{\frac{A}{a_0}}$, se ne dedurrebbe in virtù della (3):

$$f(\alpha) > 0,$$

il che è assurdo, giacchè si ha invece $f(\alpha) = 0$, essendo per supposto α una radice di $f(x) = 0$. Il teorema enunciato all' art. 749 resta così dimostrato.

751. Esempio. — L' equazione:

$$8x^7 + 5x^5 - 10x^4 + 18x - 100 = 0$$

ha tre coefficienti consecutivi positivi (o nulli) a cominciare dal primo, che sono i coefficienti delle potenze x^7, x^6, x^5. Si ha dunque in questo caso $k = 3$, $A = 100$, onde si può prendere come limite superiore delle radici positive:

$$L = 1 + \sqrt[3]{\frac{100}{8}} = 1 + \sqrt[3]{12 + \frac{1}{2}} > 1 + \sqrt[3]{27}$$

e quindi *a fortiori* si può prendere:

$$L = 1 + \sqrt[3]{27} = 4.$$

Le radici positive dell' equazione sono dunque tutte più piccole di 4.

752. La regola esposta si può spesso applicare con più vantaggio decomponendo il primo membro dell'equazione in una somma di più funzioni intere.

Supponiamo infatti, per fissare le idee, che l'equazione proposta sia messa sotto la forma:

$$f(\varphi) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \varphi_3(x) + \varphi_4(x) = 0, \tag{4}$$

dove le φ sono quattro funzioni intere di x a coefficienti reali col primo coefficiente positivo. Se k_1 è il numero di coefficienti consecutivi positivi in $\varphi_1(x)$ a cominciare dal primo, A_1 il valore assoluto del suo massimo coefficiente negativo, α_1 il suo primo coefficiente e poniamo:

$$L_1 = + 1 \sqrt[k_1]{\frac{A_1}{\alpha_1}},$$

si avrà per la formola (3):

$$\varphi_1(x) > 0 \quad \text{per} \quad x \gtreqless L_1.$$

Se ora L_2, L_3, L_4 sono i limiti analogamente calcolati per $\varphi_2(x)$,

$\varphi_3(x)$, $\varphi_4(x)$, si avrà similmente:

$$\varphi_2(x) > 0 \quad \text{per} \quad x \gtreqless L_2$$
$$\varphi_3(x) > 0 \quad \text{per} \quad x \gtreqless L_3$$
$$\varphi_4(x) > 0 \quad \text{per} \quad x \gtreqless L_4.$$

Quindi, se L è il maggiore fra i quattro numeri L_1, L_2, L_3, L_4, si avrà *a fortiori* per $x \gtreqless L$:

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \varphi_3(x) + \varphi_4(x) > 0,$$

cioè per la (4):

$$f(x) > 0 \quad \text{per} \quad x \gtreqless L,$$

d'onde si conclude, come all'art. 750, che L è un limite superiore delle radici positive di $f(x) = 0$.

Il limite L così calcolato può riuscire molto più piccolo di quello che si troverebbe applicando direttamente alla funzione $f(x)$ il teorema dell'art. 749, purchè si faccia opportunamente la decomposizione di $f(x)$ in una somma di più parti.

753. Per rischiarare tutto ciò con un esempio, prendiamo l'equazione stessa di poco fa, che scriviamo come segue:

$$(4x^7 - 100) + (4x^7 - 10x^4) + (5x^5 - 18x) = 0.$$

Si ha così:

$$L_1 = 1 + \sqrt[7]{25},\ L_2 = 1 + \sqrt[3]{\frac{5}{2}},\ L_3 = 1 + \sqrt[4]{\frac{18}{5}} < 1 + \sqrt[4]{4}.$$

Di questi tre numeri il maggiore è il primo, onde si può ritenere:

$$L = 1 + \sqrt[7]{25} < 1 + \sqrt[6]{25} = 1 + \sqrt[3]{5}.$$

Le radici positive dell'equazione sono dunque tutte più piccole di 3.

754. *Limite inferiore delle radici positive.* Per determinare un limite inferiore delle radici reali positive di $f(x) = 0$, cioè un numero possibilmente grande più piccolo di tutte le radici positive, si costruisca la trasformata a radici reciproche (cfr. Cap. XIV, § 4.°) ponendo $x = \frac{1}{y}$ e si determini un limite superiore L' delle radici positive di questa trasformata. Si avrà allora, se y è una radice positiva della trasformata che corrisponde ad una radice positiva x della proposta, $y < L'$, cioè $\frac{1}{x} < L'$. Sarà dunque:

$$x > \frac{1}{L'},$$

il che equivale a dire che $\frac{1}{L'}$ è un limite inferiore delle radici positive di $f(x) = 0$.

755. *Limiti per le radici negative.* Se sull' equazione proposta $f(x)=0$ si fa la trasformazione a radici eguali ma di segno contrario $x=-y$, e si determinano due limiti uno inferiore e l'altro superiore λ e Λ che comprendano fra loro tutte le radici positive della trasformata, si avrà per ogni radice positiva y (che corrisponde ad una radice negativa x della proposta):

$$\lambda < y < \Lambda\,,$$

onde:

$$-\Lambda < -y > -\lambda,$$

ossia:

$$-\Lambda < x < -\lambda.$$

Si hanno così due limiti $-\Lambda$ e $-\lambda$ che comprendono fra loro tutte le radici negative di $f(x)=0$.

756. **Metodo di Newton.** — Per ottenere un limite superiore delle radici positive dell'equazione (1), si cerchi un numero α pel quale $f(\alpha)$, $f'(\alpha)$, $f''(\alpha)$, ... riescano tutte positive.

Poichè:

$$f(\alpha+h)=f(\alpha)+h\frac{f'(\alpha)}{\lfloor 1}+h^2\frac{f''(\alpha)}{\lfloor 2}+\ldots,$$

si avrà allora, per h positivo, $f(\alpha+h)>0$. Ciò significa appunto che il numero α è un limite superiore delle radici positive di $f(x)=0$.

Volendo applicare il metodo di Newton, si comincierà a ricercare il più piccolo numero intero ξ per il quale la funzione $f^{(n-1)}(x)$, che è di primo grado in x, riesce positiva. Si sostituirà questo numero in $f^{(n-2)}(x)$, $f^{(n-3)}(x)$, ... finchè si trovi una derivata $f^{(k)}(x)$ la quale per $x=\xi$ riesca negativa. Si aumenterà allora ξ di tante unità quanto è necessario perchè $f^{(k)}(x)$ riesca positiva. Sia $\xi'=\xi+h$ il nuovo numero così ottenuto. L'importanza pratica del metodo di Newton sta in ciò che questo nuovo numero ξ' renderà positive, a maggior ragione, anche le derivate che già si erano esaminate prima, poichè p. es.:

$$f^{(k+1)}(\xi+h)=f^{(k+1)}(\xi)+hf^{(k+2)}(\xi)+\ldots.$$

Si potrà quindi procedere allo stesso modo sostituendo ξ' nelle derivate $f^{(k-1)}$, $f^{(k-2)}$,... ed aumentandolo all'occorrenza appenachè si trovi una derivata che prende valore negativo.

757. Esempio. Sia l' equazione:

$$f(x)=x^4-6x^3+8x^2+6x-4=0.$$

Si ha:

$$\frac{1}{2}f'(x)=2x^3-9x^2+8x+3,$$

$$\frac{1}{4}f''(x)=3x^2-9x+4\,,\ \frac{1}{12}f'''(x)=2x-3.$$

Si vede che $f'''(x)$ è positiva per $x=2$; ma perchè sia positiva

anche $f''(x)$, bisogna poi aggiungere un'unità e prendere $x=3$. Per $x = 3$ si trova che $f'(x)$ ed $f(x)$ riescono positive. Il numero 3 è dunque il limite superiore cercato.

Questo risultato è preferibile a quello che si avrebbe applicando il metodo dell'art. 749, secondo il quale si sarebbe trovato come limite superiore 6.

Note ed Esercizi.

1. Per la determinazione di un limite superiore delle radici positive di un'equazione data, si hanno molti differenti metodi. Dal punto di vista teorico è a tutti preferibile il metodo di *Newton*. Sarà però più comodo nella pratica di applicare dapprima il metodo dell'art. 749 e ricorrere al metodo di Newton soltanto nel caso in cui il limite così ottenuto sembrasse troppo grande.

2. Si applichino i due metodi a trovare dei limiti per le radici positive e negative dell'equazione:

$$3x^6 - 10x^4 - 40x^3 + 200x^2 - 150x - 100 = 0.$$

3. *Se nell'equazione data ogni coefficiente negativo si prenda positivamente e si divida per la somma di tutti i coefficienti positivi che lo precedono, il più grande dei quozienti così ottenuti accresciuto di un'unità è un limite superiore delle radici positive.*

Questo metodo, di facilissima applicazione, è anche spesso adoperato nella pratica.

4. Dati i polinomi:

$$\varphi_0(x) = a_0 \ , \ \varphi_1(x) = a_0x + a_1$$
$$\varphi_2(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2$$
$$\varphi_3(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$$
$$\dots\dots\dots\dots ,$$

si ha, per la regola di Ruffini, essendo α un numero qualunque (che supporremo positivo):

$$\varphi_k(x)=(x-\alpha)\{\varphi_0(\alpha)x^{k-1}+\varphi_1(\alpha)x^{k-2}+\varphi_2(\alpha)x^{k-3}+\dots\}+\varphi_k(\alpha).$$

Da quest'identità apparisce che *se il numero* α *rende positive* $\varphi_0(\alpha)$, $\varphi_1(\alpha)$, ..., $\varphi_{k-1}(\alpha)$, $\varphi_k(\alpha)$, *la funzione* $\varphi_k(x)$ *sarà positiva per tutti i valori di* x *superiori ad* α *e crescerà col crescere di* x.

Di qui segue evidentemente che il numero α soddisfacente a queste condizioni è un limite superiore delle radici positive di tutte le equazioni:

$$\varphi_1(x) = 0 \ , \ \varphi_2(x) = 0 \ , \ \dots \ , \ \varphi_k(x) = 0.$$

Si ha così un altro metodo per determinare un limite superiore delle radici positive dell'equazione:

$$\varphi_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0.$$

Esso consiste nel prendere un numero α per il quale $\varphi_1(\alpha)$ sia positivo ed accrescere poi, occorrendo, questo numero successivamente finchè riescano positive tutte le quantità $\varphi_1(\alpha)$, $\varphi_2(\alpha)$, ..., $\varphi_n(\alpha)$. L'ultimo valore di α così ottenuto sarà il limite superiore cercato.

Questo metodo, analogo a quello di Newton, è stato proposto da *Laguerre* per la grande comodità di calcolo che esso presenta, potendosi cal-

colare assai facilmente i successivi valori $\varphi_1(\alpha)$, $\varphi_2(\alpha)$ ... mediante la regola di Ruffini:

$$\varphi_k(\alpha) = \alpha\varphi_{k-1}(\alpha) + a_k.$$

§ 2.° — Separazione delle radici reali di un' equazione a coefficienti reali.

758. Per procedere alla determinazione delle radici reali di una equazione data $f(x) = 0$ a coefficienti reali, si comincierà dal determinare (con uno dei metodi del § prec.) due limiti l ed $L (l < L)$ possibilmente vicini allo zero entro i quali cadano tutte le radici reali dell' equazione.

Fatto ciò, si passerà alla così detta *separazione* delle radici reali. Separare le radici reali dell'equazione $f(x) = 0$ significa assegnare per ogni singola radice due numeri che la comprendano fra loro, senza comprendere fra loro alcun' altra radice. Così per es., se l'equazione abbia tre sole radici reali α, β, γ, esse si diranno separate quando si siano determinati p. es. due numeri c_1 e c_2 compresi fra i limiti l ed L in modo che si abbia:

$$l < \alpha < c_1 < \beta < c_2 < L.$$

Per la separazione delle radici reali è specialmente utile, nella pratica, il teorema di Budan sia per la facilità di costruire le funzioni:

$$f(x)\,,\; f'(x)\,,\; f''(x)\,,\; \ldots\,,\; f^{(n)}(x) \tag{1}$$

come per la facilità di calcolarne i valori (o piuttosto i segni) per valori speciali di x.

È chiaro infatti che i segni delle (1) coincidono coi segni dei quozienti:

$$f(x)\,,\; \frac{f'(x)}{\lfloor 1}\,,\; \frac{f''(x)}{\lfloor 2}\,,\; \frac{f'''(x)}{\lfloor 3}$$

i quali si calcolano facilmente col procedimento di Horner che impareremo a conoscere in seguito (cfr. Cap. XIV, § 2°).

759. Per applicare il teorema di Budan, immaginiamo diviso l' intervallo compreso fra i limiti l ed L in k intervalli più piccoli (p. es. eguali fra loro) mediante l' intercalazione di certi numeri a_1, a_2, a_3 ... a_{k-1}. Ciò posto si cominci col sostituire nella serie di funzioni (1) una volta $x = l$ e poi $x = a_1$ e si veda qual' è il numero μ_1 di variazioni che questa serie perde passando da $x = l$ ad $x = a_1$. Diremo allora brevemente che la serie di Budan perde μ_1 variazioni nell'intervallo compreso fra l ed a_1. Si trovi quindi similmente il numero μ_2 di variazioni perdute dalla serie di Budan nel secondo intervallo fra a_1 ed a_2 e così di seguito fino a determinare il numero μ_k di variazioni perdute nell' ultimo intervallo fra a_{k-1} ed L. Poichè la serie di Budan non può avere più di n variazioni (detto n il grado dell' equazione proposta) e queste si perdono tutte passando da $-\infty$ a $+\infty$ senza che mai se ne gua-

dagni alcuna durante il crescere di x, è chiaro che si avrà sempre:

$$\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_k \leqq n. \tag{2}$$

Intanto quelli fra gl'intervalli l, a_1; a_1, a_2; ... nei quali non avviene perdita di variazioni ($\mu = 0$) possono senz'altro escludersi da ogni ulteriore esame, poichè è certo pel teorema di Budan che in essi non può trovarsi alcuna radice dell'equazione. Esclusi questi intervalli, resterà un certo numero λ d'intervalli per ciascuno dei quali avviene la perdita di una o più variazioni. In uno qualunque di quest'intervalli cadrà certamente almeno una radice, se la perdita di variazioni è dispari; in caso contrario resta dubbio se l'intervallo contenga un numero pari di radici ovvero non contenga alcuna radice.

In ogni modo il numero λ degli intervalli che restano ad esaminarsi, sarà minore di n, come segue evidentemente dalla (2).

Se ora suddividiamo ciascuno di questi λ intervalli in k intervalli ancora più piccoli, avremo in tutto λk intervalli, dei quali si escluderanno come sopra quelli in cui non avviene perdita di variazioni. Resteranno così ad esaminarsi λ' intervalli e per la stessa ragione di poco fa si avrà $\lambda' < n$.

Così procedendo si dovranno esaminare degl'intervalli sempre più piccoli, nel mentre che il numero di quest'intervalli sarà sempre inferiore o, nel caso più sfavorevole, eguale al più al grado n dell'equazione proposta.

Così ad esempio se l'equazione sia del 5° grado e, dopo un certo numero di suddivisioni, si sia giunti a suddividere l'intervallo fra l ed L in 1000 piccoli intervalli fra loro eguali, di questi 1000 intervalli soltanto 5 al più resteranno ad esaminarsi, nel mentre che degli altri si saprà con certezza che non possono contenere radici dell'equazione.

Impiccolendo così sufficientemente gl'intervalli, si giungerà necessariamente dopo un numero finito di suddivisioni ad intervalli abbastanza piccoli, perchè in ognuno di essi sia compresa una sola radice distinta dell'equazione proposta. Le radici si troveranno allora separate.

Supponendo poi, come del resto è sempre lecito, che l'equazione non abbia radici multiple, sarà facile decidere se in uno qualunque di questi ultimi intervalli sia compresa, o pur no, una radice. Poichè, se vi è compresa una radice, $f(x)$ dovrà cambiare di segno sostituendo per x i due valori estremi dell'intervallo.

760. Se l'equazione abbia due radici fra loro molto vicine, o se in grande vicinanza di una radice dell'equazione si trovi una radice di qualcuna delle derivate, potrà accadere che, anche spingendo molto innanzi la suddivisione degl' intervalli, resti sempre ciononondimeno qualche intervallo *dubbio*, pel quale cioè la serie di Budan perda più di una variazione. Nel primo caso è chiaro che questo inconveniente è inerente alla natura stessa del problema. Nel secondo caso invece può accadere che l'intervallo da esaminarsi contenga già una sola radice dell'equazione o non ne contenga affatto, e, potendo avere la certezza di ciò, è inutile allora

di proseguire colla suddivisione dell'intervallo, mediante il quale, se esiste, si troverebbe già completamente separata.

È importante quindi di poter conoscere *a priori* un limite inferiore δ della piccolezza fino alla quale sarà necessario di giungere per questi successivi intervalli. A tale oggetto basterà determinare un numero positivo δ che sia più piccolo della differenza che intercede fra le due radici reali che più sono vicine fra loro. Fatto ciò, è chiaro che, quando gl'intervalli ottenuti colla successiva divisione siano divenuti eguali o più piccoli di δ, ogni intervallo non potrà comprendere più di una sola radice dell'equazione; perchè, se ne comprendesse due, queste due differirebbero fra loro per meno di δ, contro il supposto.

A questo punto sarà dunque inutile procedere colla suddivisione, poichè per accertare se l'intervallo contenga o no un'unica radice dell'equazione, basterà l'esame dei segni di $f(x)$ per x eguale ai due valori estremi dell'intervallo.

Vedremo in altro luogo (cfr. Cap. XII) come si possa determinare un cosiffatto limite δ mediante il calcolo del così detto *discriminante* dell'equazione proposta.

Note ed Esercizi.

1. È appena necessario far osservare che la separazione delle radici di un'equazione data si potrebbe effettuare assolutamente allo stesso modo applicando il teorema di Sturm. Questo metodo sarebbe anzi preferibile dal punto di vista teorico, perchè, ad uno stadio qualunque della successiva suddivisione degli intervalli, non resterebbero mai intervalli dubbi. Nella pratica si suole però dare la preferenza al teorema di Budan, specialmente se l'equazione sia di grado un pò elevato, sia per la maggiore facilità di costruzione delle funzioni di Budan, come per la maggiore facilità di calcolarne i valori per valori speciali della variabile. D'altra parte conviene osservare che, per una medesima suddivisione in intervalli, come il numero degli intervalli che resteranno ad esaminarsi applicando il teorema di Sturm non supera mai il numero delle radici reali dell'equazione, applicando invece il teorema di Budan non supererà mai il grado dell'equazione ed il numero di quelli fra questi intervalli che restano *dubbi* non supererà mai, come è facile riconoscere, la metà di detto grado.

2. Separare le radici dell'equazione:

$$x^5 + x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 3x + 1 = 0$$

che sono tutte comprese fra -2 e $+2$, incominciando col sostituire nelle funzioni di Budan i valori interi $x = -2, -1, 0, 1, 2$. Con ciò resteranno separate tre radici comprese risp. negli intervalli $(-1, 0)$; $(0, 1)$; $(1, 2)$. Resteranno a separarsi altre due radici comprese nell'intervallo $(-2, -1)$.

§ 3.° — Applicazione del calcolo delle differenze.

761. Se $f(x)$ è una funzione ben determinata della variabile x ed h un incremento costante, *che si suppone fissato una volta per sempre*, la differenza $f(x+h) - f(x)$ è una nuova funzione di x che si suol chiamare la *differenza prima* di $f(x)$ e designare col simbolo $\Delta f(x)$.

Il simbolo Δ premesso alla funzione $f(x)$ si può dunque considerare come un simbolo operatore che cambia $f(x)$ in $f(x+h)-f(x)$. Per tal ragione col simbolo $\Delta^2 f(x)$ s'intenderà quella funzione che si deduce applicando due volte di seguito l'operatore Δ alla funzione $f(x)$, cioè la differenza prima della differenza prima di $f(x)$. Questa nuova funzione si chiama brevemente la *differenza seconda* di $f(x)$. Si ha dunque:

$$\Delta^2 f(x) = \Delta[\Delta f(x)] = \Delta[f(x+h)-f(x)]$$

$$=[f(x+2h)-f(x+h)]-[f(x+h)-f(x)]=f(x+2h)-2f(x+h)+f(x).$$

Analogamente si chiama in generale differenza k^{ma} della funzione $f(x)$, e si indica con $\Delta^k f(x)$, quella funzione che si deduce da $f(x)$ applicandole k volte di seguito l'operatore Δ.

762. *La differenza* k^{ma} *della somma di due (o più) funzioni è uguale alla somma delle differenze* k^{me} *delle singole funzioni.*

È senz' altro evidente che:

$$\Delta[f(x) + \varphi(x)] = \Delta f(x) + \Delta\varphi(x).$$

Applicando un' altra volta questo principio si avrà dunque:

$$\Delta^2[f + \varphi] = \Delta[\Delta f + \Delta\varphi] = \Delta^2 f + \Delta^2\varphi$$

e applicandolo ancora una volta:

$$\Delta^3[f + \varphi] = \Delta[\Delta^2 f + \Delta^2\varphi] = \Delta^3 f + \Delta^3\varphi$$

e così di seguito.

763. Se $f(x)$ è una funzione intera del grado n in x, si ha pel teorema di Taylor:

$$f(x+h) - f(x) = h\left\{f'(x) + \frac{h}{\underline{|2}} f''(x) + \frac{h^2}{\underline{|3}} f'''(x) + \dots\right\},$$

onde si vede che la prima differenza $\Delta f(x)$ è un polinomio in x del grado $n-1$.

La seconda differenza sarà quindi una funzione del grado $n-2$ e la k^{ma} differenza sarà una funzione intera di x del grado $n-k$, poichè ogni applicazione del simbolo operatore Δ diminuisce di un' unità il grado della funzione.

In particolare la n^{ma} differenza di $f(x)$ sarà una funzione intera di x del grado 0, cioè una semplice costante. Le ulteriori differenze $(n+1)^{ma}$, $(n+2)^{ma}$, ... avranno quindi tutte il valore costante 0.

764. Quest'ultima osservazione riesce preziosa per il calcolo pratico dei valori che assume una funzione intera $f(x)$ per una serie di valori di x procedenti in progressione aritmetica, cioè per un certo valore x_0 e per i valori $x_0 + h$, $x_0 + 2h$, ...; detta h la ragione della progressione aritmetica, che si sceglierà appunto come incremento costante per la formazione delle differenze dei diversi ordini.

In luogo di scrivere:

$$f(x_0)\,,\ f(x_0+h)\,,\ f(x_0+2h)\,,\ f(x_0+3h)\,,\ \ldots$$

scriveremo brevemente:

$$u_0\,,\ u_1\,,\ u_2\,,\ u_3\,,\ \ldots .$$

Avendo così già denotato con u_i il valore speciale che assume $f(x)$ per $x = x_0 + ih$, designeremo, in coerenza a ciò, con $\Delta^k u_i$ il valore speciale che prende per $x = x_0 + ih$ la differenza k^{ma} $\Delta^k f(x)$.

Possiamo pertanto costruire il quadro seguente:

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	. . . .	$\Delta^{(n)} f(x)$
x_0	u_0	Δu_0	$\Delta^2 u_0$	. . . .	c
$x_0 + h$	u_1	Δu_1	$\Delta^2 u_1$	. . . .	c
$x_0 + 2h$	u_2	Δu_2	$\Delta^2 u_2$	. . . .	c
$x_0 + 3h$	u_3	Δu_3	$\Delta^2 u_3$	. . . .	c
$x_0 + 4h$	u_4	Δu_4	$\Delta^2 u_4$	. . . .	c
. .	. .	. .	. .	. . . .	c
. .	. .	. .	. .	. . . .	c

(1)

del quale la legge di costruzione *numerica* è semplicissima, poichè *i numeri di una stessa colonna non sono altro che le differenze fra i numeri successivi della colonna precedente.*

Se poniamo infatti per brevità:

$$\Delta^{k-1} f(x) = \psi(x), \tag{2}$$

si avrà:

$$\Delta^k f(x) = \psi(x+h) - \psi(x). \tag{3}$$

Sostituendo ora in quest'ultima identità in luogo di x il valore speciale $x_0 + ih$, se ne deduce:

$$\Delta^k u_i = \psi(x_0 + ih + h) - \psi(x_0 + ih). \tag{4}$$

Ma d'altra parte, sostituendo nella (2) in luogo di x una volta $x_0 + ih$ e poi $x_0 + ih + h$, si ha:

$$\Delta^{k-1} u_i = \psi(x_0 + ih) \tag{5}$$

$$\Delta^{k-1} u_{i+1} = \psi(x_0 + ih + h). \tag{6}$$

Dalle (4), (5) e (6) segue dunque appunto che:

$$\Delta^k u_i = \Delta^{k-1} u_{i+1} - \Delta^{k-1} u_i. \tag{7}$$

765. Sussistendo fra i numeri del quadro (1) le relazioni (7), è facile scorgere che i numeri del quadro stesso si potranno calcolare

per mezzo di semplici *addizioni*, appenachè si conoscano i numeri della prima orizzontale; giacchè allora si potrà anche considerare come conosciuta completamente l' ultima colonna i cui elementi sono tutti eguali, come si è osservato.

Quanto poi ai numeri della prima orizzontale, essi si determineranno mediante semplici *sottrazioni* dopochè si siano calcolati i primi $n+1$ numeri della prima colonna: $u_0, u_1, u_2 \dots u_n$, essendo n il grado di $f(x)$.

766. Esempio. — Si vogliano calcolare i valori che prende la funzione:

$$f(x) = 4x^3 - 2x^2 + x + 2$$

per i valori speciali di x:

$$-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots.$$

Colla sostituzione diretta dei primi quattro valori in $f(x)$ si troverà subito:

$$f(-1) = -5, \; f(0) = 2, \; f(1) = 5, \; f(2) = 28.$$

Si avrà così:

$$\begin{array}{llll} u_0 = -5 & \Delta u_0 = u_1 - u_0 = 7 & \Delta^2 u_0 = -4 & \Delta^3 u_0 = 24 \\ u_1 = 2 & \Delta u_1 = u_2 - u_1 = 3 & \Delta^2 u_1 = 20 & \Delta^3 u_1 = 24 \\ u_2 = 5 & \Delta u_2 = u_3 - u_2 = 23 & & \Delta^3 u_2 = 24 \\ u_3 = 28 & & & \Delta^3 u_3 = 24. \end{array} \quad (8)$$

Fatto ciò, si potrà calcolare u_4 con sole tre addizioni, poichè si ricaverà successivamente:

$$\begin{aligned} \Delta^2 u_2 &= \Delta^2 u_1 + \Delta^3 u_1 = 20 + 24 = 44 \\ \Delta u_3 &= \Delta u_2 + \Delta^2 u_2 = 23 + 44 = 67 \\ u_4 &= u_3 + \Delta u_3 = 28 + 67 = 95. \end{aligned}$$

Con ciò il quadro (7) si troverà accresciuto di una nuova diagonale, cioè diverrà:

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$
-1	-5	7	-4	24
0	2	3	20	24
1	5	23	44	24
2	28	67		24
3	95			24
4				24
5				24

E così si seguiterà aggiungendo allo stesso modo tante diagonali nuove per quanti sono i numeri della prima colonna che si vogliano calcolare.

767. Se è data una certa funzione di x:

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n \tag{9}$$

e si ponga per brevità (*):

$$x(x-h)(x-2h)\dots(x-(\mu-1)h) = x^{\overline{\mu}},$$

è facile riconoscere che si potranno sempre determinare ed *in un unico modo* dei nuovi coefficienti costanti $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ tali da aversi identicamente:

$$f(x) = \alpha_0 x^{\overline{n}} + \alpha_1 x^{\overline{n-1}} + \dots + \alpha_{n-1} x + \alpha_n. \tag{9)'$$

Eguagliando infatti i due coefficienti di x^n nelle due espressioni (7) e (7)', si avrà dapprima $\alpha_0 = a_0$. Eguagliando i coefficienti di x^{n-1} si avrà un'equazione che conterrà soltanto α_0 ed α_1 e farà quindi conoscere il valore di α_1. Eguagliando poi i coefficienti di x^{n-2} si avrà un'equazione di primo grado in α_0, α_1, α_2 dalla quale, essendo già noti α_0 ed α_1, resterà determinato in modo unico il valore di α_2 e così di seguito.

768. Ciò posto, si ha per la definizione di $\Delta f(x)$:

$$\Delta f(x) = \alpha_0[(x+h)^{\overline{n}} - x^{\overline{n}}] + \alpha_1[(x+h)^{\overline{n-1}} - x^{\overline{n-1}}] + \dots$$

Ma:

$$\begin{aligned}(x+h)^{\overline{\mu}} - x^{\overline{\mu}} &= (x+h)x(x-h)\dots(x-(\mu-2)h)\\ &\quad - x(x-h)\dots(x-(\mu-2)h)(x-(\mu-1)h)\\ &= x(x-h)\dots(x-(\mu-2)h)[(x+h)-(x-(\mu-1)h)] = \mu h x^{\overline{\mu-1}}.\end{aligned} \tag{10}$$

Quindi:

$$\Delta f(x) = h\{n\alpha_0 x^{\overline{n-1}} + (n-1)\alpha_1 x^{\overline{n-2}} + (n-2)\alpha_2 x^{\overline{n-3}} + \dots + \alpha_{n-1}\}. \tag{11}$$

Vediamo così che: *il rapporto incrementale:*

$$\frac{\Delta f(x)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

si deduce dalla forma (9)' *di* f(x) *precisamente colla stessa legge di derivazione mediante cui dalla forma ordinaria* (9) *di* f(x) *si dedurrebbe* f'(x).

769. Prendendo ora, della funzione (11) la differenza prima che sarà eguale a $\Delta^2 f(x)$, si avrà immediatamente applicando la re-

(*) Per $h = 0$, $x^{\overline{\mu}}$ coinciderà appunto coll'ordinaria potenza x^μ.

gola di derivazione ora dimostrata:

$$\Delta^2 f(x)=h^2\{n(n-1)\alpha_0 x^{\overline{n-2}}+(n-1)(n-2)\alpha_1 x^{\overline{n-3}}+\ldots+2\alpha_{n-2}\}. \quad (12)$$

Procedendo allo stesso modo si troverà:

$$\Delta^3 f(x) = h^3\{n(n-1)(n-2)\alpha_0 x^{\overline{n-3}} + \ldots\} \quad (13)$$

. . . . , . .

e per ultimo:

$$\Delta^n f(x) = \lfloor n \alpha_0 = \lfloor n a_0.$$

770. Se con $\Delta^\mu f(0)$ intendiamo quel valore speciale che prende $\Delta^\mu f(x)$ quando si ponga $x=0$, sostituendo $x=0$ nelle (11), (12), (13),..., si trova (per $h=1$):

$$\Delta' f(0)=\alpha_{n-1}\ ,\ \Delta^2 f(0)=\lfloor 2\,\alpha_{n-2}\ ,\ \Delta^3 f(0)=\lfloor 3\,\alpha_{n-3}\ ,\ldots \quad (14)$$

Mediante queste formole si potranno calcolare i coefficienti α_0, α_1, α_2 ... della forma (9)' di $f(x)$ quando siano dati i coefficienti della forma (9). Sostituendo poi i valori delle a_0, α_1, ... ricavati dalle (14) in (9)', si ha la formola:

$$f(x) = f(0) + x\frac{\Delta' f(0)}{1} + x^{\overline{2}}\frac{\Delta^2 f(0)}{\lfloor 2} + \ldots + x^{\overline{n}}\frac{\Delta^n f(0)}{\lfloor n}. \quad (15)$$

771. Esempio. — Per:

$$f(x) = 4x^3 - 2x^2 + x + 2$$

si è già trovato all' art. 766 (dove si è preso $h=1$):

$$f(0) = 2\ ;\ \Delta f(0) = 3\ ,\ \Delta^2 f(0) = 20\ ,\ \Delta^3 f(0) = 24.$$

Si ha dunque per $f(x)$ la nuova espressione:

$$f(x) = 2 + \frac{3}{1}x + \frac{20}{\lfloor 2}x^{\overline{2}} + \frac{24}{\lfloor 3}x^{\overline{3}} = 4x^{\overline{3}} + 10x^{\overline{2}} + 3x + 2.$$

772. La teoria esposta in questo § può avere molta importanza pratica nei calcoli da farsi per la separazione delle radici reali di $f(x)=0$.

Infatti, sia che si applichi il teorema di Budan, come se si applichi quello di Sturm, potrà occorrere facilmente di dover suddividere l'intervallo compreso fra certi valori speciali x_0 ed x_1 in un numero molto grande di intervalli e questi si prenderanno ordinariamente tutti eguali fra loro.

Si tratterà allora di calcolare i valori che assume una stessa funzione $\psi(x)$, appartenente alla serie di Budan od a quella di Sturm, per i valori speciali di x:

$$x_0\ ,\ x_0+h\ ,\ x_0+2h\ ,\ \ldots\ ,\ x_1$$

essendo h la grandezza dei nuovi intervalli.

Se ora m sia il grado di $\psi(x)$, basterà calcolare (art. 765) le

differenze, a base h:

$$\psi(x_0)\ ,\ \Delta\psi(x_0)\ ,\ \Delta^2\psi(x_0)\ ,\ \ldots\ ,\ \Delta^{(m)}\psi(x_0)\ ;$$

dopodichè tutti i valori speciali $\psi(x_0 + jh)$ si potranno ottenere per mezzo di semplici operazioni di addizione.

773. È utile notare che l'ultima differenza $\Delta^m\psi(x_0)$ è uguale (articolo 769) al primo coefficiente di $\psi(x)$ moltiplicato per $\lfloor m$. Così, nell'esempio dell'art. 766, sapendosi già *a priori* che $\Delta^3 u_0=24$, poteva bastare il calcolo dei tre soli valori $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$. Sarà però vantaggioso di avere eseguito il calcolo nel modo che si era indicato, in quanto che si potrà avere una riprova dell'esattezza dei calcoli fatti verificando che l'ultima differenza calcolata coincide effettivamente col detto valore già conosciuto.

Note ed Esercizi.

1. Per maggiori sviluppi sulla teoria delle funzioni intere di x ordinate secondo le potenze $x^{\overline{n}}$, $x^{\overline{n-1}}$, ... rimandiamo al § che segue, come pure alla memoria: *l'analisi algebrica e l'interpretazione fattoriale delle potenze* (*Giornale di matematiche di Battaglini*, Vol. XXXI). Osserviamo intanto fin d'ora che il calcolo delle differenze, trattato secondo quest'ordine d'idee, conduce ad altri teoremi riguardanti il problema della separazione delle radici, che presentano molta analogia con quelli già esposti nel Cap. IX.

2. Ci limiteremo qui a dimostrare il teorema seguente che contiene in sè come caso particolare la regola dei segni di Cartesio (che si dedurrà facendo $h = 0$).

Data l'equazione:

$$\alpha_0 x^{\overline{n}} + \alpha_1 x^{\overline{n-1}} + \ldots + \alpha_{n-1}x + \alpha_n = 0,$$

dove:

$$x^{\overline{\mu}} = x(x-h)(x-2h)\ldots\big(x-(\mu-1)h\big)\ ,\ h>0,$$

il numero delle sue radici reali positive maggiori di $(n-1)h$ *non può superare il numero delle variazioni di segno nella serie dei coefficienti* $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Basterà dimostrare che se un polinomio:

$$a_0 x^{\overline{m}} + a_1 x^{\overline{m-1}} + \ldots + a_m \qquad (1)$$

si moltiplica per $x-\rho$, essendo $\rho > mh$, e si ordina quindi il risultato secondo le potenze $x^{\overline{m+1}}$, $x^{\overline{m}}$, $x^{\overline{m-1}}$, ... il numero di variazioni nei coefficienti del nuovo polinomio supera sempre di un numero dispari di unità il numero delle variazioni che si avevano nel polinomi1).o)

Sia infatti:

$$\psi(x)(x-\rho_1)(x-\rho_2)\ldots(x-\rho_\lambda) = 0 \qquad (2)$$

l'equazione proposta in cui si siano messi in evidenza i fattori lineari corrispondenti alle radici $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\lambda$ maggiori di $(n-1)h$. Supposto dimostrato quanto si è detto or ora, ciascuna delle funzioni intere:

$$\psi(x)\ ,\ \psi(x)(x-\rho_1)\ ,\ \psi(x)(x-\rho_1)(x-\rho_2)\ ,\ \ldots$$

ordinata come la (1) conterrà un numero dispari di variazioni in più della precedente. Quindi il numero delle variazioni che già esistevano in $\psi(x)$

si troverà accresciuto, dopo la moltiplicazione per $(x-\rho_1)(x-\rho_2)\ldots(x-\rho_\lambda)$, di $\lambda+2k$, essendo k un intero positivo o nullo.

3. Per completare la dimostrazione, ci rimane a far vedere che il polinomio (1) ha un numero dispari di variazioni in meno del polinomio analogo che si ottiene sviluppando il prodotto di (1) per $(x-\rho)$.

Questo sviluppo è il seguente:

$$\begin{array}{r|r|r|r}
a_0x^{\overline{m+1}} \quad + a_1 & x^{\overline{m}} \quad + a_2 & x^{\overline{m-1}} \quad + a_3 & x^{\overline{m-2}} + \ldots + 0 \\
+ mha_0 & +(m-1)ha_1 & +(m-2)ha_2 & +0 \\
- \rho a_0 & - \rho a_1 & - \rho a_2 & - \rho a_m
\end{array} \qquad (3)$$

Ciò posto, siano ordinatamente:

$$a_r\,,\ a_s\,,\ a_t\,,\ \ldots\,,\ a_\mu \qquad (4)$$

quelli fra i coefficienti di (1) nei quali accadono le variazioni, cosicchè p. es. i coefficienti compresi fra a_s ed a_t abbiano tutti lo stesso segno di a_s opposto a quello di a_t. Nello sviluppo (3) si ha al posto del coefficiente a_t il coefficiente:

$$a_t + \{(m-t+1)h - \rho\}a_{t-1}$$

che avrà però lo stesso segno di a_t, poichè a_{t-1} è di segno opposto a quello di a_t e la parentesi $\{(m-t+1)h-\rho\}$ ha valore negativo per l'ipotesi fatta $\rho > mh$.

Se si considera finalmente che l'ultimo coefficiente dello sviluppo (3), cioè $-\rho a_m$, ha segno opposto ad a_m, e quindi anche opposto al segno dell'ultimo coefficiente a_μ di (4), si vede che i coefficienti dello sviluppo (3) presenteranno in ognuno dei posti corrispondenti agli indici:

$$r\,,\ s\,,\ t\,,\ \ldots\,,\ \mu\,,\ m+1$$

altrettante variazioni, alle quali se ne potranno aggiungere anche altre (sempre però evidentemente in numero *pari*) provenienti dai segni, che non conosciamo, dei coefficienti di (3) compresi fra il posto r^{mo} ed il posto s^{mo}, ovvero fra l's^{mo} ed il t^{mo}, ecc.

È dunque chiaro che i coefficienti di (3) presenteranno un numero di variazioni eguale a quello della successione (4) aumentato di un numero dispari di unità, c. d. d.

4. Tenuto conto delle formole dell'art. 770, il teorema ora dimostrato si può anche enunciare così:

Il numero delle radici positive dell'equazione di grado n, $f(x)=0$, *che sono maggiori di* $(n-1)h$, *non può superare il numero delle variazioni contenute nella successione*:

$$f(0)\,,\ \Delta f(0)\,,\ \Delta^2 f(0)\,,\ \ldots\,,\ \Delta^{(n)} f(0)\,,$$

dove le differenze s'intendono riferite all'incremento finito h.

Il teorema di Budan ci darebbe invece come limite superiore di questo stesso numero di radici, che sono poi le radici comprese fra $(n-1)h$ e $+\infty$, il numero delle variazioni della successione:

$$f\big((n-1)h\big)\,,\ f'\big((n-1)h\big)\,,\ f''\big((n-1)h\big),\ldots,\ f^{(n)}\big((n-1))h\big).$$

5. Si deduca come corollario del teorema ora dimostrato che: *il numero delle radici positive, comprese fra* 0 *e* k, *dell'equazione*:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0 \qquad (5)$$

non può superare il numero delle variazioni contenute nella successione:

$$\varphi(0)\,,\ \Delta\varphi(0)\,,\ \Delta^2\varphi(0)\,,\ \ldots\,,\ \Delta^n\varphi(0)\,,$$

essendo;

$$\varphi(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

e l'incremento h, *con cui sono costruite le differenze* Δ, *essendo preso eguale ad* $\frac{1}{(n-1)k}$.

6. Si deduca ancora come corollario un limite superiore del numero di radici di $f(x) = 0$ comprese fra due numeri qualunque, espresso dal numero delle variazioni di un'unica successione di differenze di funzioni, determinando opportunamente l'argomento delle funzioni e l'incremento h delle differenze.

§ 4.° — Altri teoremi sul calcolo delle differenze.

774. Da quanto si è esposto nel § precedente già appare che per mettere in completa evidenza la perfetta analogia fra le differenze dei diversi ordini di una funzione $f(x)$ e le sue derivate ordinarie $f'(x)$, $f''(x)$, ..., conviene considerare in luogo della semplice differenza $\Delta f(x)$ il *rapporto incrementale:*

$$\frac{\Delta f(x)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \tag{1}$$

Noi chiameremo questo rapporto la *prima derivata a differenza finita* h della funzione $f(x)$, per distinguerlo dall'ordinaria derivata $f'(x)$ e la indicheremo con $\overline{f'(x)}$.

È chiaro che, facendo tendere h allo 0, la derivata a differenza finita h tende a confondersi (art. 684) coll'ordinaria derivata $f'(x)$. Si può dunque considerare la $f'(x)$ come il caso particolare di $\overline{f'(x)}$ che corrisponde ad $h = 0$; o meglio si potrà dire che $f'(x)$ è la derivata a *differenza infinitesima* di $f(x)$ (*).

775. Prendendo di $\overline{f'(x)}$ un'altra volta la derivata a differenza finita h, si avrà la *seconda derivata a differenza finita* h che si indicherà similmente con $\overline{f''(x)}$; e si avrà evidentemente:

$$\overline{f''(x)} = \frac{\Delta\left(\frac{\Delta f(x)}{h}\right)}{h} = \frac{\Delta^2 f(x)}{h^2}.$$

In generale, si indicherà con $\overline{f^{(k)}(x)}$ la k^{ma} derivata, a differenza finita h, di $f(x)$; e si avrà:

$$\overline{f^{(k)}(x)} = \frac{\Delta^k f(x)}{h^k}. \tag{2}$$

(*) Invero il rapporto incrementale (1) non avrebbe senso per $h=0$. Però si considererà il simbolo $\frac{f(x+0)-f(x)}{0}$ come l'equivalente di

$$\lim_{h=0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x).$$

776. Ciò premesso, *la legge di derivazione* delle funzioni intere si può enunciare allo stesso modo sia che si tratti di derivata a differenza finita h ovvero di derivata ordinaria. Soltanto, in quest'ultimo caso si applicherà la legge di derivazione alla funzione $f(x)$ ordinata secondo le potenze ordinarie di x, nel mentre che nel primo caso s'intenderà applicarla ad $f(x)$ ordinata secondo le potenze $x^{\overline{n}}$, $x^{\overline{n-1}}$, ...

Invero, se sia data la funzione intera di grado n:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n \tag{3}$$

$$= \alpha_0x^{\overline{n}} + \alpha_1x^{\overline{n-1}} + \alpha_2x^{\overline{n-2}} + \ldots + \alpha_n,$$

si ha:

$$f'(x) = \lim_{h=0}\frac{\Delta f(x)}{h} = na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \ldots \tag{4}$$

ed affatto analogamente (art. 768):

$$\overline{f'(x)} = \frac{\Delta f(x)}{h} = n\alpha_0x^{\overline{n-1}} + (n-1)\alpha_1x^{\overline{n-2}} + \ldots . \tag{5}$$

Di qui si deduce ora colla stessa legge di derivazione:

$$\overline{f''(x)} = n(n-1)\alpha_0x^{\overline{n-2}} + (n-1)(n-2)\alpha_1x^{\overline{n-3}} + \ldots \tag{6}$$

e così di seguito.

777. A questo punto è importante di osservare che la perfetta analogia fra i due processi derivativi ha per conseguenza una perfetta analogia fra molti teoremi dell'algebra ottenuti coll'uso delle derivazioni ordinarie ed altri teoremi ottenuti coll'uso delle differenze finite. Ciò dipende dal fatto che, oltre alla perfetta somiglianza dei due processi derivativi, si ha, come già si è notato (art. 499), una completa somiglianza fra lo sviluppo della potenza ordinaria del binomio:

$$(x+y)^n = x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \ldots, \tag{7}$$

che è la prima base del calcolo algebrico, e lo sviluppo della potenza:

$$(x+y)^{\overline{n}} = x^{\overline{n}} + \binom{n}{1}x^{\overline{n-1}}y + \binom{n}{2}x^{\overline{n-2}}y^2 + \ldots . \tag{8}$$

Si ha così evidentemente una categoria assai estesa di teoremi algebrici i quali *non cessano di esser veri qualora nel loro enunciato si sostituisca ad ogni potenza* x^n *la potenza corrispondente* $x^{\overline{n}} = x(x-h)(x-2h)\ldots(x-(n-1)h)$ *e ad ogni derivazione ordinaria la corrispondente derivazione a differenza finita* h.

778. Come prima applicazione importante di questo principio,

ci sarà lecito di scrivere senz'altro la seguente formola:

$$f(x+y)=f(x)+y\overline{f'(x)}+\frac{y^{\overline{2}}}{\underline{|2}}\overline{f''(x)}+\frac{y^{\overline{3}}}{\underline{|3}}\overline{f'''(x)}+\dots \qquad \text{(I)}$$

la quale altro non è che l'ordinaria formola di Taylor interpretata nel nuovo modo.

Invero la formola di Taylor è stata da noi dedotta (art. 501-503), partendo dalla funzione $f(x)$ ordinata secondo le potenze x^n, x^{n-1},.., mediante il solo uso dello sviluppo della potenza del binomio e dell'ordinaria derivazione. Se dunque si parta invece da $f(x)$ ordinata secondo le potenze $x^{\overline{n}}$, $x^{\overline{n-1}}$, ... e si ripetano le stesse deduzioni sostituendo le potenze x^{μ} con $x^{\overline{\mu}}$ e le derivate $f^{(k)}$ con le $\overline{f^{(k)}}$, il risultato cui si perverrà sarà certamente esatto e sarà precisamente la formola (I).

779. Se nella formola (I), che vale qualunque siano i valori di x ed y, si cambia x con y e si pone quindi $y=0$, se ne deduce la seguente:

$$f(x)=f(0)+x\frac{\overline{f'(0)}}{\underline{|1}}+x^{\overline{2}}\frac{\overline{f''(0)}}{\underline{|2}}+\dots \qquad \text{(II)}$$

che corrisponde alla formola (8) dell'art. 504.

Finalmente se nella (I) sostituiamo $y-x$ in luogo di y e scambiamo poi x con y, troviamo la formola:

$$f(x)=f(y)+(x-y)\frac{\overline{f'(x)}}{\underline{|1}}+(x-y)^{\overline{2}}\frac{\overline{f''(x)}}{\underline{|2}}+\dots \qquad \text{(III)}$$

che corrisponde alla (9) dello stesso articolo.

780. Se nelle formole (I), (II), (III) sostituiamo in luogo delle potenze $x^{\overline{\mu}}$, $y^{\overline{\mu}}$ i loro sviluppi $x(x-h)\dots$, $y(y-h)\dots$ ed in luogo di $\overline{f^{(k)}}$ il simbolo equivalente (art. 775): $\frac{\Delta^k}{h^k}$, esse assumono risp. la forma:

$$f(x+h)=f(x)+\frac{y}{h}\Delta f(x)+\frac{y(y-h)}{h^2}\Delta^2 f(x)+\dots \qquad \text{(I')}$$

$$=f(x)+\frac{y}{h}\cdot\frac{\Delta f(x)}{1}+\frac{y}{h}\left(\frac{y}{h}-1\right)\cdot\frac{\Delta^2 f(x)}{\underline{|2}}+\dots$$

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{h}\cdot\frac{\Delta f(0)}{\underline{|1}}+\frac{x}{h}\left(\frac{x}{h}-1\right)\cdot\frac{\Delta^2 f(0)}{\underline{|2}}+\dots \qquad \text{(II')}$$

$$f(x)=f(y)+\frac{x-y}{h}\cdot\frac{\Delta f(y)}{\underline{|1}}+\frac{x-y}{h}\left(\frac{x-y}{h}-1\right)\frac{\Delta^2 f(y)}{\underline{|2}}+\dots \qquad \text{(III')}$$

L'ultima di queste formole è conosciuta nel calcolo delle differenze sotto il nome di *formola di Newton*.

781. Se nella formola (I′) si ponga $y = hz$, essa diviene:

$$f(x + hz) = f(x) + \binom{z}{1}\Delta f(x) + \binom{z}{2}\Delta^2 f(x) + \dots \tag{9}$$

Questa formola può riuscire utile, prendendo per z un numero intero qualunque, per calcolare un termine qualunque della successione indefinita:

$$f(x_0)\ ,\ f(x_0 + h)\ ,\ f(x_0 + 2h)\ ,\ f(x_0 + 3h)\ ,\ \dots$$

quando si siano già calcolate le differenze:

$$\Delta f(x_0)\ ,\ \Delta^2 f(x_0)\ ,\ \dots\ ,\ \Delta^{(n)} f(x_0)\ ,$$

essendo n il grado di $f(x)$.

782. Per mostrare con altro esempio la fecondità del principio enunciato all'art. 777, proponiamoci di ricercare il teorema corrispondente a quello già dimostrato (art. 699) che: *la condizione necessaria e sufficiente affinchè α sia radice multipla di grado λ di un'equazione* $\mathrm{f(x)} = 0$*, si è che α sia anche radice multipla, di grado $\lambda - 1$, della sua prima derivata.*

La definizione di radice multipla di grado λ consistendo nel dover essere $f(x)$ divisibile esattamente per $(x - \alpha)^\lambda$, si tratterà ora di ricercare la condizione affinchè $f(x)$ sia invece divisibile per $(x - \alpha)^{\overline{\lambda}}$.

Ripetendo parola per parola, salvo i mutamenti richiesti dalla legge di analogia già spiegata, la dimostrazione fatta agli articoli 697-699, si giungerà alla conclusione analoga che:

Se α è radice di $\mathrm{f(x)}=0$, *affinchè* $\mathrm{f(x)}$ *sia divisibile per* $(\mathrm{x} - \alpha)^{\overline{\lambda}}$, *cioè per* $(\mathrm{x} - \alpha)(\mathrm{x} - \alpha - \mathrm{h}) \dots (\mathrm{x} - \alpha - (\lambda - 1)\mathrm{h})$, *è necessario e sufficiente che* $\overline{\mathrm{f}'(\mathrm{x})}$ *sia divisibile per* $(\mathrm{x} - \alpha)^{\overline{\lambda - 1}}$; *ossia anche, che è la stessa cosa, che α sia anche radice delle equazioni*:

$$\Delta \mathrm{f(x)} = 0\ ,\ \Delta^2 \mathrm{f(x)} = 0\ ,\ \dots\ ,\ \Delta^{\lambda-1} \mathrm{f(x)} = 0.$$

Note.

1. La nozione di differenza si può anche stabilire, indipendentemente dal concetto di funzione, partendo da una successione qualsivoglia, purchè ben determinata, di numeri:

$$u_0\ ,\ u_1\ ,\ u_2\ ,\ u_3\ ,\ \dots\ ,\ u_n\ ,\ \dots \tag{1}$$

In tal caso si definirà la differenza prima di un termine qualunque u come ciò che si ottiene sottraendo quel termine dal successivo, cioè:

$$\Delta u_i = u_{i+1} - u_i. \tag{2}$$

Alla successione (1) corrispondendo così una successione di differenze prime:

$$\Delta u_0\ ,\ \Delta u_1\ ,\ \Delta u_2\ ,\ \dots\ ,\ \Delta u_n\ ,\ \dots, \tag{3}$$

si potrà ora considerare la successione:

$$\Delta^2 u_0\ ,\ \Delta^2 u_1\ ,\ \Delta^2 u_2\ ,\ \dots\ ,\ \Delta^2 u_n\ ,\ \dots \tag{4}$$

formata dalle differenze prime dei termini di (3) che si chiameranno le differenze seconde dei corrispondenti termini di (1); e così di seguito.

2. Qualora si potesse trovare una funzione ben determinata $f(x)$ per la quale si avesse precisamente:

$$f(0) = u_0\ ,\ f(1) = u_1\ ,\ f(2) = u_2\ ,\ \ldots\ ,$$

è manifesto che i numeri della successione (3) si potrebbero scrivere senza pericolo di ambiguità sotto la forma:

$$\Delta f(0)\ ,\ \Delta f(1)\ ,\ \Delta f(2)\ ,\ \ldots$$

in quanto essi si possono anche considerare come ottenuti dalla funzione $\Delta f(x)$, definita come all'art. 761 prendendo l'incremento h=1, ponendo in essa successivamente $x = 0$, 1, 2, ... E così si avrà in generale:

$$\Delta^k u_i = \Delta^k f(i).$$

3. *Un termine qualunque* u_n *della successione*:

$$u_0\ ,\ u_1\ ,\ u_2\ ,\ \ldots\ ,\ u_n\ ,\ \ldots \qquad (1)$$

si può dedurre dalle prime n *differenze del primo termine mediante la formola*:

$$u_n = u_0 + \binom{n}{1}\Delta_0 u + \binom{n}{2}\Delta^2 u_0 \ldots + \binom{n}{n}\Delta^n u_0. \qquad (5)$$

Supponiamo infatti fissato il valore che si vuol considerare per n. Esisterà sempre (art. 488) una funzione intera $\varphi(x)$ per la quale si abbia:

$$\varphi(0) = u_0\ ,\ \varphi(1) = u_1\ ,\ \varphi(2) = u_2\ ,\ \ldots\ ,\ \varphi(n) = u_n. \qquad (6)$$

Applicando a questa funzione $\varphi(x)$ la formola (II)' dell'art. 780 in cui l'incremento h si prenda eguale ad 1 e si faccia $x = n$, si otterrà:

$$\varphi(n) = \varphi(0) + \binom{n}{1}\Delta\varphi(0) + \binom{n}{2}\Delta^2\varphi(0) + \ldots .$$

Ora questa formola è precisamente la (5), poichè dalle (6) si ha che:

$$\varphi(n) = u_n \quad \text{e} \quad \Delta^i\varphi(0) = \Delta^i u_0 \quad \text{per} \quad i = 1,\ 2,\ 3, \ldots . \qquad (7)$$

4. La formola (5) si può anche scrivere simbolicamente così:

$$u_n = (1 + \Delta)^n \cdot u_0\ , \qquad (8)$$

poichè, sviluppando la potenza del binomio come se Δ fosse un numero, la (8) si riduce precisamente alla (5).

La (8) si può però anche interpretare nel senso che il termine u_n si deduce dal termine u_0 applicando ad esso n volte di seguito l'operazione $1 + \Delta$ che applicata ad un termine qualunque della successione (1) lo cangia nel termine seguente, poichè:

$$(1 + \Delta)u_i = u_i + \Delta u_i = u_i + (u_{i+1} - u_i) = u_{i+1}.$$

Infatti, applicando n volte di seguito ad u_0 quest'operazione, esso si cangierà successivamente in $u_1\ ,\ u_2\ ,\ u_3 \ldots$ e per ultimo in u_n, appunto come verrebbe significato dalla (8).

La formola (8), e quindi anche la (5), si sarebbe così potuta anche prevedere immediatamente in base alla nozione di differenza.

5. *Una differenza qualunque* $\Delta^n u_0$ *è legata ai primi* n + 1 *termini della successione*:

$$u_0\ ,\ u_1\ ,\ u_2\ ,\ \ldots\ ,\ u_n\ ,\ \ldots$$

dalla relazione:

$$(-1)^n \Delta^n u_0 = u_0 - \binom{n}{1} u_1 + \binom{n}{2} u_2 - \ldots \pm \binom{n}{n} u_n. \qquad (9)$$

Sia infatti ancora $\varphi(x)$ una funzione intera di x che soddisfi alla (6). Si può scrivere:

$$\Delta^n \varphi(x) = [(1+\Delta) - 1]^n \varphi(x)$$

e quindi:

$$(-1)^n \Delta^n \varphi(x) = [1 - (1+\Delta)]^n \varphi(x) =$$

$$= \varphi(x) - \binom{n}{1}(1+\Delta)\varphi(x) + \binom{n}{2}(1+\Delta)^2 \varphi(x) - \ldots,$$

ossia anche, poichè l'operazione $(1+\Delta)$ cangia $\varphi(x)$ in $\varphi(x+1)$:

$$(-1)^n \Delta^n \varphi(x) = \varphi(x) - \binom{n}{1}\varphi(x+1) + \binom{n}{2}\varphi(x+2) - \ldots. \qquad (10)$$

Se in questa identità si pone ora $x = 0$, viene:

$$(-1)^n \Delta^n \varphi(0) = \varphi(0) - \binom{n}{1}\varphi(1) + \binom{n}{2}\varphi(2) - \ldots \pm \binom{n}{n}\varphi(n)$$

che è appunto la formola (9), come si vede dalle (6) e (7).

§ 5.° — Approssimazione delle radici. Metodo di Newton. Aggiunte di Fourier.

783. Una volta *separata* una certa radice reale α dell'equazione proposta a coefficienti reali:

$$f(x) = 0, \qquad (1)$$

cioè determinati due numeri a e b $(a < b)$ tali che fra a e b cada soltanto la radice α che si supporrà semplice e nessun' altra radice reale della (1), si tratta poi di determinare il valore di α. Ciò non si può fare in generale che per via di successiva approssimazione determinando le successive cifre della frazione decimale rappresentante α fino a quella cifra che corrisponde al grado di approssimazione desiderato.

Tale approssimazione non presenta dal punto di vista teorico alcuna difficoltà. Infatti, poichè fra a e b cade una sola radice di $f(x) = 0$, sappiamo che $f(a)$ ed $f(b)$ saranno di segni opposti (articolo 720). Se dunque sia c un numero qualunque compreso fra a e b (p. es. il loro medio aritmetico) è chiaro che, se $f(a)$ ed $f(c)$ sono di segno eguale, $f(c)$ ed $f(b)$ saranno di segno opposto e viceversa. Se dunque il cambiamento di segno di $f(x)$ avviene p. e. fra c e b, concluderemo che la radice α è compresa fra c e b. Inserendo ora di nuovo fra c e b il medio aritmetico c', si troverà similmente che la radice α è compresa p. es. fra c e c', e così di seguito. In tal modo dopo k inserzioni di medi aritmetici resterà determinato un intervallo entro il quale cade la radice α, e la grandezza di questo intervallo sarà data evidentemente da $\frac{b-a}{2^k}$.

Ciò significa che la radice α si troverà allora approssimata a meno del numero $\frac{b-a}{2^k}$ il quale diviene piccolissimo per poco che cresca l'esponente k.

Ciò nondimeno questo metodo di approssimazione riesce nella pratica di troppo lenta applicazione, onde ad esso si sostituiscono i metodi che passiamo a spiegare.

784. *Metodo di Newton.* Se la differenza $(b-a)$, fra i due numeri b ed a che comprendono α, sia già abbastanza piccola, si avrà evidentemente:

$$\alpha = a + h,$$

dove h è un numero del pari molto piccolo, che rappresenta l'errore che si commetterebbe prendendo a come valore approssimato di α. Poichè α è radice della (1), si avrà:

$$f(a+h) = 0,$$

cioè pel teorema di Taylor:

$$f(a) + hf'(a) + h^2 \frac{f''(a)}{\lfloor 2} + \ldots + h^n \frac{f^{(n)}(a)}{\lfloor n} = 0. \tag{2}$$

Essendo ora h molto piccola, le potenze superiori $h^2, h^3, \ldots$ sono di un ordine di piccolezza molto più grande $\left(\text{poichè, se sia p. es. } h < \frac{1}{1000}, \text{ sarà } h^2 < \frac{1}{1000000}\right)$. Si possono per tal ragione trascurare quei termini dell'equazione (2) che contengono a fattore $h^2, h^3, \ldots$. Con ciò l'equazione (2) si riduce ad un'equazione di 1° grado in h:

$$f(a) + hf'(a) = 0$$

da cui si ricava:

$$h = -\frac{f(a)}{f'(a)}. \tag{3}$$

Il metodo di Newton consiste nel prendere per h appunto questo valore, cosicchè si verrà a prendere come valore approssimato di α, in luogo del valore primitivo a, il valore:

$$a' = a - \frac{f(a)}{f'(a)}.$$

Per avere poi un terzo valore a'' maggiormente approssimato, si procederà allo stesso modo, cioè si prenderà similmente:

$$a'' = a' - \frac{f(a')}{f'(a')}.$$

Così procedendo, dopo sole due o tre approssimazioni si giungerà per lo più all'approssimazione desiderata.

785. La dimostrazione dell'art. precedente riuscirà più rigorosa

se dall'equazione (2) si deduca dapprima:

$$hf'(a) = -f(a) - h^2\frac{f''(a)}{\lfloor 2} - \ldots - h^n\frac{f^{(n)}(a)}{\lfloor n}$$

e dividendo per $f'(a)$:

$$h = -\frac{f(a)}{f'(a)} + \mathrm{E}, \tag{4}$$

dove si è posto per brevità:

$$\mathrm{E} = -h^2\left\{\frac{f''(a)}{\lfloor 2 f'(a)} + h\frac{f'''(a)}{\lfloor 3 f'(a)} + \ldots + h^{n-2}\frac{f^{(n)}(a)}{\lfloor n f'(a)}\right\}. \tag{5}$$

Se ora si prende per h, secondo l'indicazione di Newton, in luogo dell'intera espressione (4) la sola prima parte $-\frac{f(a)}{f'(a)}$, l'errore che si commette è appunto rappresentato da E. Ed invero si vede chiaramente dalla espressione (5) che il valore di E sarà di un ordine di piccolezza superiore alla piccolezza di h, semprechè la quantità fra parentesi non sia molto grande, come d'ordinario accade. In generale dunque l'errore che si commette prendendo $a - \frac{f'(a)}{f(a)}$ come valore di α non influirà che sopra cifre decimali di ordine molto più avanzato dell'ultima già accertata esatta nel valore approssimato a; cosicchè alle cifre decimali che già si conoscevano esattamente se ne verranno ad aggiungere parecchie altre successive in una sola volta.

786. Aggiunte di Fourier.—*Se fra i due limiti* a *e* b, *che comprendono la radice* α *e soltanto questa radice dell'equazione* f(x)=0, *non cade alcuna radice nè della prima, nè della seconda derivata, per uno dei due limiti* a *e* b, *p. es. per* a, *accadrà che* f(a) *ed* f''(a) *sono dello stesso segno. Allora prendendo questo limite come primo valore approssimato di* α *ed applicando ad esso il metodo di Newton, si otterranno dei nuovi valori sempre più approssimati ad* α *e sempre nello stesso senso (cioè per difetto o per eccesso secondo che il punto di partenza sia il limite* a *ovvero il limite* b).

Poichè fra a e b cade una sola radice di $f(x) = 0$, i due valori $f(a)$ ed $f(b)$ saranno di segno opposto nel mentre che i due valori $f''(a)$ ed $f''(b)$ saranno di egual segno, non cadendo fra a e b alcuna radice di $f''(x) = 0$. È dunque chiaro che, se $f(a)$ ed $f''(a)$ sono di segno opposto, $f(b)$ ed $f''(b)$ saranno di segno eguale e viceversa. Per fissare le idee, noi supporremo che siano di segno eguale $f(a)$ ed $f''(a)$. Nell'altro caso la dimostrazione del teorema enunciato si fa assolutamente nello stesso modo.

787. Noi dobbiamo dunque dimostrare che, partendo dal valore approssimato per difetto a e prendendo come nuovo valore approssimato, secondo Newton, il numero:

$$a' = a - \frac{f(a)}{f'(a)}, \tag{6}$$

questo numero è più prossimo di a alla radice α e sempre per difetto. In altri termini che si ha:

$$a < a' < \alpha. \qquad (7)$$

Per dimostrare la prima diseguaglianza, si consideri un valore di x antecedente ad α che indicheremo al solito con $\alpha - h$. Poichè fra a ed $\alpha - h$ non cade per supposto alcuna radice nè di $f(x)$ nè di $f'(x)$, il segno di $f(a)$ coinciderà con quello di $f(\alpha - h)$ ed il segno di $\frac{f(a)}{f'(a)}$ coinciderà col segno di $\frac{f(\alpha - h)}{f'(\alpha - h)}$. Ma il segno di quest'ultimo quoto è negativo (art. 724); quindi anche il segno di $\frac{f(a)}{f'(a)}$ sarà negativo. Dalla (6) segue perciò che a' è uguale ad a accresciuto di un numero positivo, cioè appunto che si ha $a' > a$.

788. Resta a dimostrare che $a' < \alpha$, cioè che $a - \frac{f(a)}{f'(a)} < \alpha$.

Ma se poniamo per brevità:

$$x - \frac{f(x)}{f'(x)} = \varphi(x), \qquad (8)$$

si ha in particolare $a - \frac{f(a)}{f'(a)} = \varphi(a)$; ed inoltre, poichè $f(\alpha) = 0$, si ha anche $\alpha = \varphi(\alpha)$. La diseguaglianza da dimostrarsi è dunque la seguente:

$$\varphi(a) < \varphi(\alpha). \qquad (9)$$

Noi dimostreremo ciò mostrando che $\varphi(x)$ cresce sempre col crescere di x da a fino ad α. Dalla (8) si ha infatti:

$$\varphi(x+h) - \varphi(x) = h + \frac{f(x)}{f'(x)} - \frac{f(x+h)}{f'(x+h)} = h + \frac{f(x)f'(x+h) - f'(x)f(x+h)}{f'(x)f'(x+h)}$$

e dividendo per h si può scrivere:

$$\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h} = 1 + \frac{\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}f(x) - \frac{f(x+h)-f(x)}{h}f'(x)}{f'(x)\cdot f'(x+h)}.$$

Di qui, passando al limite per $h = 0$, si deduce (art. 679):

$$\lim_{h=0} \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = 1 + \frac{f(x)f''(x) - [f'(x)]^2}{[f'(x)]^2}$$

e riducendo nel secondo membro:

$$\lim_{h=0} \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}. \qquad (10)$$

Poichè ora $f(x)$ ed $f''(x)$ non cambiano mai di segno facendo variare x da a fino ad α e, per $x = a$, $f(a)$ ed $f''(a)$ hanno segno eguale, si vede che il prodotto $f(x)f''(x)$ sarà sempre positivo per

ogni valore di x compreso fra a ed α. D' altra parte il denominatore $[f'(x)]^2$ è pure positivo essendo il quadràto di un numero reale; quindi il secondo membro della (10) è positivo, cioè:

$$\lim_{h=0} \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}$$

è positivo per x compreso fra a ed α. Epperò se l'incremento positivo h si prenda abbastanza piccolo, la differenza $\varphi(x+h)-\varphi(x)$ deve riuscire positiva o, che è lo stesso, deve aversi:

$$\varphi(x+h) > \varphi(x).$$

Questa diseguaglianza ci dice appunto che il valore algebrico di $\varphi(x)$ cresce continuamente col crescere di x da a verso α. Anche la diseguaglianza (9) resta così dimostrata.

789. Concludendo vediamo dunque che per applicare con tutta sicurezza il metodo di Newton, converrà, specialmente per i primi valori approssimati, esaminare l'espressione E che si trascura (articolo 785) per accertarsi (ciò che si fa quasi sempre a prima vista) se essa sia veramente trascurabile. Ovvero, non volendo far ciò, si potrà occorrendo restringere i limiti di a e b che comprendono α, fino al punto di essere certi che fra essi non cada alcuna radice della prima o seconda derivata, dopodichè si procederà con sicurezza nel modo indicato dalle aggiunte di Fourier.

790. Esempio. — L' equazione:

$$f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0$$

ha una radice compresa fra 2 e 3, poichè $f(2) = -1$ ed $f(3) = 16$; e non può averne alcun'altra, poichè la regola di Cartesio ci dice subito che l'equazione ha una sola radice positiva. Per ristringere maggiormente i limiti che separano la radice, si dividerà l'intervallo fra 2 e 3 in dieci intervalli eguali. Si troverà così che la radice cade fra 2 e 2,1 poichè $f(2,1) = 0,061$, cioè ha segno opposto a quello di $f(2)$. Si applicherà ora il metodo di Newton partendo dal primo valore approssimato $a = 2,1$, giacchè $f''(2,1)$ ha valore positivo come $f(2,1)$. Si troverà:

$$\frac{f(a)}{f'(a)} = \frac{f(2,1)}{f'(2,1)} = \frac{0,061}{11,23} = 0,00543 \ldots .$$

Si ha dunque come seconda approssimazione:

$$a' = 2,1 - 0,00543 = 2,0946.$$

Si troverà poi come terza approssimazione:

$$a'' = 2,0946 - \frac{f(2,0946)}{f(2,0946)} = 2,09455148$$

che già ci dà il valore della radice cercata con otto cifre decimali esatte. A riprova di ciò basta verificare che $f(2,09455148)$ ha valore negativo.

Esercizi.

1. Applicare il metodo di Newton al calcolo della radice situata fra i limiti assegnati nelle equazioni seguenti:

$x^3 - 4x - 12 = 0$; radice tra 2 e 3

$x^3 - 4x^2 - 7x + 24 = 0$; radice tra 2 e 3

$x^3 - 24x + 44 = 0$; radice tra 3,2 e 3,3

$x^3 - 15x - 5 = 0$; radice tra 4 e 4,1

$x^4 - 8x^3 + 12x^2 + 8x - 4 = 0$; radice tra 0 ed 1.

§ 6.° — Metodo di Horner per l'approssimazione delle radici. Uso simultaneo dei metodi di Horner e di Newton.

791. *Horner* ha dato un metodo che permette di calcolare successivamente le diverse cifre decimali della radice che si vuole approssimare, che si supporrà già separata. Supponiamo p. es. di sapere che l'equazione $f(x) = 0$ ha una sola radice α compresa fra 200 e 300, cosicchè della radice α (che calcoleremo p. es. per difetto) si conosce la cifra delle centinaia che è 2. Si tratta ora di calcolare la cifra delle decine. Se poniamo $\alpha = 200 + h$, l'equazione in $h : f(200 + h) = 0$, cioè:

$$f(200) + \frac{hf'(200)}{1} + h^2 \frac{f''(200)}{\underline{|2}} + \ldots + h^n + \frac{f^{(n)}(200)}{\underline{|n}} = 0 \quad (1)$$

avrà una sola radice h compresa fra 0 e 100; cosicchè se nel primo membro di questa equazione si sostituiscono successivamente in luogo di h i valori 0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, si troveranno due valori consecutivi, p. es. 30 e 40, per i quali il detto primo membro cambia di segno. Ciò significherà che h è compreso fra 30 e 40, cosicchè si sarà determinata la cifra delle decine di h, cioè 3. E si avrà quindi $\alpha = 230 + h_1$, dove h_1 è un numero compreso fra 0 e 10. Poichè $h = 30 + h_1$, l'equazione in h_1 si dedurrà dalla (1) al modo stesso con cui la (1) si è dedotta dalla $f(x) = 0$.

Cioè, se si indichi con $\varphi(h)$ il primo membro della (1), si avrà:

$$\varphi(30) + h_1 \frac{\varphi'(30)}{\underline{|1}} + h_1^2 \frac{\varphi''(30)}{\underline{|2}} + \ldots + h_1^n \frac{\varphi^{(n)}(30)}{\underline{|n}} = 0. \quad (2)$$

Questa equazione avrà una sola radice h_1 compresa fra 0 e 10. Sostituendo dunque per h_1 i numeri 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, si troveranno due numeri consecutivi, p. es. 8 e 9, per i quali il primo membro di (2) cambia di segno; cosicchè h_1 sarà compreso fra 8 e 9, onde 8 sarà la cifra delle unità di h_1 e quindi anche la cifra delle unità di α. E si avrà $\alpha = 238 + h_2$, dove h_2 è com-

presa fra 0 ed 1. Per determinare ora la cifra dei decimi di h_2, si procederà allo stesso modo. Poichè $h_1 = 8 + h_2$, indicando con $\psi(h_1)$ il primo membro della (2), si avrà per h_2 l'equazione:

$$\psi(8) + h_2 \frac{\psi'(8)}{\underline{|1}} + h_2^2 \frac{\psi''(8)}{\underline{|2}} + \ldots + h^n \frac{\psi^{(n)}(8)}{\underline{|n}} = 8 \qquad (3)$$

dalla quale, sostituendo per h_2 i valori: 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1, si dedurrà, osservando il cambiamento di segno, che h_2 è compresa p. e. fra 0.6 e 0.7. Si avrà allora $\alpha = 238{,}6 + h_3$, dove h_3 è compresa fra 0 e 0.1, e così si procederà finchè si siano determinate di α tante cifre decimali da ottenere il grado di approssimazione richiesto dal problema che si tratta.

792. Il metodo spiegato è per se stesso abbastanza ovvio. Ciò che lo rende pregevole nella pratica si è il fatto che i coefficienti delle successive equazioni (1), (2), (3) . . . si possono calcolare abbastanza rapidamente col metodo dovuto ad Horner che noi spiegheremo in seguito (cfr. Cap. XIV, § 2°). Oltre a ciò si noti poi che quando un dato intervallo, entro cui si sa cadere un valore h_i, si suddivide in 10 intervalli più piccoli, per riconoscere quale sia quello di questi intervalli più piccoli entro cui cade h_i, non occorrerà mai di fare effettivamente 10 sostituzioni di valori, ma basteranno sempre due o tre od al più 4 sostituzioni. Così p. e. per determinare le due cifre consecutive della successione 0, 1, 2, . . . , 10 che comprendono fra loro la radice h_1 dell' equazione $\psi(h_1) = 0$, conoscendosi già per il calcolo anteriore il segno di $\psi(0)$, che sia p. e. $+$, si sostituirà $h_1 = 5$. Allora, se $\psi(5)$ riesce positivo, h_1 sarà compreso fra 5 e 10; nel caso contrario fra 0 e 5. In entrambi i casi resteranno ad esaminarsi soltanto 5 intervalli. Si vede dunque che, con una sola sostituzione, gl'intervalli da esaminarsi, che prima erano dieci, si sono ridotti a 5 soli intervalli consecutivi. Con una nuova sostituzione questi 5 intervalli si ridurranno a soli 2 o 3, onde è chiaro quanto si è asserito.

793. A queste osservazioni ne aggiungeremo un'altra mediante la quale il metodo di Newton esposto al § prec. si può, almeno ad un certo punto del calcolo, intrecciare assai opportunamente col metodo di Horner. Supponiamo invero, per fissare le idee, che si sia giunti al punto di dover determinare h_i radice dell' equazione:

$$\chi(h_i) = 0$$

la quale sia compresa fra 0 e 0.001.

Si tratta allora, per avere la quarta cifra decimale della radice cercata, di riconoscere nella successione dei dieci numeri 0, 0.0001, 0.0002, . . . , 0.0009, 0.001 quali sono i due numeri consecutivi per i quali la funzione χ cambia di segno.

Secondo il metodo di Newton la radice h_i sarebbe data approssimativamente da $-\dfrac{\chi(0)}{\chi'(0)}$. C' è dunque gran probabilità che i due

numeri della successione precedente comprendenti h_i sieno quelli stessi fra cui cade il numero $-\frac{\chi(0)}{\chi'(0)}$. Si possono quindi sempre senz'altro *provare* questi due numeri e molto facilmente si riscontrerà che per essi appunto avviene il cambiamento di segno. Si noti poi che i valori $\chi(0)$ e $\chi'(0)$ sono già noti, poichè coincidono coi coefficienti di h_i^0 ed h_i nella funzione $\chi(h_i)$.

794. Chiuderemo con un esempio pratico.

a) Si voglia calcolare con una certa approssimazione la radice positiva α dell'equazione:

$$f(x) = 4x^3 - 13x^2 - 31x - 276 = 0$$

che è una sola, come risulta immediatamente dalla regola dei segni di Cartesio.

Questa radice è compresa fra 6 e 7 come subito si riconosce dai primi tentativi.

Se poniamo $\alpha = 6 + h$, per costruire l' equazione di cui h è radice, si formerà con la regola di Horner (Cap. XIV, § 2°) il quadro:

6	4	−13	−31	−276
	4	11	35	−66
	4	35	245	
	4	59		
	4			

il quale nella pratica, mettendo in evidenza le addizioni parziali, si suol mettere piuttosto sotto la forma seguente:

4	−13	−31	−276
	24	66	210
4	11	35	−66
	24	210	
4	35	245	
	24		
4	59		
4			

Si ha dunque per h l' equazione:

$$\varphi(h) = 4h^3 + 59h^2 + 245h - 66 = 0\,,$$

e si dovranno ora provare i numeri:

$$0.1\,,\ 0.2\,,\ 0.3\,,\ \ldots,\ 0.9\,,\ 1$$

per vedere quali siano i due consecutivi che comprendono h. Si trova così con qualche tentativo che $\varphi(0,2)$ è negativo e $\varphi(0,3)$ è

positivo, onde si ha:

$$h = 0{,}2 + h_1 \,, \quad \text{dove} \quad h_1 < 0{,}1.$$

Per avere l'equazione in h_1, si formerà ora il quadro:

4	59,	245,	− 66	6,2
	0,8	11,96	51,392	
4	59,8	256,96	− 14,608	
	0,8	12,12		
4	60,6	269,08		
	0,8			
4	61,4			
4				

onde si avrà l' equazione:

$$\varphi(h_1) = 4h_1^3 + 61{,}4 \cdot h_1^2 + 269{,}08 \cdot h_1 - 14{,}608 = 0$$

dalla quale si dedurrà con qualche tentativo che h_1 è compreso fra 0,05 e 0,06. Si ha dunque:

$$\alpha = 6{,}25 + h_2 \;, \; h_2 < 0{,}01.$$

Si formerà ora il quadro:

4	61,4	269,08	− 14,608	6,25
	0,2	3,08	13,608	
	61,6	272,16	− 1	
	0,2	3,09		
	61,8	275,25		
	0,2			
	62,0			

dal quale si deduce l' equazione in h_2:

$$\chi(h_2) = 4h_2^3 + 62{,}0 \cdot h_2^2 + 275{,}25 \cdot h_2 - 1 = 0.$$

b) A questo punto, per riconoscere quale dei valori 0, 0.001, 0.002, . . . sia il primo a far cambiare il segno di χ, serviamoci del metodo di Newton che ci dà come valore approssimato di h_2 il quoziente $\dfrac{1}{275{,}250}$.

Questo quoziente è compreso fra 0,003 e 0,004. C'è dunque gran probabilità che in questo intervallo cada la radice h_2. Ed infatti si verifica che $\chi(0{,}003)$ è negativo, nel mentre che $\chi(0{,}004)$ è positivo. Perciò si ha:

$$\alpha = 6{,}253 + h_3 \;, \; h_3 < 0{,}001.$$

Volendo proseguire collo stesso metodo si formerebbe ora il

quadro:

4	62,0	275,25	−1	6,253
	0,012	0,186036	0,896308108	
	62,012	275,436036	−0,103691892	
	0,012	0,186072		
	62,024	275,622108		
	0,012			
	62,036			

da cui si ha per h_3 l' equazione:

$$\theta(h_3)=4h_3^3+62,036\cdot h_3^2+275,622108\cdot h_3-0,103691892=0.$$

c) Ma ormai, essendo $h_3 < \frac{1}{1000}$, gioverà applicare senz'altro l' ordinario metodo di Newton.

Dall' equazione precedente si ha infatti:

$$h_3=\frac{0,103691892}{275,622108}-\mathrm{E},$$

dove:

$$\mathrm{E}=h_3^2\frac{62,036+4h_3}{275,622108}.$$

Ora, essendo $h_3 < \frac{1}{1000}$, si vede a colpo d' occhio che

$$\mathrm{E} < \frac{100}{275622108} < \frac{100}{100000000} = \frac{1}{1000000}.$$

Si vede dunque che l'errore che si commette prendendo per h_3 il valore approssimato:

$$\frac{0,103691892}{275,622108}=\frac{103691,892}{275622108}=0,0003762,$$

non può influire al più che sulla sesta cifra decimale di α. Possiamo dunque ritenere con cinque cifre decimali esatte:

$$\alpha = 6,25337.$$

Note ed Esercizi.

1. Calcolare con quattro cifre decimali esatte la radice positiva (compresa fra 1 e 2) dell' equazione:

$$x^4+4x^3-4x^2-11x+4=0.$$

Si troverà $x=1,6869$.

2. Calcolare con cinque decimali la radice negativa (compresa fra −1

e 0) dell' equazione:

$$x^5 + x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 3x + 1 = 0.$$

Si troverà: $x = -0,28463$.

3. L' equazione $x^3 - 2x - 5 = 0$ ha la radice positiva:

$$x = 2,094551484.$$

4. Oltre ai metodi già esposti per l'approssimazione delle radici, ve ne sono diversi altri, fra i quali è specialmente notevole quello di *Lagrange*, che da la radice cercata sotto forma di frazione continua. Questo metodo è però di poca importanza nella pratica; onde ci limiteremo a darne qui un breve cenno.

Supponiamo che l'equazione $f(x) = 0$ abbia una radice, ed una soltanto, compresa fra i due interi consecutivi a ed $a+1$. Ponendo $x = a + \frac{1}{y}$ l'equazione trasformata in y avrà una sola radice positiva superiore ad 1. Si determinino, mediante opportuni tentativi, i due interi b e $b+1$ che la comprendono e si ponga quindi $y = b + \frac{1}{z}$. Si costruisca poi la trasformata in z e si determinino similmente i due interi consecutivi c e $c+1$ che la comprendono. Così proseguendo si verrà ad ottenere l' approssimazione di x sotto forma di una frazione continua:

$$x = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \ddots}}$$

Questo metodo che per la lunghezza dei calcoli riuscirebbe nella pratica quasi inapplicabile, è suscettibile tuttavia di notevoli semplificazioni, proposte appunto da Lagrange. Lagrange ha dimostrato come la serie dei numeri a, b, c, ... si possa costruire, da un certo punto in poi, *senza tentativi*. (Vedi *Serret: Cours d'Algèbre Supérieure*, *Section* I, *Chap.* VII).

CAPITOLO XI.

OPERAZIONI CON NUMERI COMPLESSI.

§ 1.° — Operazioni fondamentali.

795. Abbiamo veduto come la teoria dei problemi di 1° grado, quelli cioè che si traducono algebricamente mediante un sistema di più equazioni di 1° grado a più incognite, si possa completamente svolgere anche restando nel campo dei numeri razionali. Non così pei problemi di 2° grado, come ad esempio quello della estrazione di radice quadrata da un numero positivo, che già ci hanno condotto a sostituire al campo dei numeri razionali quello più esteso dei numeri reali. Ma neanche il campo dei numeri reali è bastevole a trattare in tutta la loro generalità i problemi di 2° grado e di grado superiore. Per persuadersi di ciò basta per esempio considerare il caso semplicissimo dell' equazione:

$$x^2 + A = 0$$

la quale non ammette soluzione reale quando A è un numero positivo diverso da zero, cosicchè la espressione dell' incognita $x = \sqrt{-A}$ avrebbe in questo caso un valore puramente *formale* ma privo di significato numerico.

Conviene pertanto di vedere se sia possibile allargare ulteriormente il campo dei numeri, introducendo nuovi enti aritmetici mediante i quali questo ed altri problemi possano divenire risolubili. Naturalmente l'introduzione di nuovi enti aritmetici in tanto potrà considerarsi, anche quì, come lecita in quanto i teoremi fondamentali del calcolo algebrico continuino a sussistere anche dopo avere esteso il campo dei numeri mediante l'introduzione dei nuovi enti.

Noi cominceremo pertanto dall'esaminare se si possa introdurre nel calcolo un nuovo ente aritmetico, che indicheremo con i e chiameremo *unità imaginaria,* il quale soddisfi per definizione alla eguaglianza:

$$i^2 = -1.$$

796. Ove si possa introdurre il numero i, converrà altresì introdurre i numeri della forma bi che si ottengono moltiplicando un numero reale qualunque b per l'unità imaginaria i, e che noi chiameremo numeri *imaginarii puri.* E finalmente converrà anche dare significato numerico al simbolo $a + bi$ che esprime la somma di un numero reale qualsivoglia a e di un numero imaginario puro bi.

I numeri della forma $a+bi$ si dicono numeri *complessi*. Essi comprendono come caso particolare tutti i numeri reali ($b=0$). Quando sia invece $b \gtrless 0$, i numeri complessi si diranno *imaginarii*. E questi ultimi comprendono alla lor volta come caso particolare gli imaginarii puri ($a=0$).

Per gli scopi dell'analisi non è necessario di cercare di quali specie di grandezze questi numeri complessi possano considerarsi come misura. Bensì è necessario legittimarne l'introduzione nel calcolo stabilendo: 1°) quali fra essi debbano ritenersi come uguali e quali come distinti, 2°) se e come si possano estendere ai numeri complessi le regole fondamentali del calcolo ed in ispecie le definizioni delle quattro operazioni fondamentali.

797. Vediamo in quali casi si dovrà ritenere l'uguaglianza di due numeri complessi:

$$a+bi=a'+b'i.$$

Per ritenere questa eguaglianza senza abbandonare le regole fondamentali del calcolo, dovremo altresì ritenere l'eguaglianza che ne consegue:

$$a-a'=b'i-bi$$

e l'eguaglianza:

$$a-a'=(b'-b)i$$

e finalmente l'eguaglianza:

$$(a-a')^2=(b'-b)^2\cdot i^2$$

le quali eguaglianze si deducono tutte dalla prima colle regole fondamentali di addizione e moltiplicazione. Cioè, poichè $i^2=-1$, si dovrà ritenere altresì:

$$(a-a')^2=-(b'-b)^2.$$

Ma $(a-a')^2$ e $(b'-b)^2$, come quadrati di numeri *reali*, sono sempre numeri reali positivi; onde si vede che questa inuguaglianza è inammissibile ad eccezione del caso in cui si avesse:

$$a-a'=0\ ,\ b'-b=0$$

cioè $a=a'$ e $b=b'$. Dunque:

Def. — *Due numeri complessi allora ed allora soltanto si riterranno eguali, quando la parte reale del primo coincida con la parte reale del secondo e il coefficiente della parte imaginaria col coefficiente della parte imaginaria.*

Cor. 1.° — *Un numero imaginario puro non può mai ritenersi eguale ad un numero reale.*

Cor. 2.° *Perchè due imaginarii puri* bi *e* b'i *siano eguali, dev'essere* $b=b'$.

Cor. 3.° — *Affinchè un numero complesso* $a+bi$ *sia eguale a zero, dev' essere necessariamente* $a=0$ *e* $b=0$.

798. La condizione ora trovata affinchè un numero complesso $a + bi$ sia eguale a zero, può anche esprimersi più brevemente dicendo che dev'essere $a^2 + b^2 = 0$. Infatti $a^2 + b^2$, essendo somma di due parti reali positive, non può essere nullo se non quando sia nulla ciascuna delle due parti, cioè si abbia $a = 0$ e $b = 0$.

Reciprocamente, se $a = 0$ e $b = 0$, sarà $a^2 + b^2 = 0$.

Questa somma $a^2 + b^2$ dicesi *norma* del numero complesso $a + bi$. Nell' algebra però ha speciale importanza la radice quadrata *positiva* $\sqrt{a^2 + b^2}$ che chiamasi *modulo* del numero complesso $a + bi$, scrivendosi:

$$\mathrm{mod}(a + bi) = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Il modulo di un numero complesso $a + bi$ *può dunque definirsi come quel numero reale e positivo che rappresenta il valore aritmetico della radice quadrata della somma* $a^2 + b^2$.

Ciò posto, è chiaro che *affinchè un numero complesso* $a + bi$ *sia uguale a zero, è necessario e sufficiente che sia eguale a zero il suo modulo.*

799. *Addizione e sottrazione dei numeri complessi.* Volendo conservare le regole fondamentali del calcolo, è chiaro che la definizione di addizione di due numeri complessi non può darsi che nel modo seguente:

$$(a + bi) + (a' + b'i) = (a + a') + (b + b')i \tag{1}$$

cioè: *per somma di due numeri complessi si intenderà quel numero complesso che ha per parte reale la somma delle parti reali dei due addendi e per coefficiente di* i *la somma dei coefficienti di* i *nei due addendi.*

Di qui segue immediatamente che il problema della sottrazione di due numeri complessi si può sempre risolvere, ed in un modo unico, a seconda della formola:

$$(a + bi) - (a' + b'i) = (a - a') + (b - b')i. \tag{2}$$

Infatti, per la definizione di addizione, si verifica immediatamente che:

$$(a' + b'i) + [(a - a') + (b - b')i] = (a + bi)$$

e che il secondo membro della (2) è il solo numero complesso x che soddisfi all' eguaglianza:

$$(a' + b'i) + x = (a + bi).$$

L'addizione e la sottrazione di numeri complessi venendo così ricondotte ad un numero doppio di addizioni e sottrazioni da eseguirsi in modo analogo una volta sulle parti reali ed un'altra sui coefficienti delle parti imaginarie, è chiaro che tutte le regole fondamentali del calcolo relative all'addizione e sottrazione restano invariate anche nel campo più esteso dei numeri complessi. Così sarà p. es.:

$$(a + bi) + (a' + b'i) = (a' + b'i) + (a + bi),$$

ecc.

800. *Moltiplicazione di numeri complessi.* Anche qui, affinchè possano sussistere inalterate le regole fondamentali per il prodotto di due polinomi, si vede che la definizione di prodotto di due numeri complessi $a + bi$ ed $a' + b'i$ non può darsi che come segue:

$$(a+bi)(a'+b'i)=aa'+ba'i+ab'i+bb'i^2=aa'+ba'i+ab'i-bb'$$

o meglio:

$$(a + bi)(a' + b'i) = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i \qquad (3)$$

Dunque: *per prodotto di due numeri complessi* a+bi *ed* a'+b'i *s'intenderà quel numero complesso che ha per parte reale il numero reale* aa' − bb' *e per coefficiente della parte imaginaria il numero reale* ab' + a'b.

801. Dalla definizione data di prodotto segue evidentemente che il prodotto di due numeri complessi è indipendente dall'ordine di moltiplicazione dei due fattori.

Cioè:

$$(a + bi)(a' + b'i) = (a' + b'i)(a + bi).$$

Lo stesso accade per un prodotto di un numero qualsivoglia di fattori complessi. In effetto, per dimostrare che un prodotto non si altera cambiando in un modo qualunque l' ordine dei fattori, basta dimostrare, come è facile vedere, che esso non si altera per lo scambio di due fattori consecutivi; cioè, in ultima analisi, basterà dimostrare nel nostro caso che:

$$(a + bi)(a' + b'i)(a'' + b''i) = (a + bi)(a'' + b_{,}'i)(a' + b'i),$$

cioè anche che

$$[(aa' - bb') + (ab' + a'b)i](a'' + b''i)$$
$$= [(aa'' - bb'') + (ab'' + a''b)](a' + b'i).$$

Ed invero ciò si verifica immediatamente effettuando i due prodotti secondo la regola data sopra nella definizione. Concluderemo dunque che *un prodotto di due o più numeri complessi non si altera cambiando in un modo qualunque l'ordine di successione dei fattori.*

802. *Se un prodotto di due numeri complessi è uguale a zero, dev'essere necessariamente uguale a zero almeno uno dei due fattori.*

Supponiamo infatti che si abbia:

$$(a + bi)(a' + b'i) = 0$$

ossia per la definizione di prodotto:

$$(aa' - bb') + (ab' + a'b)i = 0.$$

Poichè quest'ultimo numero complesso è uguale a zero, dev'essere separatamente (art. 797, Cor. 3.°):

$$aa' - bb' = 0 \;,\; ab' + a'b = 0;$$

quindi anche:

$$(aa' - bb')^2 + (ab' + a'b)^2 = 0,$$

cioè, svolgendo i quadrati e riducendo:

$$a^2a'^2 + b^2b'^2 + a^2b'^2 + a'^2b^2 = 0$$

il che può scriversi:

$$(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2) = 0.$$

Ma il primo membro di quest' eguaglianza essendo il prodotto di numeri *reali*, già sappiamo che esso non può annullarsi che quando si abbia:

$$a^2 + b^2 = 0$$

ovvero quando si abbia:

$$a'^2 + b'^2 = 0.$$

Ma nel primo caso (cfr. art. 798) dovrà essere $a = 0$ e $b = 0$, cioè essere nullo il primo fattore complesso $a + bi$ del prodotto considerato in principio; nel secondo caso dovrà essere $a' = 0$, $b' = 0$, cioè nullo il secondo fattore.

Resta così dimostrato quanto si era asserito.

803. Dalla definizione di prodotto si deduce immediatamente che

$$(a + bi)[(a' + b'i) + (a'' + b''i)]$$
$$= (a + bi)(a' + b'i) + (a + bi)(a'' + b''i),$$

onde, combinando poi questa proprietà del prodotto coll'altra già dimostrata dell' invertibilità dell' ordine dei fattori, si dimostrerà senza difficoltà, collo stesso andamento che suol tenersi in aritmetica, che anche per il caso di numeri complessi A, A', A'',... B, B', B'',... sussiste inalterata la regola per il prodotto di due polinomi espressa dalla formola:

$$(A + A' + A'' + ...)(B + B' + B'' + ...) = AB + AB' + A''B + ...$$

Possiamo dunque senz'altro concludere che anche tutte le proprietà fondamentali dell' algoritmo della moltiplicazione possono estendersi all'intero campo dei numeri complessi.

804. Come caso particolare importante del prodotto di numeri complessi consideriamo le potenze successive $i^0, i^1, i^2, i^3, ...$ dell'unità imaginaria. Ritenendo *per convenzione*, analoga a quella che si fa per i numeri reali, $i^0 = 1$, si vede subito che si ha poi

$$i^2 = -1\ ,\ i^3 = i^2 \cdot i = -i\ ,\ i^4 = i^3 \cdot i = -i^2 = 1.$$

Di qui segue che per m ed n interi si avrà:

$$i^{m+4n} = i^m \cdot i^{4n} = i^m(i^4)^n = i^m,$$

onde si vede che i valori distinti delle potenze:

$$i^0, i, i^2, i^3, i^4, i^5, i^6, i^7, ...$$

si riproducono periodicamente di quattro in quattro, cioè si ha:

$$i^0 = 1 \, , \, i = i \, , \, i^2 = -1 \, , \, i^3 = -i$$

$$i^4 = 1 \, , \, i^5 = i \, , \, i^6 = -1 \, , \, i^7 = -i$$

$$i^8 = 1 \, , \, i^9 = i \, , \, i^{10} = -1 \, , \, i^{11} = -i \, ,$$

ecc.

Pertanto, se un esponente intero qualsivoglia k è uguale ad un multiplo di 4 più un certo resto ε (che può essere 0, 1, 2, 3) si avrà:

$$i^k = i^\varepsilon$$

dove $i^\varepsilon = 1 \, , i, -1, -i,$ secondochè $\varepsilon = 0,\ 1,\ 2,\ 3.$

805. I due numeri $a + bi$ ed $a - bi$, che differiscono soltanto per il segno del coefficiente della parte imaginaria, si dicono *coniugati*.

È facile di riconoscere:

1°) *che la somma di due numeri coniugati è sempre un numero reale*. Infatti:

$$(a + bi) + (a - bi) = 2a$$

2°) *che il prodotto di due numeri coniugati è un numero reale positivo eguale al quadrato del loro modulo*. Infatti:

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = [\text{mod}(a + bi)]^2 = [\text{mod}(a - bi)]^2$$

3°) *che, reciprocamente, se due numeri complessi hanno la loro somma e il loro prodotto reali, essi sono necessariamente coniugati*.

806. *Divisione dei numeri complessi*. Dividere un numero complesso $a + bi$ per un altro $a' + b'i$ significa cercare un terzo numero x che soddisfi all' eguaglianza:

$$(a' + b'i)x = a + bi. \qquad \text{(A)}$$

Se esiste un numero complesso $x = \alpha + \beta i$ che soddisfa a questo problema, si dovrà dunque avere:

$$(a' + b'i)(\alpha + \beta i) = a + bi \, ,$$

cioè:

$$(a'\alpha - b'\beta) + (b'\alpha + a'\beta)i = a + bi$$

il che equivale alle due uguaglianze:

$$\left.\begin{aligned} a'\alpha - b'\beta &= a \\ b'\alpha + a'\beta &= b \end{aligned}\right\} \qquad \text{(B)}$$

che ci danno due equazioni di primo grado fra le due incognite α, β, il cui determinante:

$$\begin{vmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{vmatrix} = a'^2 + b'^2$$

ci è lecito ritenere diverso da zero. Infatti, se fosse $a'^2 + b'^2 = 0$,

il numero complesso $a' + b'i$ sarebbe nullo e per conseguenza l'equazione (A) non potrebbe essere soddisfatta da alcun valore finito di x, ad eccezione del caso in cui fosse anche $a+bi=0$, nel qual ultimo caso *ogni valore di* x soddisferebbe alla (A). Ritenendo dunque $a'^2 + b'^2 > 0$ vediamo (art. 427) che esisterà sempre uno ed un solo sistema di valori di α e β che soddisfa alle (B), cioè esisterà sempre uno ed un solo numero complesso $x = \alpha + \beta i$ che soddisfi alla (A). Questo numero si chiamerà il quoziente della divisione di $(a + bi)$ per $(a' + b'i)$ e si indicherà col simbolo $\frac{a + bi}{a' + b'i} = x$.

807. Se $\frac{a + bi}{a' + b'i} = x$, si ha per definizione:

$$(a' + b'i)x = a + bi$$

onde moltiplicando entrambi i membri per $A + Bi$:

$$[(A + Bi)(a' + b'i)]x = (A + Bi)(a + bi)$$

e per conseguenza:

$$\frac{(A + Bi)(a + bi)}{(A + Bi)(a' + b'i)} = x = \frac{a + bi}{a' + b'i},$$

cioè: *il valore di una frazione complessa non si altera moltiplicandone numeratore e denominatore per uno stesso numero.*

Di qui segue ormai manifestamente che tutte le regole di calcolo relative alle quattro operazioni fondamentali si possono senz'altro estendere anche all'intero campo dei numeri complessi.

808. Come caso particolare della proprietà notata all' articolo precedente si ha:

$$\frac{a+bi}{a'+b'i} = \frac{(a+bi)(a'-b'i)}{(a'+b'i)(a'-b'i)} = \frac{(a+bi)(a'-b'i)}{a'^2+b'^2} = \frac{(aa'+bb')+(ba'-ab')i}{a'^2+b'^2},$$

onde:

$$\frac{a + bi}{a' + b'i} = \frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2} + \frac{ba' - ab'}{a'^2 + b'^2} \cdot i.$$

Dunque: *il quoziente di due numeri complessi* $a+bi$ *ed* $a' + b'i$ *(dei quali il secondo sia diverso da zero) è perfettamente determinato, ed è uguale ad un terzo numero complesso che ha per parte reale* $\frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2}$ *e per coefficiente della parte imaginaria* $\frac{ba' - ab'}{a'^2 + b'^2}$.

Esercizi.

1. Dimostrare che il modulo del prodotto di due numeri complessi è uguale al prodotto dei loro moduli.

2. Determinare la parte reale e la parte imaginaria del numero complesso:

$$\begin{vmatrix} a + bi & c + di & e + fi \\ a_1 + b_1 i & c_1 + d_1 i & e_1 + f_1 i \\ a_2 + b_2 i & c_2 + d_2 i & c_2 + f_2 i \end{vmatrix}$$

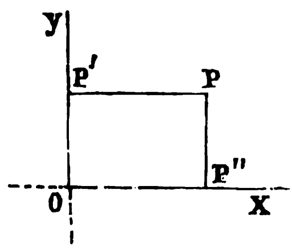
3. Il prodotto $[(a+bi)(a-bi)][(h+ki)(h-ki)]$ potendo anche essere effettuato nel modo seguente:

$$[(a + bi)(h + ki)][(a-bi)(h-ki)],$$

dedurne che il prodotto di due numeri interi, ciascuno dei quali sia la somma di due quadrati esatti, sarà pure una somma di due quadrati esatti.

§ 2.° — Rappresentazione geometrica dei numeri complessi.

809. Nella geometria analitica del piano la posizione di un punto P viene rappresentata ordinariamente dalle distanze di esso punto da due assi OX ed OY fra loro perpendicolari.

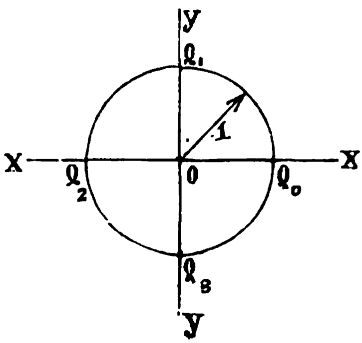


Il numero che in valore assoluto misura la distanza PP′ dall'asse delle y si chiama *ascissa* e si assume come positivo o come negativo secondochè il punto P trovasi a destra ovvero a sinistra dell' asse OY.

Similmente si chiama *ordinata* il numero che misura in valore assoluto la distanza PP″ dall' asse delle x preso positivamente o negativamente secondochè il punto P cade al disopra o al disotto di detto asse.

Questi due numeri sono sempre reali; quindi ad ogni punto del piano corrispondono sempre due numeri reali a e b. Ma a due numeri reali a e b corrisponde sempre un solo numero complesso $a + bi$; dunque è naturale far corrispondere al punto del piano (di ascissa a ed ordinata b) il numero complesso $a + bi$; poichè allora, reciprocamente, ad ogni numero complesso corrisponderà nel piano un punto ed uno soltanto. Il punto del piano, che rappresenta in tal modo geometricamente un numero complesso dato, si dice *imagine* o *indice* di quel numero complesso. Si ha così la rappresentazione geometrica più semplice (detta rappresentazione di *Gauss*) dei numeri complessi mediante i punti di un piano. In particolare si vede che i numeri reali (cioè i numeri complessi $a + bi$ in cui $b = 0$) sono rappresentati dai punti dell'asse OX; e precisamente dai punti che stanno a destra o a sinistra dell' ori-

gine delle coordinate, secondochè il numero reale, che si considera, sia positivo o negativo. Si vede similmente che i numeri puramente imaginarii (cioè i numeri complessi $a + bi$ in cui $a = 0$) sono rappresentati dai punti dell'asse OY.



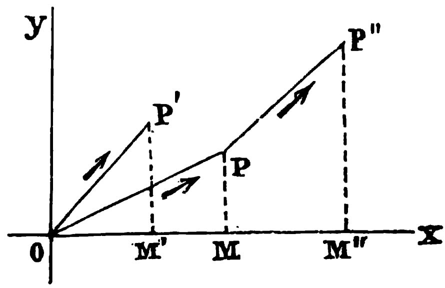
Se col centro nell'origine, e con un raggio eguale al segmento che si assume come unità di misura, si descriva un cerchio, questo incontrerà ordinatamente i due assi positivi OX, OY e i due assi negativi in quattro punti Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, i quali rappresentano geometricamente le quattro prime potenze del numero i:

$$1 , i , -1 , -i.$$

810. Dati due numeri complessi $a + bi$ ed $a' + b'i$, i cui indici nel piano siano i punti P e P′, vediamo come si possa costruire geometricamente il punto P″ che rappresenta il numero somma dei due dati, cioè il numero complesso:

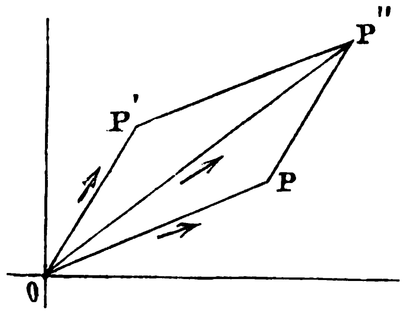
$$(a + a') + (b + b')i. \qquad (1)$$

Congiunta l'origine O con P e con P′, attribuiamo ai due segmenti OP ed OP′ la *direzione* indicata dalle freccie nella figura quì sotto; conduciamo quindi da P un segmento di retta PP″ *equipollente* (cioè parallelo, della stessa lunghezza e direzione) al



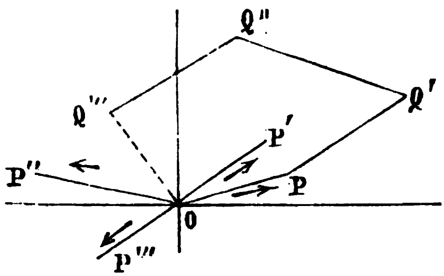
segmento OP′. Dico che il punto P″ così ottenuto è precisamente l'indice del numero complesso (1). Per dimostrare ciò, basterà verificare che l'ascissa di P″ è uguale ad $a + a'$, cioè alla somma dell'ascissa di P e di quella di P′, e similmente per le ordinate. In effetto, partendo dal principio che due segmenti equipollenti hanno proiezioni eguali, si vede subito dalla figura che il segmento MM″ proiezione sull'asse delle x del segmento PP″ sarà eguale al segmento OM′ proiezione (cioè ascissa) del segmento OP′. Pertanto il segmento OM″, che è l'ascissa di P″, è precisamente uguale ad OM + MM″, cioè appunto alla ascissa di P aumentata dell'ascissa di P′. Dimostrazione affatto identica vale per le ordinate.

811. Imaginando attribuite ai segmenti OP, OP′ le direzioni indicate sopra, possiamo dare alla somma dei numeri complessi rappresentati da P e P′ la seguente interpretazione meccanica. Congiungendo l' origine col punto P″ ed attribuendo al segmento OP″, come già ai segmenti OP ed OP′, la direzione da O verso P″, si vede, paragonando la nostra figura colla nota costruzione del parallelogramma delle forze, che il segmento OP″ rappresenterà in grandezza (*intensità*) e direzione la risultante delle due forze rappresentate in grandezza e direzione dai segmenti OP ed OP′.



812. È facile ora dedurre la regola per costruire geometricamente il punto somma di un numero qualunque di numeri complessi dati.

Siano p. es. P, P′, P″, P‴ i punti che rappresentano i numeri

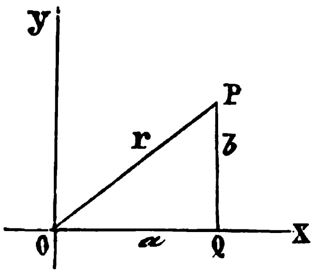


complessi dei quali si cerca la somma. Si congiunga l'origine O coi punti P, P′, P″, P‴ e si dia ai segmenti OP, OP′, OP″, OP‴ il senso da O verso i punti stessi. Si comincerà allora dal fare la somma di P e di P′ nel modo spiegato sopra; si otterrà così un punto Q′, dal quale conducendo un segmento Q′Q″ equipollente ad OP″ si avrà poi il punto Q″ somma di P di P′ e di P″. Sommando finalmente Q″ con P‴, cioè conducendo da Q″ un segmento Q″Q‴ equipollente ad OP‴, si otterrà il punto Q‴ somma di P, P′, P″, P‴.

Vediamo così che il segmento OQ‴ inteso nella direzione da O verso Q‴, rappresenta in intensità e direzione la risultante delle forze applicate al punto O e rappresentate risp. dai segmenti OP, OP′, OP″, OP‴.

813. Il modulo di un numero complesso è rappresentato geometricamente dalla distanza fra l' origine ed il punto indice del numero complesso.

Infatti, se Q sia il piede della perpendicolare abbassata sull'asse delle x dal punto P indice di un certo numero complesso $a+bi$, i due cateti OQ e QP del triangolo rettangolo OPQ saranno misurati rispettivamente dai numeri a e b; quindi l' ipotenusa OP, la cui misura sia il numero positivo r, avrà il suo quadrato misurato da



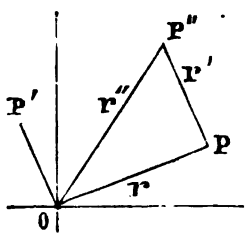
$$r^2 = a^2 + b^2$$

d' onde:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \mathrm{mod}(a + bi),$$

c. d. d.

814. Richiamando la costruzione sopra indicata del punto P″ che rappresenta la somma dei due numeri complessi $a+bi$, ed $a'+b'i$, i cui indici siano i punti P e P′, e indicando con r, r', r'' le misure dei lati OP, PP″ ed OP″ del triangolo OPP″, si vede, per l'articolo precedente che:



$$r = \mathrm{mod}(a + bi)$$

$$r' = \mathrm{mod}(a'+b'i)$$

$$r'' = \mathrm{mod}\{(a + bi) + (a' + b'i)\}.$$

Quindi fra i moduli r ed r' di due numeri complessi ed il modulo r'' della loro somma debbono intercedere le stesse relazioni di grandezza che hanno luogo fra i tre lati di un triangolo.

Dunque, poichè in un triangolo qualunque un lato è sempre compreso fra la somma e la differenza degli altri due, si avrà:

$$r'' \lesseqgtr r + r' \;,\; r'' \gtreqless r' - r''$$

delle quali disuguaglianze la secenda va intesa in valore assoluto.

Si noti che il caso dell'uguaglianza si presenta soltanto quando i tre punti O, P, P′ stanno in linea retta, cioè quando OPP″ cessa di essere un vero triangolo.

Avremo spesso occasione di richiamare la prima di queste due diseguaglianze, la quale ci dice che *il modulo della somma di due numeri complessi è sempre minore (o al più eguale) della somma dei loro moduli.*

Più generalmente si ha che *il modulo della somma di quanti si vogliano numeri complessi non può mai superare la somma dei rispettivi loro moduli.*

Infatti, per ciò che precede, si ha:

$$\mathrm{mod}[P + P' + P''] = \mathrm{mod}[(P + P') + P''] \lesseqgtr \mathrm{mod}(P + P') + \mathrm{mod}P''.$$

Ma, sempre per la proprietà stessa, si ha:

$$\text{mod}(P + P') \leqq \text{mod}P + \text{mod}P',$$

onde si conclude *a fortiori*:

$$\text{mod}(P + P' + P'') \leqq \text{mod}P + \text{mod}P' + \text{mod}P''$$

e così via.

Esercizi.

1. I punti indici di due numeri complessi coniugati sono situati simmetricamente rispetto all'asse delle X; i punti indici di due numeri complessi eguali ma di segno contrario sono situati simmetricamente rispetto all'origine.

2. Costruire il punto che rappresenta la differenza di due numeri complessi dati $a + bi$ ed $a' + bi$, avvalendosi della costruzione indicata per la somma, cioè considerando che:

$$(a + bi) - (a' + b'i) = (a + bi) + [-(a' + b'i)].$$

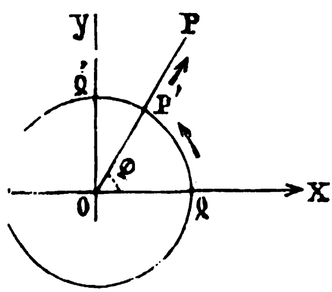
3. Dimostrare che il modulo della differenza fra due numeri complessi è dato geometricamente dalla distanza dei due punti che li rappresentano.

4. Dimostrare algebricamente il teorema dell'art. 814, verificando la diseguaglianza:

$$\sqrt{(a + a')^2 + (b + b')^2} \leqq \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a'^2 + b'^2}.$$

§ 3.° — Forma trigonometrica di un numero complesso.

815. Per individuare la posizione di un punto P nel piano XY si può far uso, anzichè delle coordinate cartesiane a e b considerate precedentemente, delle coordinate così dette *polari*, cioè della distanza, misurata da un numero positivo che indicheremo con r, del punto P dall'origine O e dell'angolo, che indicheremo con φ, formato dalla direzione OP (il cui senso si intenderà sempre contato partendo dall'origine e muovendosi verso il punto P come è denotato nella figura dalla freccia) colla direzione *positiva* OX dell'asse delle x. Per angolo φ s'intende quel numero che misura l'arco QP' intercetto, sulla circonferenza di raggio 1 avente il centro in O, fra il punto Q della figura ed il punto P' nel quale la direzione OP incontra la detta circonferenza.



Più precisamente, se si immagini un mobile il quale partendo dal punto Q e muovendosi sempre nello stesso senso lungo la circonferenza si arresti nel punto P' (o al primo incontro o dopo un numero qualunque di giri dell'intera circonferenza), si intenderà per angolo φ quel numero che misura la lunghezza dell'intero

arco percorso, prendendo come unità di misura il raggio, preso positivamente o negativamente secondochè il mobile abbia percorso la circonferenza nel senso indicato dalla freccia nella figura precedente ovvero nel senso opposto. L'angolo φ così definito non è dunque un numero perfettamente determinato; bensì esso è perfettamente determinato a meno di un multiplo intero positivo o negativo del numero 2π, che esprime la misura della circonferenza di raggio eguale all'unità.

816. In trigonometria si chiamano *seno* e *coseno* dell'angolo φ, e si indicano risp. con $\sin\varphi$ e $\cos\varphi$, *l'ordinata* e *l'ascissa* del punto P' nel quale la direzione OP, che forma con OX l'angolo φ, incontra la circonferenza di raggio 1.

Poichè ora i due punti P e P' si trovano *sempre dalla stessa parte* rispetto all'origine O, è chiaro che le loro ascisse (e così le loro ordinate) saranno sempre dello stesso segno qualunque sia la posizione del punto P nel piano. Per conseguenza, detto $a+bi$ il numero complesso che ha per indice il punto P, i rapporti:

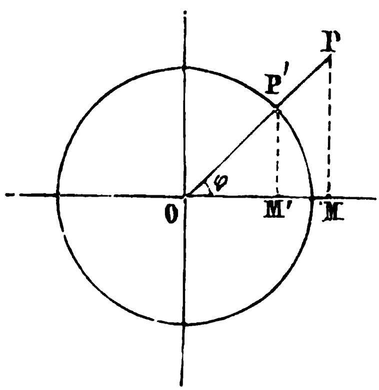
$$\frac{a}{\cos\varphi}, \ \frac{b}{\sin\varphi} \tag{1}$$

sono sempre numeri positivi.

Intanto, se M ed M' sono i piedi delle perpendicolari abbassate da P e P' sull'asse delle X, si ha evidentemente:

$$\frac{a}{\cos\varphi}=\frac{OM}{OM'}, \quad \frac{b}{\sin\varphi}=\frac{MP}{M'P'}.$$

Ma, per la similitudine dei due triangoli OM'P' ed OMP, si ha:



$$\frac{OM}{OM'}=\frac{MP}{M'P'}=\frac{OP}{OP'}.$$

Sarà dunque:

$$\frac{a}{\cos\varphi}=\frac{b}{\sin\varphi}=\frac{OP}{OP'}=\frac{r}{1}, \tag{2}$$

detto r il numero positivo che misura OP, e queste uguaglianze saranno sempre soddisfatte anche per riguardo ai segni di a, b, $\cos\varphi$, $\sin\varphi$, essendo i due rapporti (1) sempre positivi, come si è osservato poco fa, qualunque sia la posizione di P nel piano. Dalle (2) si deduce ora:

$$a=r\cos\varphi\ , \ b=r\sin\varphi. \tag{3}$$

Il numero complesso che ha per indice il punto P, può dunque anche scriversi così:

$$a+bi=r\cos\varphi+i\cdot r\sin\varphi$$

o meglio:

$$a + bi = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$$

dove r altro non è che il modulo del numero complesso (V. § prec.) e dove φ è un certo angolo (un numero perfettamente determinato a meno di un multiplo intero positivo o negativo di 2π) che chiamasi *argomento* del numero complesso.

817. Le formole (3) ci danno il modo di calcolare i valori di a e di b, quando siano dati i valori di r e φ. Reciprocamente, dati a e b, per calcolare r e φ si osservi primieramente che si ha:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \tag{4}$$

onde sostituendo ciò nelle (3) si avrà poi:

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \tag{5}$$

Queste due ultime formole determinano completamente l'angolo φ, a meno di un multiplo intero di 2π, poichè *esiste un angolo φ il cui seno e coseno prendono certi due valori determinati.*

Notiamo altresì che dalle (5) si deduce dividendo la seconda membro a membro per la prima:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}. \tag{6}$$

Questa formola non determina *completamente* l'angolo φ, poichè esistono sempre due archi che hanno una stessa tangente; ma sarà poi facile vedere quale dei due debba prendersi osservando i segni che debbono avere $\sin\varphi$ e $\cos\varphi$, i quali segni, come apparisce immediatamente dalle (5), coincidono coi segni di a e di b risp.

818. *Il prodotto di due numeri complessi è un numero complesso che ha per modulo il prodotto dei moduli e per argomento la somma degli argomenti dei due fattori.*

Cioè:

$$[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)]\cdot[r'(\cos\varphi'+i\sin\varphi')]=rr'\cdot[\cos(\varphi+\varphi')+i\sin(\varphi+\varphi')]. \tag{7}$$

Eseguendo il prodotto secondo le regole già esposte si ha infatti:

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\cdot r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')$$
$$= rr'\{[\cos\varphi\cos\varphi' - \sin\varphi\sin\varphi'] + i[\sin\varphi\cos\varphi' + \sin\varphi'\cos\varphi]\}.$$

Ma dalla trigonometria si ha:

$$\cos\varphi\cos\varphi' - \sin\varphi\sin\varphi' = \cos(\varphi + \varphi')$$
$$\sin\varphi\cos\varphi' + \cos\varphi\sin\varphi' = \sin(\varphi + \varphi'),$$

onde si ottiene appunto la formola (7).

819. *Il quoto di due numeri complessi è un numero complesso*

che ha per modulo il quoto dei moduli e per argomento la differenza dei due argomenti. Cioè:

$$\frac{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}{r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')} = \frac{r}{r'}\left[\cos(\varphi - \varphi') + i\sin(\varphi - \varphi')\right]. \qquad (8)$$

Infatti, pel teorema precedente, si ha appunto:

$$r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')\cdot\frac{r}{r'}\left[\cos(\varphi - \varphi') + i\sin(\varphi - \varphi')\right]$$

$$= r'\cdot\frac{r}{r'}\cdot\left[\cos\{\varphi' + (\varphi - \varphi')\} + i\sin\{\varphi' + (\varphi - \varphi')\}\right]$$

$$= r\cdot[\cos\varphi + i\sin\varphi].$$

820. Dalla regola data poco fa per il prodotto di due numeri complessi si deduce subito che *il prodotto di quanti si vogliano numeri complessi è un numero complesso che ha per modulo il prodotto dei moduli e per argomento la somma degli argomenti dei singoli fattori.*

Consideriamo infatti il prodotto di quattro numeri complessi:

$$\cos\varphi + i\sin\varphi\,,\ \cos\varphi' + i\sin\varphi'\,,\ \cos\varphi'' + i\sin\varphi''\,,\ \cos\varphi''' + i\sin\varphi'''$$

nei quali per semplicità supporremo i moduli eguali all'unità. Moltiplicando, colla regola data sopra, il primo per il secondo, quindi il risultato per il terzo, e così via otterremo successivamente:

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)(\cos\varphi'+i\sin\varphi')(\cos\varphi''+i\sin\varphi'')(\cos\varphi'''+i\sin\varphi''')$$

$$=[\cos(\varphi+\varphi'+\varphi'')+i\sin(\varphi+\varphi'+\varphi'')](\cos\varphi'''+i\sin\varphi''')$$

$$=\cos(\varphi+\varphi'+\varphi''+\varphi''')+i\sin(\varphi+\varphi'+\varphi''+\varphi''').$$

821. Se nella formola:

$$[\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1][\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2]\ldots[\cos\varphi_n + i\sin\varphi_n]$$

$$= \cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n)$$

supponiamo $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \ldots = \varphi_n = \varphi$, essa ci da la seguente formola, detta di *Moivre*:

$$[\cos\varphi + i\sin\varphi]^n = \cos\cdot n\varphi + i\sin\cdot n\varphi. \qquad (9)$$

Questa formola non vale soltanto per n intero e positivo, ma anche per n intero e negativo.

Si ha infatti:

$$[\cos\varphi + i\sin\varphi]^{-n} = \frac{1}{[\cos\varphi + i\sin\varphi]^n},$$

onde per la formola (9):

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{-n} = \frac{1}{\cos\cdot n\varphi + i\sin\cdot n\varphi}. \qquad (10)$$

Ma, per la regola data all' art. 819, si ha:

$$\frac{1}{\cos n\varphi + i\sin n\varphi} = \frac{\cos\cdot 0 + i\sin\cdot 0}{\cos n\varphi + i\sin n\varphi} = \cos(0 - n\varphi) + i\sin(0 - n\varphi)$$

$$= \cos(-n\varphi) + i\sin(-n\varphi),$$

onde, sostituendo ciò in (10), si conclude appunto:

$$[\cos\varphi + i\sin\varphi]^{-n} = \cos(-n\varphi) + i\sin(-n\varphi).$$

Sarebbe fuori di luogo l'esaminare qui se la formola (9) possa sussistere anche per valori frazionarii od irrazionali di n non avendo noi finora ancor stabilito che cosa debba intendersi per potenza frazionaria di un numero complesso. A tale oggetto è necessario innanzi tutto di ricercare se, dato ad arbitrio un numero complesso A, esista qualche numero complesso che elevato alla potenza n^{ma} riproduca A, cioè se e quale significato possa avere il simbolo $\sqrt[n]{A}$ quando A è un numero complesso.

Di ciò appunto ci occuperemo nel prossimo §.

Note ed Esercizi.

1. Dalla regola per la moltiplicazione di due numeri complessi sotto forma trigonometrica dedurre la costruzione geometrica del punto che rappresenta il prodotto di due numeri complessi rappresentati da due punti dati.

2. Dedurre dalla formola:

$$\cos m\varphi + i\sin m\varphi = [\cos\varphi + i\sin\varphi]^m$$

mediante lo sviluppo della potenza del binomio, le espressioni di $\cos m\varphi$ e di $\sin m\varphi$ in funzione razionale intera di $\cos\varphi$ e di $\sin\varphi$:

$$\cos m\varphi = \cos^m\varphi - \binom{m}{2}\cos^{m-2}\varphi\sin^2\varphi + \binom{m}{4}\cos^{m-4}\varphi\sin^4\varphi + \ldots$$

$$\sin m\varphi = m\cos^{m-1}\varphi\sin\varphi - \binom{m}{3}\cos^{m-3}\varphi\sin^3\varphi + \binom{m}{5}\cos^{m-5}\varphi\sin^5\varphi + \ldots$$

3. Supposto m dispari, si consideri l'equazione del grado m in x:

$$x\left\{ m\left(1-x^2\right)^{\frac{m-1}{2}} - \binom{m}{3}\left(1-x^2\right)^{\frac{m-3}{2}}x^2 + \binom{m}{5}\left(1-x^2\right)^{\frac{m-5}{2}}x^4 - \ldots \pm x^{m-1}\right\} = \sin\psi$$

e si dimostri, in base alla nota precedente, che essa è risoluta da:

$$x = \sin\frac{\psi}{m},\; x = \sin\frac{\psi+2\pi}{m},\; x = \sin\frac{\psi+4\pi}{m},\ldots,\; x = \sin\frac{\psi+2(m-1)\pi}{m}.$$

È questo uno degli esempi più notevoli di risoluzione di equazioni *algebriche* per mezzo di funzioni *trascendenti*.

§ 4.° — Radici dei numeri complessi.

822. Se con A si indichi un numero complesso, cercare la $\sqrt[n]{A}$ significa cercare, ove esista, un altro numero complesso B che elevato alla n^{ma} potenza riproduca il numero A. Ora, dato il complesso A, esso si potrà sempre ridurre alla forma trigonometrica:

$$A = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \tag{1}$$

e così, se esiste un numero complesso B che risolva il problema proposto, esso si potrà poi sempre prendere sotto la forma trigonometrica:

$$B = \rho(\cos\psi + i\sin\psi). \tag{2}$$

Il problema consiste dunque nel cercare se e come si possano determinare un modulo ρ ed un argomento ψ per i quali si abbia:

$$B^n = A\,, \tag{3}$$

cioè per la formola di Moivre (V. § prec.)

$$\rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Ora per l'eguaglianza di due numeri complessi ridotti a forma trigonometrica, è necessario e sufficiente, come sappiamo, che essi abbiano eguali i moduli e che l'argomento dell'uno sia eguale all'argomento dell'altro aumentato di un multiplo positivo o negativo di circonferenze. Dovrà dunque aversi:

$$\rho^n = r\,,\ n\psi = \varphi + 2k\pi$$

dove k può essere un intero qualunque positivo o negativo; onde:

$$\rho = \sqrt[n]{r} = r^{\frac{1}{n}}\ ,\ \psi = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}.$$

La prima di queste due formole determina completamente ρ; poichè, dovendo ρ essere per definizione un numero reale e positivo, dovremo intendere per $\sqrt[n]{r}$ la radice n^{ma} *aritmetica*, cioè reale e positiva, del numero r, escludendo quindi le altre possibili radici n^{me} algebriche del numero r.

Per denotare ciò scriveremo d'ora innanzi $r^{\frac{1}{n}}$ anzichè $\sqrt[n]{r}$.

Sostituendo ora in (2) queste espressioni trovate per ρ e ψ, concludiamo che tutti i possibili numeri B, che soddisfano al problema, sono dati sempre ed esclusivamente dalla formola:

$$\sqrt[n]{A} = B = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) \tag{4}$$

in cui $r^{\frac{1}{n}}$ esprime la radice n^{ma} aritmetica del numero reale po-

sitivo r ed in cui k può assumere qualsiasi valore intero, positivo nullo o negativo.

823. Poichè nella (4) l'intero k è affatto arbitrario, sembrerebbe a prima vista che esistessero infiniti valori di B che soddisfano al problema. Noi invece dimostreremo che gl' infiniti valori che così si ottengono, si riducono soltanto ad n fra loro distinti, cioè che *ogni numero complesso ammette precisamente* n *radici ennesime fra loro distinte.*

Di fatti, qualunque sia il valore attribuito a k, esso sarà sempre uguale ad un multiplo di n, che indicheremo con Mn, più un certo numero k', resto della divisione di k per n, il quale, essendo più piccolo di n, potrà soltanto avere i valori 0, 1, 2, ... $n-1$. Sostituendo allora in (4) il k sotto la forma $k = Mn + k'$, troviamo per argomento del numero B l'angolo:

$$\frac{\varphi + 2(Mn + k')\pi}{n} = \frac{\varphi + 2k'\pi}{n} + 2M\pi$$

e la (4) diviene:

$$B = r^{\frac{1}{n}}\left\{\cos\left(\frac{\varphi + 2k'\pi}{n} + 2M\pi\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2k'\pi}{n} + 2M\pi\right)\right\}.$$

Ma, essendo M un numero intero, si può omettere il $2M\pi$, perchè il seno e coseno di un angolo non variano se all' angolo si aggiunga un numero intero di circonferenze. Resterà dunque:

$$B = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\varphi + 2k'\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k'\pi}{n}\right) \tag{5}$$

dove k' può assumere soltanto gli n valori 0, 1, 2 ... $(n-1)$; onde si avranno *al più* n valori distinti di B, ossia di $\sqrt[n]{A}$.

D'altra parte è facile riconoscere che gli n valori che così si ottengono, sono tutti distinti fra loro. Supponiamo infatti che, sostituendo nella (5) in luogo di k' due valori particolari k' e k'' (compresi fra 0, 1, 2, ..., $n-1$), trovassimo per B due valori eguali:

$$r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\varphi+2k'\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k'\pi}{n}\right) = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\varphi + 2k''\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi + 2k''\pi}{n}\right).$$

In tal caso, si dovrebbe avere, come all' art. 822:

$$\frac{\varphi + 2k'\pi}{n} = \frac{\varphi + 2k''\pi}{n} + 2M\pi$$

d'onde, moltiplicando per n, riducendo e dividendo quindi per 2π, si deduce:

$$k' - k'' = Mn. \tag{α}$$

Ora, essendo k' e k'' entrambi minori di n, la loro differenza $k' - k''$ sarà anche, in valore assoluto, minore di n, e per conseguenza l'eguaglianza (α) è assurda, poichè un numero minore di n

non può essere un multiplo di n, salvo il caso in cui il numero sia lo zero; in questo caso però si avrebbe $k'-k''=0$, cioè $k'=k''$ contrariamente all'ipotesi fatta che k' e k'' fossero due valori differenti dati a k. Gli n valori dati dalla formola (5) sono dunque tutti distinti. Concludiamo dunque che *ogni numero complesso* $A = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$ *ammette precisamente* n *radici* n^{me} *fra loro distinte, che si ricavano dalla formola generale*:

$$\sqrt[n]{A} = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) \tag{6}$$

dando a k *i valori* 0, 1, 2,... n — 1.

824. Se nella formola generale:

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) \tag{7}$$

facciamo in particolare $r = 1$, $\varphi = 0$, essa ci dà l' espressione generale delle radici n^{me} dell' unità, cioè:

$$\sqrt[n]{1} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} \tag{8}$$

Quindi, per la regola del prodotto di due numeri complessi sotto la forma trigonometrica, la (7) può anche scriversi:

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \left[r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)\right]\cdot\sqrt[n]{1},$$

cioè: *le* n *radici* n^{me} *di un numero qualunque si possono ricavare da una fra esse moltiplicandola successivamente per le radici* n^{me} *di* 1.

825. Importa perciò principalmente di saper calcolare le n radici n^{me} di 1, che si ottengono dalla espressione generale (8) daopu a k i valori 0, 1, 2,... n—1. A tale oggetto si può considerare innanzi tutto che quell'espressione può anche scriversi per la formola di Moivre come segue:

$$\sqrt[n]{1} = \left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^k, \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ n - 1.$$

Cioè: *dopo aver calcolato la* $\sqrt[n]{1}$ *che corrisponde a* $k = 1$, *basterà elevare successivamente il valore così ottenuto alle potenze* 1, 2, 3,... n—1 *per ottenere tutte le altre radici distinte dell'unità.*

826. In secondo luogo è importante di osservare che: *se nell'espressione generale* (8) *si sostituiscano per* k *due valori complementari l'uno dell'altro rispetto ad* n, *cioè p. es.:* k=h *e* k=n—h, *le due radici* n^{me} *di* 1, *che così si ottengono, sono due numeri com-*

plessi fra loro coniugati. Si ha infatti:

$$\cos\frac{2(n-h)\pi}{n}+i\sin\frac{2(n-h)\pi}{n}=\cos\left(-\frac{2h\pi}{n}+2\pi\right)$$

$$+i\sin\left(-\frac{2h\pi}{n}+2\pi\right)=\cos\left(-\frac{2h\pi}{n}\right)+i\sin\left(-\frac{2h\pi}{n}\right)$$

$$=\cos\frac{2h\pi}{n}-i\sin\frac{2h\pi}{n}$$

dove l'ultima espressione è appunto il numero coniugato al numero $\cos\frac{2h\pi}{n}+i\sin\frac{2h\pi}{n}$, che si otterrebbe come $\sqrt[n]{1}$ per $k=h$. Si vede dunque che le radici n^{me} *complesse* dell'unità sono fra loro coniugate a due a due. Oltre alle radici n^{me} complesse vi sarà, se n è dispari, una sola radice reale (eguale ad 1, che si ottiene per $k=0$), e se n è pari, due radici reali, l'una eguale a $+1$, l'altra a -1, che corrispondono ai due valori dell'espressione (8) per $k=0$ e $k=\frac{n}{2}$.

827. *Casi particolari* per $n=1, 2, 3, 4$.

Per $n=1$, si ha una sola radice 1.ª dell'unità che ha il valore 1.

Per $n=2$, si hanno due radici quadrate dell'unità, che hanno i valori $+1$ e -1.

Per $n=3$, la formola generale (8) dà:

$$\sqrt[3]{1}=\cos\frac{2k\pi}{3}+i\sin\frac{2k\pi}{3}\quad,\quad k=0,\ 1,\ 2.$$

Per $k=0$, si ha il valore 1; per $k=1$, si ha il valore:

$$\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

come subito si vede dall'iscrizione del triangolo equilatero nel cerchio di raggio 1.

Per $k=2$, già sappiamo doversi avere il valore coniugato $-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Se poniamo per brevità:

$$-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=\varepsilon,$$

si dovrà avere per l'osservazione fatta all'art. 825:

$$-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=\varepsilon^2$$

come infatti si può subito verificare.

Per $n=4$, la formola generale (8) dà:

$$\sqrt[4]{1}=\cos\frac{2k\pi}{4}+i\sin\frac{2k\pi}{4}\quad,\quad k=0,\ 1,\ 2,\ 3,$$

onde si trovano immediatamente i valori già incontrati:

$$1\ ,\ i\ ,\ -1\ ,\ -i.$$

828. Si è visto sopra (art. 825) che esiste sempre almeno una radice n^{ma} dell'unità che elevata alle potenze successive riproduce tutte le altre. Ogni radice cosiffatta si chiama radice n^{ma} *primitiva* dell'unità. Ora è facile riconoscere che le radici n^{me} primitive di 1 si ottengono dall'espressione generale delle radici n^{me}:

$$\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\ ,\ k=0,\ 1,\ 2,\ldots n-1, \tag{8}$$

prendendo per k tutti i numeri interi inferiori ad n e primi con n (quindi in particolare $k=1$; in quanto il numero 1 si considera come primo con ogni altro numero). Invero, se k ha in comune con n un divisore θ diverso da 1, si avrà:

$$\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)^{\frac{n}{\theta}}=\cos\frac{2k\pi}{\theta}+i\sin\frac{2k\pi}{\theta}=1\ ,$$

epperò l'espressione (8) non può essere una radice primitiva, poichè elevata alle successive potenze darebbe al più $\frac{n}{\theta}$ valori distinti. Se invece k è primo con n, le potenze:

$$\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)^{\rho},\ \rho=0,\ 1,\ 2,\ldots,n-1$$

saranno tutte distinte; poichè, se si avesse:

$$\cos\frac{2k\rho\pi}{n}+i\sin\frac{2k\rho\pi}{n}=\cos\frac{2k\rho'\pi}{n}+i\sin\frac{2k\rho'\pi}{n},$$

se ne dedurrebbe:

$$\frac{2k\rho\pi}{n}=\frac{2k\rho'\pi}{n}+2\mathrm{M}\pi$$

essendo M un intero, cioè:

$$k(\rho-\rho')=\mathrm{M}n.$$

Ma k è primo con n; quindi $\rho-\rho'$ dovrebbe essere divisibile per n, il che è assurdo, essendo tale differenza inferiore ad n in valore assoluto.

Dunque: *il numero delle radici* n^{me} *primitive dell'unità è uguale al numero dei numeri naturali inferiori ad* n *e primi con* n. Questo numero si suole indicare nella *teoria dei numeri* con $\varphi(n)$.

L'espressione di $\varphi(n)$ si trova facilmente dopo aver dimostrato che *se* $n = \mu \cdot \nu$, *dove* μ *e* ν *sono due numeri naturali primi fra loro*, $\varphi(n) = \varphi(\mu)\,\varphi(\nu)$.

829. Per dimostrare ciò, osserviamo che, detta A una qualunque delle radici primitive μ^{me} di 1 e B una qualunque delle sue radici primitive ν^{me}, il prodotto $A^\alpha \cdot B^\beta$ ci rappresenta tutte le radici n^{me} di 1 facendo variare in tutti i modi possibili l'esponente α da 0 a $\mu - 1$ e l'esponente β da 0 a $\nu - 1$.

Invero, che $A^\alpha \cdot B^\beta$ sia radice n^{ma} di 1 si riconosce immediatamente, poichè $A^\mu = B^\nu = 1$ e quindi:

$$(A^\alpha \cdot B^\beta)^n = A^{\alpha n} \cdot B^{\beta n} = (A^\mu)^{\alpha\nu}(B^\nu)^{\beta\mu} = 1.$$

Resta soltanto a dimostrare che i $\mu \cdot \nu$ valori di $A^\alpha B^\beta$ corrispondenti ai $\mu \cdot \nu$ sistemi di esponenti α, β sono tutti distinti, e ci danno quindi *tutte* le n radici di 1. Supposto infatti che si avesse:

$$A^\alpha B^\beta = A^{\alpha'} B^{\beta'},$$

se ne dedurrebbe, elevando alla potenza ν ed osservando che $B^\nu = 1$:

$$A^{\alpha\nu} = A^{\alpha'\nu}, \text{ onde } A^{(\alpha-\alpha')\nu} = 1.$$

Di quì segue, essendo A radice primitiva μ^{ma} di 1, che l'esponente $(\alpha - \alpha')\nu$ dev'essere un multiplo di μ. Ma ν è primo con μ; dunque dev'essere $\alpha - \alpha'$ divisibile per μ. Ma la differenza $\alpha - \alpha'$ è inferiore a μ; dunque $\alpha = \alpha'$. Similmente si proverebbe che $\beta = \beta'$.

Poichè le potenze $A^0, A, A^2, \ldots, A^{\mu-1}$ non sono altro che le μ radici μ^{me} di 1 e similmente per $B^0, B, \ldots, B^{\nu-1}$, veniamo così ad aver dimostrato che:

Se $n = \mu \cdot \nu$, *essendo* μ *e* ν *numeri primi fra loro, le* n *radici* n^{me} *di* 1 *si possono ottenere moltiplicando una qualunque delle* μ *radici* μ^{me} *di* 1 *per una qualunque delle* ν *radici* ν^{me}.

830. Siano, come nel teorema precedente:

$$A_0, A_1, \ldots, A_{\mu-1}, B_0, B_1, \ldots, B_{\nu-1}$$

risp. le radici μ^{me} e ν^{me} di 1. È importante notare che, se A_i è radice μ^{ma} primitiva e B_j è del pari radice ν^{ma} primitiva, il prodotto $A_i \cdot B_j$ sarà radice n^{ma} primitiva di 1. Supponiamo infatti che si avesse, se è possibile, per θ e θ' inferiori ad n:

$$A_i^\theta B_j^\theta = A_i^{\theta'} B_j^{\theta'}.$$

Elevando i due membri alla potenza ν, se ne dedurrebbe, poichè $B_j^\nu = 1$:

$$A_i^{(\theta-\theta')\nu} = 1.$$

Poichè A_i è radice primitiva μ^{ma}, dovrebbe dunque $(\theta - \theta')\nu$ essere un multiplo di μ. Ma ν è primo con μ; quindi dev' essere $\theta - \theta'$ divisibile per μ. Similmente si dimostrerebbe dover essere $\theta - \theta'$ divisibile per ν. Il numero $\theta - \theta'$, essendo divisibile pei numeri μ e ν che sono primi fra loro, sarà dunque anche divisibile

pel loro prodotto, cioè per n; onde, essendo θ e θ' inferiori ad n, si concluderà come sopra: $\theta = \theta'$.

Se invece A_i non è radice μ^{ma} primitiva, ma sia p. es. $A_i^{\mu'} = A_i^{\mu''}$ (essendo μ' e μ'' entrambi inferiori a μ), il prodotto A_iB_j non può essere radice primitiva n^{ma}, poichè si ha allora evidentemente:

$$(A_iB_j)^{\mu'\nu} = (A_iB_j)^{\mu''\nu}.$$

Concludiamo che: *se* $n = \mu \cdot \nu$, *essendo* μ *e* ν *primi fra loro, si otterranno senza ripetizioni tutte le radici primitive* n^{me} *di* 1 *moltiplicando una qualunque delle radici primitive* μ^{me} *per una qualunque delle radici primitive* ν^{me}. Di quì segue evidentemente come corollario che $\varphi(n) = \varphi(\mu)\varphi(\nu)$, c. d. d.

831. Se p è un numero primo, si ha evidentemente $\varphi(p) = p - 1$, e quindi *tutte le radici* p^{me} *di* 1 *sono primitive all'infuori di quella che ha il valore* 1. Per avere poi $\varphi(p^\alpha)$ basta osservare che i soli numeri che non superano p^α e hanno con esso un divisore comune sono:

$$p\,,\ 2p\,,\ 3p\,,\ \ldots,\ p^{\alpha-1}\cdot p$$

cioè in numero di $p^{\alpha-1}$, e che per conseguenza il numero di quelli inferiori a p^α e primi con esso è dato da $p^\alpha - p^{\alpha-1}$. Si ha dunque:

$$\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1} = p^\alpha\left(1 - \frac{1}{p}\right). \tag{9}$$

832. Sia ora $n = p^\alpha \cdot q^\beta \cdot r^\gamma \ldots$ un numero intero qualunque decomposto nei suoi fattori primi *distinti* $p, q, r, \ldots$. Per quanto si è dimostrato dev'essere:

$$\varphi(n) = \varphi(p^\alpha)\varphi(q^\beta \cdot r^\gamma \ldots)$$

giacchè p^α è primo con $q^\beta \cdot r^\gamma \ldots$. Similmente:

$$\varphi(q^\beta \cdot r^\gamma \ldots) = q^\beta\varphi(r^\gamma \ldots)$$

Si conclude dunque evidentemente:

$$\varphi(n) = \varphi(p^\alpha)\varphi(q^\beta)\varphi(r^\gamma) \ldots$$

cioè per la (9):

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{q}\right)\left(1 - \frac{1}{r}\right) \ldots \tag{10}$$

Note ed Esercizi.

1. Le n radici n^{me} di 1 hanno per indici nel piano gli n punti di divisione in parti eguali della circonferenza che ha per centro l'origine delle coordinate; assumendosi come primo punto di divisione l'origine degli archi.

2. Dimostrare che la somma delle n radici n^{me} dell'unità è uguale a zero, eccettuato il caso di $n = 1$, e dedurne, in base all'interpretazione geometrica data nell'esercizio precedente, il seguente teorema di geometria del piano: *se una circonferenza si divida in* n *parti eguali e quindi si*

tiri per il centro una retta qualunque, la somma delle distanze da questa retta dei punti di divisione che cadono a destra della retta è uguale alla somma delle distanze dalla stessa retta dei punti di divisione che cadono a sinistra.

3. Dimostrare che le 5 radici quinte di 1 sono date da 1 e dai quattro numeri:

$$\cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1) + i\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

$$\cos\frac{2\pi}{5} - i\sin\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1) - i\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

$$\cos\frac{4\pi}{5} + i\sin\frac{4\pi}{5} = -\frac{1}{4}(\sqrt{5} + 1) + i\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

$$\cos\frac{4\pi}{5} - i\sin\frac{4\pi}{5} = -\frac{1}{4}(\sqrt{5} + 1) - i\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

4. Calcolare per $n = 2, 3, 4$, le radici n^{me} dei numeri:

$$-1\,,\; i\,,\; -i.$$

5. Essendo m ed n interi positivi qualunque, dimostrare che il simbolo $\sqrt[m]{\sqrt[n]{A}}$ ha precisamente gli stessi mn significati del simbolo $\sqrt[mn]{A}$.

6. *Se* $n = p^{\alpha}.q^{\beta}.r^{\gamma}, \ldots$ *è un intero qualunque decomposto nei suoi fattori primi distinti* p, q, r, . . . , *tutte le radici* n^{me} *di* 1 *si possono ottenere moltiplicando una qualunque radice* $(p^{\alpha})^{ma}$ *per una qualunque radice* $(q^{\beta})^{ma}$ *ecc.*, *il che si può appunto fare in* n *modi diversi. Si otterranno poi similmente tutte le radici primitive* n^{me} *di* 1 *moltiplicando una qualunque radice primitiva* $(p^{\alpha})^{ma}$ *per una qualunque radice primitiva* $(q^{\beta})^{ma}$ *ecc.*

Questi due teoremi sono semplici corollari dei due teoremi dimostrati risp. agli articoli 329 e 330.

7. Dimostrare che l'espressione $\sqrt[p]{\sqrt[p]{\ldots\sqrt[p]{1}}}$, in cui le estrazioni di radice sono in numero di α, dà precisamente, quando p è primo, tutte e sole le radici primitive $(p^{\alpha})^{me}$ di 1, purchè al primo radicale $\sqrt[p]{1}$ non si attribuisca il valore 1.

8. Si è già osservato (nella nota 8ª del § prec.) come il problema della divisione di un arco di cerchio qualunque in m parti eguali, conduca, per m dispari, ad un'equazione algebrica del grado m nell'incognita x, della forma:

$$x\left\{m\left(1-x^2\right)^{\frac{m-1}{2}} - \binom{m}{3}\left(1-x^2\right)^{\frac{m-3}{2}}x^2 + \binom{m}{5}\left(1-x^2\right)^{\frac{m-5}{2}}x^4 \ldots \pm x^{m-1}\right\} = A$$

la quale è per conseguenza risolubile per via trascendente.

È però importante di notare che questa stessa equazione si può anche *risolvere per radicali*, restando cioè nel campo puramente algebrico, mediante la formola:

$$x = \frac{1}{2i}\left\{\sqrt[m]{Ai + \sqrt{1-A^2}} + \sqrt[m]{Ai - \sqrt{1-A^2}}\right\} \qquad (\alpha)$$

la quale da precisamente le m soluzioni cercate, se alla interpretazione

dei radicali m^{mi} si imponga la restrizione:

$$\sqrt[m]{Ai + \sqrt{1 - A^2}} \times \sqrt[m]{Ai - \sqrt{1 - A^2}} = -1.$$

Per dimostrare tutto ciò, basterà considerare il caso in cui il parametro arbitrario A ha un valore reale, non superiore in valore assoluto all'unità, ed estraendo le radici m^{me} accennate nella (α), nel modo spiegato in questo §, riconoscere l'identità della formola (α) colla formola:

$$x = \sin \frac{\text{arc} \sin A}{m}$$

già ottenuta per via trascendente.

§ 5.° — Limiti e serie di numeri complessi.

833. Data una successione indefinita di numeri complessi:

$$a_1 + b_1 i\ ,\ a_2 + b_2 i\ ,\ a_3 + b_3 i\ ,\ \ldots\ ,\ a_n + b_n i\ ,\ \ldots\ , \tag{1}$$

si dirà che $a_n + b_n i$ tende, col crescere dell'indice n all'infinito, ad un *limite* finito e determinato $L = A + Bi$, quando si abbia:

$$\lim_{n=\infty} a_n = A\ \ ,\ \ \lim_{n=\infty} b_n = B. \tag{2}$$

Di qui segue evidentemente:

$$\lim_{n=\infty}(A - a_n) = 0\ \ ,\ \ \lim_{n=\infty}(B - b_n) = 0$$

onde anche:

$$\lim_{n=\infty} \sqrt{(A - a_n)^2 + (B - b_n)^2} = \lim_{n=\infty} \text{mod}\{(A + Bi) - (a_n + b_n i)\} = 0\ ,$$

cioè dal tendere i termini della successione (1) al limite $A + Bi$, col crescere di n, segue che il modulo della differenza fra $A+Bi$ ed un termine qualunque diviene piccolo a piacere col crescere dell'indice del termine, e reciprocamente.

La definizione di limite di una successione di numeri complessi è dunque perfettamente analoga a quella già data per una successione di numeri reali, soltanto che alle parole *valore assoluto della differenza* si devono sostituire le parole *modulo della differenza,* ecc. E del resto il modulo di un numero complesso si chiama anche spesso il *valore assoluto del numero complesso,* in accordo col fatto che il modulo di un numero reale (considerato come caso particolare di un numero complesso) altro non è che il suo valore assoluto.

834. Se si abbia ora una serie infinita a termini complessi:

$$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) + (a_3 + b_3 i) + \ldots + (a_n + b_n i) + \ldots\ ,$$

si dirà, con definizione affatto analoga a quella già data per le

serie a termini reali, che *questa serie è convergente ed ha per somma un certo numero complesso* A + Bi, *quando la somma* S_n *dei primi* n *termini della serie abbia per limite* A + Bi *col crescere infinitamente dell' indice* n.

Poichè:

$$S_n=(a_1+b_1i)+ \dots +(a_n+b_ni)=(a_1+a_2+ \dots +a_n)+(b_1+b_2+ \dots +b_n)i,$$

dire che:

$$\lim_{n=\infty} S_n = A + Bi$$

equivale a dire, per l' art. prec., che:

$$\lim_{n=\infty}(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = A \ , \ \lim_{n=\infty}(b_1 + b_2 + \dots + b_n) = B \ ,$$

cioè che le due serie a termini *reali*:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots, \qquad b_1 , b_2 + b_3 + \dots$$

sono convergenti ed hanno risp. per somma A e B. Si vede dunque che *affinchè una serie a termini complessi sia convergente, è necessario e sufficiente che sia convergente la serie formata dalle parti reali e la serie formata dai coefficienti delle parti imaginarie.*

Se modS_n diventi più grande di ogni quantità assegnabile col crescere dell'indice *n*, si dirà invece che la serie è *divergente*.

In ogni altro caso si dirà indeterminata.

835. *Se in luogo di una serie data*:

$$(a_1 + b_1i) + (a_2 + b_2i) + (a_3 + b_3i) + \dots$$

si consideri la serie formata dai valori assoluti dei termini:

$$mod(a_1 + b_1i) + mod(a_2 + b_2i) + mod(a_3 + b_3i) + \dots,$$

e quest'ultima si trovi essere convergente, sarà convergente anche la prima.

Infatti, se la serie dei moduli:

$$\sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2} + \sqrt{a_3^2 + b_3^2} + \dots$$

che è una serie a termini reali tutti *positivi*, sia convergente, *a fortiori* saranno convergenti le serie a termini positivi più piccoli:

$$\sqrt{a_1^2} + \sqrt{a_2^2} + \sqrt{a_3^2} + \dots$$

e

$$\sqrt{b_1^2} + \sqrt{b_2^2} + \sqrt{b_3^2} + \dots,$$

ed *a fortiori* ancora le due serie a termini reali:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 + a_2 + a_3 + \dots \\ b_1 + b_2 + b_3 + \dots \end{array}\right. \qquad (\alpha)$$

i cui termini non possono differire che per il segno dai termini corrispondenti, tutti positivi, delle due serie precedenti (art. 627, corollario).

Ora la convergenza delle due serie (α) esprime appunto, per l'art. prec., la convergenza della serie proposta:

$$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) + (a_3 + b_3 i) + \ldots .$$

836. Notiamo a scanso di equivoco che la reciproca della proposizione precedente non è vera in generale, poichè una serie a termini complessi può invece essere convergente senza che sia convergente la serie formata dai moduli dei suoi termini.

In analisi però hanno specialmente importanza quelle serie che si conservano convergenti anche quando in luogo dei singoli termini si prendano i loro moduli. A tutte le serie che godono di questa proprietà si è dato il nome di serie *assolutamente convergenti.*

837. Così, per fermarci su di un esempio importante, *la serie esponenziale*:

$$1 + \frac{x}{\lfloor 1} + \frac{x^2}{\lfloor 2} + \frac{x^3}{\lfloor 3} + \ldots$$

è assolutamente convergente qualunque sia il valore, reale o complesso, che si dia alla x. Infatti la corrispondente serie dei moduli

$$1 + \frac{\mathrm{mod}x}{\lfloor 1} + \frac{(\mathrm{mod}x)^2}{\lfloor 2} + \frac{(\mathrm{mod}x)^3}{\lfloor 3} + \ldots$$

è convergente, per quanto già si è dimostrato (art. 635), essendo mod$x$ un numero reale.

838. Teorema. — *Se le due serie*:

$$U = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots \quad , \quad V = v_1 + v_2 + v_3 + \ldots$$

sono assolutamente convergenti, la serie:

$$\sum_{i,j} u_i v_j \equiv u_\alpha v_\beta + u_\gamma v_\delta + \ldots \tag{1}$$

ove la sommatoria va estesa a tutti gli infiniti prodotti $u_i v_j$ *da addizionarsi in un ordine fissato ad arbitrio, è del pari assolutamente convergente ed ha per somma il prodotto* UV.

Invero, per la supposta convergenza delle serie:

$$U' = \mathrm{mod}u_1 + \mathrm{mod}u_2 + \ldots, \quad V' = \mathrm{mod}v_1 + \mathrm{mod}v_2 + \ldots,$$

se poniamo:

$$\mathrm{mod}u_{n+1} + \mathrm{mod}u_{n+2} + \ldots = \varepsilon_n \ , \ \mathrm{mod}v_{n+1} + \mathrm{mod}v_{n+2} + \ldots = \eta_n \ , \tag{2}$$

si ha:

$$\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0 \ , \ \lim_{n=\infty} \eta_n = 0,$$

e, se si sommano le uguaglianze (2) dopo aver moltiplicato la

prima per V′ e la seconda per U′, si ottiene:

$$\sum_{i<n}\mathrm{mod}(u_i v_j) + \sum_{j>n}\mathrm{mod}(u_i v_j) < \varepsilon_n V' + \eta_n U' \qquad (3)$$

dove la prima sommatoria s' intende estesa ad un numero *finito* qualunque di prodotti $u_i v_j$, pei quali sia però $i > n$, e analogamente per la seconda.

Indicando ora con Σ_n la somma di un numero qualunque di termini consecutivi della serie (1), che sia però abbastanza grande perchè fra essi si trovino compresi tutti quei prodotti $u_i v_j$, nei quali i ed j sono entrambi $\lesseqgtr n$, si può scrivere:

$$\Sigma_n = (u_1 + u_2 + \dots + u_n)(v_1 + v_2 + \dots + v_n) + T_n \qquad (4)$$

dove T_n si compone soltanto di termini che possono includersi nell' una o nell' altra delle due sommatorie (3).

Si avrà dunque per la (3):

$$\mathrm{mod}T_n < \varepsilon_n V' + \eta_n U',$$

cosicchè dalla (4) segue manifestamente:

$$\lim_{n=\infty}\Sigma_n = \lim_{n=\infty}(u_1 + u_2 + \dots + u_n)\lim_{n=\infty}(v_1 + v_2 + \dots + v_n) = UV,$$

c. d. d.

La serie (1) è poi assolutamente convergente, giacchè la serie dei moduli dei suoi termini non è che la serie dedotta da U′ e V′ nello stesso modo con cui la (1) é dedotta da U e V.

839. Corollario. — *Ogni serie assolutamente convergente conserva la convergenza ed il suo valore comunque si alteri l'ordine dei suoi termini.*

Se $U = u_1 + u_2 + \dots$ è la serie primitiva, e si prenda per V la serie $1 + 0 + 0 + 0 + \dots$, la serie (1) si ridurrà infatti, evidentemente alla stessa serie $u_1 + u_2 + \dots$; con questo però che i suoi termini si troveranno ora disposti in un ordine, che potrà essere fissato ad arbitrio.

E per quanto si è dimostrato, la serie (1) sarà ancora convergente, ed avrà per valore il prodotto $UV = U$.

Note ed Esercizi.

1. Teorema di Dirichlet. — *Affinchè una serie:*

$$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) + \dots \qquad (1)$$

sia convergente indipendentemente dall'ordine dei suoi termini, è necessario e sufficiente che sia convergente la serie dei moduli:

$$\sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2} + \dots . \qquad (2)$$

Per dimostrare questo teorema (che coincide in parte con quello del-

l' art. 839) basta osservare in primo luogo che affinchè la (1) sia convergente indipendentemente dall'ordine dei termini è, evidentemente, necessario e sufficiente che siano tali le due serie:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots \quad , \quad b_1 + b_2 + b_3 + \ldots ,$$

cioè (pg. 310, Nota 7ª) che siano convergenti le due serie:

$$|a_1| + |a_2| + |a_3| + \ldots \quad , \quad |b_1| + |b_2| + |b_3| + \ldots . \tag{3}$$

Ma, se sono convergenti le (3), lo è anche la serie:

$$(|a_1| + |b_1|) + (|a_2| + |b_2|) + \ldots$$

e quindi a maggior ragione la (2), che ha i termini corrispondenti più piccoli. Reciprocamente, dalla convergenza della (2) segue, precisamente come nella dimostrazione fatta all' art. 835, la convergenza delle (3). Il teorema si trova così dimostrato.

2. Il teorema dell' art. 838 trova un' importante applicazione nella ricerca del valore della serie, così detta *binomiale*:

$$f(x, y) = 1 + \binom{y}{1}x + \binom{y}{2}x^2 + \ldots \tag{α}$$

la quale è assolutamente convergente, comunque si scelga il valore di y, purchè il modulo di x sia inferiore all'unità, come si riconoscerà immediatamente applicando alla serie dei moduli il criterio del rapporto (articolo 681).

Nell'ipotesi di mod$x < 1$, potremo infatti scrivere, eseguendo il prodotto delle due serie $f(x, y)$ ed $f(x, y')$ corrispondenti a due valori qualisivogliano, reali o complessi, di y, ed ordinando i termini del prodotto secondo le potenze crescenti di x:

$$f(x, y)f(x, y') = \sum_{k=0}^{k=\infty} \left\{ \binom{y}{k} + \binom{y}{k-1}\binom{y'}{1} + \binom{y}{k-2}\binom{y'}{2} + \ldots + \binom{y'}{k} \right\} x^k$$

cioè anche (cfr. art. 498):

$$f(x, y)f(x, y') = \sum_{k=0}^{k=\infty} \binom{y + y'}{k} x^k = f(x, y + y'). \tag{β}$$

Prendendo $y' = -y$, si deduce di qui, poichè $f(x, 0) = 1$:

$$f(-y) = [f(y)]^{-1} \tag{γ}$$

ed applicando la (β) più volte di seguito, ne segue evidentemente qualunque sia l'intero positivo q:

$$[f(x, y)]^q = f(x, qy). \tag{δ}$$

Ciò posto, se p e q sono due interi positivi, si ha primieramente, per il teorema del binomio:

$$f(x, p) = 1 + \binom{p}{1}x + \binom{p}{2}x^2 + \ldots + \binom{p}{p}x^p = (1 + x)^p$$

e prendendo poi, nella (δ), $y = \frac{p}{q}$:

$$\left[f\left(x, \frac{p}{q}\right)\right]^q = f(x, p) = (1 + x)^p$$

d' onde:

$$f\left(x, \frac{p}{q}\right) = (1 + x)^{\frac{p}{q}}.$$

Da quest'ultima eguaglianza e dalla (γ) si conclude manifestamente che $f(x, y) = (1 + x)^y$ per ogni valore reale e razionale, positivo o negativo, di y.

Questa stessa proprietà si estenderà poi anche ai valori reali irrazionali di y, considerandoli come limiti di numeri razionali; onde si può enunciare che la eguaglianza:

$$(1 + x)^y = 1 + \binom{y}{1}x + \binom{y}{2}x^2 + \ldots$$

è valida, per $\text{mod}x < 1$, qualunque sia il valore dell'esponente reale y.

3. Detta R_{np} la somma dei p termini consecutivi all'n^{mo} nella serie:

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \ldots, \tag{A}$$

r_{np} la somma analoga per la serie:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots \tag{B}$$

e $\rho_{n,p}$ la corrispondente somma per la serie a termini positivi:

$$\text{mod}(\alpha_1 - \alpha_2) + \text{mod}(\alpha_2 - \alpha_3) + \text{mod}(\alpha_3 + \alpha_4) + \ldots, \tag{C}$$

si può scrivere evidentemente:

$$\begin{aligned} R_{np} &= \alpha_{n+p}u_{n+p} + \alpha_{n+p-1}u_{n+p-1} + \ldots + \alpha_{n+1}u_{n+1} \\ &= \alpha_{n+p}(u_{n+p} + u_{n+p-1} + \ldots + u_{n+1}) \\ &+ (\alpha_{n+p-1} - \alpha_{n+p})(u_{n+p-1} + \ldots + u_{n+1}) \\ &+ \ldots + (\alpha_{n+1} - \alpha_{n+2})u_{n+1} \\ &= \alpha_{n+p}r_{np} + (\alpha_{n+p-1} - \alpha_{n+p})r_{n,p-1} + \ldots + (\alpha_{n+1} - \alpha_{n+2})r_{n,1}. \end{aligned}$$

Quindi: *se* M_{np} *è il massimo fra i* p *numeri*:

$$\text{mod}r_{n1}, \text{mod}r_{n2}, \ldots, \text{mod}r_{np},$$

si ha:

$$\text{mod}R_{np} \overline{\gtreqless} (\rho_{n,p-1} + \text{mod}\alpha_{n+p})M_{np}.$$

4. Da questa disuguaglianza discende subito il:

Teorema di Abel: *Se sono convergenti le due serie* (B) *e* (C), *è convergente anche la serie* (A).

Si noti che dalle ipotesi fatte segue che $\text{mod}\alpha_{n+p}$ si mantiene finito comunque crescano n e p. Si può scrivere infatti:

$$\alpha_{n+p} = \alpha_1 - (\alpha_1 - \alpha_2) - (\alpha_2 - \alpha_3) - \ldots - (\alpha_{n+p-1} - \alpha_{n+p})$$

d' onde:

$$\operatorname{mod}\alpha_{n+p} < \operatorname{mod}\alpha_1 + \operatorname{mod}(\alpha_1 - \alpha_2) + \operatorname{mod}(\alpha_2 - \alpha_3) + \ldots.$$

5. Prendendo per le $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ una successione di numeri positivi non crescenti, dedurre da questo teorema il teorema di Abel già enunciato nel Cap. VII (§ 8°, Nota 5ª).

6. Con pari facilità si dedurrà da quella stessa disuguaglianza il teorema di *Dirichlet*:

Se è convergente la serie (C) *e se, col crescere di* n *all' infinito, la somma* $u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ *si mantiene finita, nel mentre che* α_n *tende allo zero, anche la serie* (A) *è convergente.*

7. Si dimostri, come caso particolare di questo teorema, che: *se la somma dei primi* n *termini di una serie si mantiene finita col crescere di* n *all'infinito, la serie, se non è già convergente, diverrà tale moltiplicandone i termini per dei numeri* $\alpha_1 \gtreqless \alpha_2 \gtreqless \alpha_3 \gtreqless \ldots$ *positivi e tendenti al limite zero.*

§ 6.° — Forma esponenziale dei numeri complessi. Relazioni fra le funzioni trigonometriche e le funzioni esponenziali.

840. La somma della serie esponenziale, che si è già notato (art. 837) essereconvergente per tutti i valori reali o complessi di x, si può esprimere, anche per i valori complessi di x, sotto la forma:

$$1 + \frac{x}{\lfloor 1} + \frac{x^2}{\lfloor 2} + \frac{x^3}{\lfloor 3} + \ldots = \lim_{n=\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, \qquad (1)$$

giacchè la dimostrazione da noi data (art. 638), nell'ipotesi che x fosse un numero reale, seguita senz'altro a valere anche nel caso in cui x sia un numero complesso.

Ricordiamo poi che *per* x *reale* si era altresì stabilita la formola:

$$e^x = 1 + \frac{x}{\lfloor 1} + \frac{x^2}{\lfloor 2} + \frac{x^3}{\lfloor 3} + \ldots \qquad (2)$$

con una dimostrazione che, a differenza della precedente, presuppone essenzialmente che x sia *reale*. E del resto il simbolo e^x non avrebbe, finora, alcun significato, quando l'esponente x fosse un numero complesso.

Pertanto, poichè la serie che sta nel secondo membro di (2) è convergente, qualunque sia il valore complesso $x = a + bi$ che si ponga in luogo di x, è naturale di dare appunto la seguente definizione:

Def. — *Per* $e^{(a+bi)}$ *s'intenderà d'ora innanzi la somma della serie convergente*:

$$1 + \frac{(a+bi)}{\lfloor 1} + \frac{(a+bi)^2}{\lfloor 2} + \frac{(a+bi)^3}{\lfloor 3} + \ldots.$$

È chiaro che, *posta questa definizione*, l'eguaglianza (2) si potrà ritenere valida qualunque sia il valore reale o complesso dell' esponente x.

841. La definizione data per e^x, quando x sia un numero complesso, non sarebbe però di alcuna utilità pratica, se non si dimostrasse che, posta questa definizione, seguiterà a sussistere inalterata la regola fondamentale per gli esponenti, espressa dalla formola:

$$e^x \cdot e^y = e^{x+y} \tag{3}$$

qualunque siano i valori reali o complessi di x e di y.

Ciò però si dimostra facilmente. Infatti, poichè:

$$e^x \cdot e^y = \left(1 + \frac{x}{\lfloor 1} + \frac{x^2}{\lfloor 2} + \ldots\right) \cdot \left(1 + \frac{y}{\lfloor 1} + \frac{y^2}{\lfloor 2} + \ldots\right),$$

sviluppando il prodotto delle due parentesi colla regola ordinaria del prodotto di due polinomi e indicando con w_n la somma di tutti quei termini del prodotto che sono di grado complessivo n in x ed y, si avrà (art. 838):

$$e^x \cdot e^y = 1 + w_1 + w_2 + w_3 + \ldots + w_n + \ldots \tag{4}$$

dove:

$$w_n = \frac{x^n}{\lfloor n} + \frac{x^{n-1}}{\lfloor n-1} \cdot \frac{y}{\lfloor 1} + \frac{x^{n-2}}{\lfloor n-2} \cdot \frac{y^2}{\lfloor 2} + \ldots + \frac{x}{\lfloor 1} \cdot \frac{y^{n-1}}{\lfloor n-1} + \frac{y^n}{\lfloor n}$$

d' onde (art. 216):

$$\lfloor n \, w_n = x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \ldots + y^n = (x+y)^n,$$

cosicchè:

$$w_n = \frac{(x+y)^n}{\lfloor n}.$$

Sostituendo ciò nella (4) viene:

$$e^x \cdot e^y = 1 + \frac{(x+y)}{\lfloor 1} + \frac{(x+y)^2}{\lfloor 2} + \frac{(x+y)^3}{\lfloor 3} + \ldots,$$

cioè appunto, per la definizione di e^{x+y}:

$$e^x \cdot e^y = e^{x+y},$$

c. d. d.

842. La funzione esponenziale e^x gode della proprietà di non annullarsi per alcun valore finito di x. Ammesso infatti che fosse $e^a = 0$, se ne dedurrebbe qualunque sia x:

$$e^x = e^{x-a} e^a = 0$$

il che è evidentemente falso.

843. In virtù della (1) si avrà sostituendo per x un imaginario puro $x = bi$:

$$\lim_{n=\infty} \left(1 + \frac{bi}{n}\right)^n = e^{bi}. \tag{5}$$

Se ora poniamo il numero complesso $1+\frac{bi}{n}$ sotto la forma trigonometrica:

$$1+\frac{bi}{n}=r(\cos\varphi+i\sin\varphi), \tag{6}$$

potremo anche scrivere per la formola di Moivre:

$$e^{bi}=\lim_{n=\infty}\cdot r^n(\cos n\varphi+i\sin\varphi), \tag{7}$$

cosicchè per calcolare il limite del secondo membro basterà trovare i limiti a cui tendono risp. il modulo r^n e l' argomento $n\varphi$ quando n tende all' infinito.

Dalla (6) si ha intanto:

$$r=\sqrt{1+\frac{b^2}{n^2}},$$

onde evidentemente:

$$\lim_{n=\infty} r=1.$$

Inoltre si può scrivere:

$$r^n=\left(\sqrt{1+\frac{b^2}{n^2}}\right)^n=\left(1+\frac{1}{\left(\frac{n^2}{b^2}\right)}\right)^{\frac{n}{2}}=\left[\left(1+\frac{1}{\left(\frac{n^2}{b^2}\right)}\right)^{\left(\frac{n^2}{b^2}\right)}\right]^{\frac{b^2}{2n}}. \tag{8}$$

Ma, ponendo per un momento $\frac{n^2}{b^2}=m$, cosicchè col crescere di n all'infinito anche m crescerà all'infinito, si ha evidentemente:

$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{\left(\frac{n^2}{b^2}\right)}\right)^{\left(\frac{n^2}{b^2}\right)}=\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=e \quad \text{(cfr. art. 639).}$$

Dalla (8) si deduce dunque, poichè $\lim\limits_{n=\infty}\frac{b^2}{2n}=0$:

$$\lim_{n=\infty} r^n=e^{\lim\frac{b^2}{2n}}=e^0=1. \tag{9}$$

Calcolato così il $\lim r^n$, ci resta a calcolare il limite di $n\varphi$. A tale oggetto osserviamo che, uguagliando nella (6) le parti imaginarie, si ha:

$$r\sin\varphi=\frac{b}{n} \tag{10}$$

d' onde si deduce:

$$\lim_{n=\infty}\sin\varphi=\lim_{n=\infty}\frac{b}{rn},$$

cioè, poichè si ha già $\lim r = 1$:

$$\lim_{n=\infty} \sin\varphi = 0$$

e per conseguenza:

$$\lim_{n=\infty} \varphi = 0.$$

Ma, per un noto teorema di trigonometria (cfr. p. 289, Nota 5ª), quando un arco φ tende a zero, il rapporto fra l'arco ed il suo seno tende all'unità; quindi:

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sin\varphi}{\varphi} = \lim_{\varphi=0} \frac{\sin\varphi}{\varphi} = 1.$$

Se ora scriviamo la (10) come segue:

$$r \cdot n\varphi \cdot \frac{\sin\varphi}{\varphi} = b\,,$$

e consideriamo che si è trovato:

$$\lim_{n=\infty} r = 1 \quad , \quad \lim_{n=\infty} \frac{\sin\varphi}{\varphi} = 1\,,$$

se ne deduce evidentemente:

$$\lim n\varphi = b. \qquad (11)$$

Sostituendo dunque nella (7) in luogo di r^n e di $n\varphi$ i loro limiti dati dalle (9) ed (11), si conclude:

$$e^{bi} = \cos b + i \sin b. \qquad (12)$$

844. Questa formola importantissima ci dà il significato di e^{bi} *sotto forma finita*. Moltiplicandone entrambi i membri per e^a, dove a sia un numero reale qualunque, se ne deduce più generalmente il significato sotto forma finita di e^{a+bi}, cioè:

$$e^{a+bi} = e^a(\cos b + i \sin b)\,,$$

cioè: *e^{a+bi} è un numero complesso che ha per modulo e^a e per argomento b.*

Reciprocamente, è chiaro che ad ogni numero complesso $r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$ si potrà sempre dare la *forma esponenziale* scrivendo:

$$r(\cos\varphi + i \sin\varphi) = e^{\log r}(\cos\varphi + i \sin\varphi) = e^{(\log r)+\varphi i}$$

dove con $\log r$ s'intende il logaritmo naturale del numero positivo r.

845. Se alla formola (12):

$$e^{bi} = \cos b + i \sin b$$

aggiungiamo la formola:

$$e^{-bi} = \cos b - i \sin b$$

che se ne deduce cambiando b in $-b$, *otteniamo due relazioni che ci permettono di esprimere le funzioni trigonometriche fondamentali* $\sin b$ *e* $\cos b$ *per mezzo delle esponenziali* e^{bi} *ed* e^{-bi}.

Sommando infatti queste due formole membro a membro, ovvero sottraendole, ne deduciamo:

$$\cos b = \frac{e^{bi} + e^{-bi}}{2}, \quad \sin b = \frac{e^{bi} - e^{-bi}}{2i} \tag{13}$$

che sono le così dette formole di *Eulero.*

846. Per mezzo di queste formole fondamentali l'intero calcolo trigonometrico si riconduce a calcolo esponenziale e per conseguenza qualsiasi formola generale trigonometrica si potrà sempre stabilire o verificare come un'ordinaria identità algebrica.

A schiarimento del metodo da tenersi proponiamoci p. es. di calcolare la somma:

$$\cos\varphi + \cos 2\varphi + \ldots + \cos n\varphi$$

o, che è lo stesso, ponendo $\varphi = 2\psi$, la somma:

$$\sum_1^n \cos 2n\psi.$$

A tale oggetto partiamo dall' identità algebrica:

$$\frac{x^{2n+1} - x^{-(2n+1)}}{x - x^{-1}} = x^{2n} + x^{2(n-1)} + x^{2(n-2)} + \ldots + x^{-2(n-1)} + x^{-2n}$$

$$= (x^{2n} + x^{-2n}) + (x^{2(n-1)} + x^{-2(n-1)} + \ldots + (x^2 + x^{-2}) + 1.$$

Sostituendo in quest'identità $x = e^{i\psi}$, si avrà immediatamente, in virtù delle formole di Eulero, la formola notevole, che risolve il problema proposto:

$$\frac{\sin(2n+1)\psi}{\sin\psi} = 1 = 2\sum_1^n \cos 2n\psi. \tag{14}$$

847. Dall' eguaglianza:

$$\cos x + i \sin x = e^{xi} = 1 + \frac{xi}{\underline{|1}} + \frac{(xi)^2}{\underline{|2}} + \ldots,$$

eguagliando le parti reali e le parti imaginarie del primo e terzo membro, si deducono poi gli sviluppi in serie:

$$\left.\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{x^2}{\underline{|2}} + \frac{x^4}{\underline{|4}} - \frac{x^6}{\underline{|6}} + \ldots \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{\underline{|3}} + \frac{x^5}{\underline{|5}} - \frac{x^7}{\underline{|7}} + \ldots \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

che possono servire a definire $\sin x$ e $\cos x$ *anche per valori complessi di* x.

Ed invero si verificherà facilmente, mediante le equivalenti formole (13), che le funzioni $\sin x$ e $\cos x$ così definite soddisfano, anche per valori complessi di x, alle relazioni fondamentali:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x\,,$$

ecc.

848. Notiamo finalmente, come conseguenza importante delle relazioni trovate fra la funzione esponenziale e le funzioni trigonometriche, che anche quella è, al pari di queste, una funzione *periodica*. Dall'avere infatti le funzioni trigonometriche il periodo 2π, segue, ponendo $x = a + bi$, che:

$$e^{(a+bi)+2\pi i} = e^{a+(b+2\pi)i} = e^a[\cos(b+2\pi) + i\sin(b+2\pi)]$$

$$= e^a(\cos b + i\sin b) = e^{a+bi}.$$

Si ha dunque, per ogni valore reale o complesso di x, che $e^{x+2\pi i} = e^x$, cioè che *la funzione* e^x *ammette il periodo* $2\pi i$.

Note ed Esercizi.

1. Le n radici n^{me} dell'unità, poste sotto la forma esponenziale, sono date da

$$e^{\frac{2k\pi i}{n}} \quad \text{per} \quad k = 0,\ 1,\ 2, \ldots, n-1.$$

2. Verificare le uguaglianze:

$$e^{2\pi i} = 1, \quad e^{\pi i} = -1, \quad e^{\frac{\pi}{2}i} = i, \quad e^{-\frac{\pi}{2}i} = -i$$

$$e^{\frac{2\pi i}{3}} + e^{-\frac{2\pi i}{3}} = 1, \quad i\left(e^{\frac{2\pi i}{3}} - e^{-\frac{2\pi i}{3}}\right) = -\sqrt{3}.$$

3. Per quali valori reali o complessi di x si annullano le funzioni $\sin x$ e $\cos x$? Per quali si annulla o diviene infinita la funzione $\operatorname{tg} x$?

4. Dimostrare che:

$$\lim_{n=\infty}\left(\sin\frac{x}{n}\right)^n = 0\,, \quad \lim_{n=\infty}\left(\cos\frac{x}{n}\right)^n = 1.$$

(Cfr. Serret. Trig. pg. 274).

5. Le funzioni trigonometriche $\sin x$ e $\cos x$ da noi introdotte al § 8° in base all'intuizione geometrica avrebbero potuto introdursi per via puramente analitica definendole mediante le due serie convergenti (15) dell'art. 847. Volendo seguire questa via, alquanto meno naturale ma più rigorosa, converrà definire il numero π come il doppio del più piccolo valore di x che annulla $\cos x$. Si avrà allora dalla seconda delle (18), che equivalgono alle (15):

$$e^{\frac{\pi i}{2}} + e^{-\frac{\pi i}{2}} = 0$$

d' onde moltiplicando per $e^{\frac{\pi i}{2}}$:

$$e^{\pi i} + 1 = 0$$

e quindi:

$$e^{2\pi i} = 1.$$

Resterà così stabilito per via puramente analitica che la funzione e^x ammette il periodo $2\pi i$; d'onde segue poi subito per le (18), che $\sin x$ e $\cos x$ ammettono il periodo 2π; ecc. ecc.

§ 7.° — Logaritmi naturali dei numeri complessi. — Relazioni fra le funzioni logaritmiche e le funzioni ciclometriche.

849 In ciò che segue si chiamerà logaritmo di un numero reale o complesso A (e si indicherà semplicemente con logA) ogni numero x che renda soddisfatta l'eguaglianza:

$$e^x = \text{A}. \tag{1}$$

Ponendo $x=\alpha+\beta i$ si può dare a questa uguaglianza la forma:

$$e^\alpha(\cos\beta + i\sin\beta) = \text{mod}\text{A}[\cos(\text{arg}\text{A}) + i\sin(\text{arg}\text{A})]$$

da cui si vede come essa equivalga alle due:

$$e^\alpha = \text{mod}\text{A} \ , \ \beta = \text{arg}\text{A} + 2k\pi i \tag{2}$$

delle quali la seconda determina il numero reale β a meno di un multiplo intero arbitrario di $2\pi i$; nel mentre che la prima si potrà sempre soddisfare, ed in un unico modo (art. 610), con un opportuno valore reale di α, *eccettuato soltanto il caso in cui fosse mod*A $= 0$.

Cioè: *esiste sempre il log*A, *ed è perfettamente determinato a meno di un multiplo intero di* $2\pi i$, *qualunque sia il numero reale o complesso* A, *eccettuato il numero* A $= 0$; *poichè l' esponenziale* e^x *non può ridursi a zero* (art. 842) *per alcun valore finito di* x.

850. Il risultato dell' art. precedente si traduce nella formola:

$$\log\text{A} = \log(\text{mod}\text{A}) + i\,\text{arg}\text{A} \tag{3}$$

la quale ci dice che *all' argomento di un numero reale o complesso* A, *diverso da zero, si può dare l' espressione*:

$$\textit{arg}\text{A} = -\,\text{i}\,\textit{log}\frac{\text{A}}{\textit{mod}\text{A}}. \tag{4}$$

851. Posto in generale A $= a + bi$, la formola (3) ci da il modo di separare la parte reale e la parte imaginaria del $\log(a + bi)$. Si ha infatti (art. 817):

$$\text{mod}(a + bi) = \sqrt{a^2 + b^2},\ \text{arg}(a + bi) = \text{arc tg}\,\frac{b}{a}\,,$$

cosicchè si ha dalla (3):

$$\log(a+bi)=\frac{1}{2}\log(a^2+b^2)+i\,\text{arc tg}\frac{b}{a}. \tag{3'}$$

852. Si è già notato come le formole di Eulero (art. 845) permettano di dare un significato alle funzioni $\sin x$ e $\cos x$ anche per valori complessi di x. Per $\text{tg}x$ si porrà pure naturalmente la definizione più generale:

$$\text{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x}=-i\frac{e^{xi}-e^{-xi}}{e^{xi}+e^{-xi}}=i\frac{1-e^{2xi}}{1+e^{2xi}} \tag{5}$$

e analogamente per le altre funzioni trigonometriche.

Posto ciò, è chiaro quale sia il significato più generale da darsi alle funzioni inverse delle funzioni trigonometriche, cioè alle funzioni ciclometriche arc $\sin z$, arc $\cos z$, arc $\text{tg}z$, ..., per valori reali o complessi di z. Così, ad esempio, il simbolo arc $\sin z$ rappresenterà tutti quei numeri il cui seno è uguale a z.

Ora, quale sia precisamente il grado di determinazione spettante a ciascuna di queste funzioni, apparirà chiaramente appenachè le avremo ricondotte alla funzione inversa della funzione esponenziale, cioè alla funzione logaritmica, già perfettamente caratterizzata all' art. 849.

853. Risolvendo la (5) rispetto ad e^{2xi} si trova:

$$e^{2xi}=\frac{1+i\,\text{tg}x}{1-i\,\text{tg}x}. \tag{6}$$

e prendendo i logaritmi naturali d' ambo i membri:

$$2xi=\log\frac{1+i\,\text{tg}x}{1-i\,\text{tg}x}.$$

Se dunque poniamo $x=\text{arc tg}\,z$, si ottiene l' espressione:

$$\text{arc tg}z=\frac{1}{2i}\log\frac{1+iz}{1-iz} \tag{7}$$

dalla quale appare manifesto che: *dato il valore di z, il valore di arc tgz resta determinato a meno di un multiplo intero arbitrario di* π.

Ponendo poi $\frac{1+iz}{1-iz}=y$, si deduce dalla (7):

$$\log y=2i\,\text{arc tg}\frac{1-y}{1+y}\,i.$$

854. Se nella formola:

$$e^{xi}=\cos x+i\sin x \tag{8}$$

poniamo $x=\text{arc}\sin z$, essa prende la forma:

$$e^{i\,\text{arc}\sin z}=\sqrt{1-z^2}+iz$$

d' onde:

$$\text{arc sin}z = -i \log\left\{\sqrt{1-z^2} + iz\right\}, \tag{9}$$

Similmente si trova sostituendo invece $x = \text{arc cos}z$:

$$\text{arc cos}z = -i \log\left\{z + i\sqrt{1-z^2}\right\}. \tag{10}$$

Da queste formole si vede che *fatta astrazione da un multiplo intero arbitrario di* 2π, *esistono in generale due soli valori distinti di arc sinz (o di arc cosz) che corrispondono ad un dato valore di z.*

Detti x' ed x'' i due valori di arc sin$z$, si avrà:

$$x' = -i \log\left\{\sqrt{1-z^2} + iz\right\}, \quad x'' = -i \log\left\{-\sqrt{1-z^2} + iz\right\}$$

d' onde segue:

$$x' + x'' = -i \log\left\{\left[\sqrt{1-z^2} + iz\right]\left[-\sqrt{1-z^2} + iz\right]\right\} = -i \log(-1) = \pi$$

come già è noto per i valori reali di z, ecc. ecc.

855. Ponendo nella (7), in luogo di z, la sua forma complessa $\alpha + \beta i$, si trova:

$$\text{arc tg}(\alpha + \beta i) = \frac{1}{2i} \log \frac{1 - \beta + i\alpha}{1 + \beta - i\alpha} = \frac{1}{2i} \log \frac{1 - \beta^2 - \alpha^2 + 2i\alpha}{(1+\beta)^2 + \alpha^2}.$$

Per separare la parte reale e la parte imaginaria di arc tg$(\alpha+\beta i)$ basterà dunque applicare la formola (3)', che ci darà:

$$\text{arc tg}(\alpha + \beta i) = \frac{1}{2} \text{arc tg} \frac{2\alpha}{1 - \beta^2 - \alpha^2} - \frac{i}{4} \log \frac{(1 - \beta^2 - \alpha^2)^2 + 4\alpha^2}{[(1+\beta)^2 + \alpha^2]^2}$$

e riducendo:

$$\text{arc tg}(\alpha + \beta i) = \frac{1}{2} \text{arc tg} \frac{2\alpha}{1 - \beta^2 - \alpha^2} + \frac{i}{4} \log \frac{(1+\beta)^2 + \alpha^2}{(1-\beta)^2 + \alpha^2}.$$

Note ed Esercizi.

1. Separare la parte reale e la parte imaginaria di *arc sinz* ed *arc cosz*.

2. Per mod$x < 1$ si ha, come vedremo più in giù (Nota 10ª del § 10°), lo sviluppo in serie assolutamente convergente:

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

3. Questo sviluppo è valido anche per mod $x = 1$ ad eccezione del valore $x = -1$. Per questi valori di x però la serie è soltanto *semplicemente* convergente (Cfr. *Novi: Trattato d'Algebra superiore*, pag. 179).

4. La formola (7) dell'art. 858 si può scrivere:

$$\text{arc tg}z = \frac{1}{2i}\left\{\log(1+iz) - \log(1-iz)\right\}$$

d'onde, applicando lo sviluppo in serie della 2ª nota, si deduce subito per mod$z < 1$:

$$\text{arc tg} z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \dots$$

5. Facendo in quest'ultimo sviluppo $z = 1$ si ottiene la formola di *Leibnitz*:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

la quale però converge troppo lentamente per potersi utilizzare a calcolare un valore sufficientemente approssimato del numero π (rapporto della circonferenza al diametro).

6. A quest' oggetto è preferibile la formola di *Eulero*:

$$\frac{\pi}{4} = \text{arc tg}\frac{1}{2} + \text{arc tg}\frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 4^2} - \dots\right) + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3 \cdot 9} + \frac{1}{5 \cdot 9^2} - \dots\right)$$

che si deduce immediatamente dallo stesso sviluppo di arc tg$z$.

7. Ancor più vantaggiosa è la formola proposta da *Machin*:

$$\frac{\pi}{4} = 4\,\text{arc tg}\frac{1}{5} - \text{arc tg}\frac{1}{239}$$

$$= \frac{4}{5}\left(1 - \frac{4}{3 \cdot 100} + \frac{4^2}{5 \cdot 100^2} - \frac{4^3}{7 \cdot 100^3} + \dots\right)$$

$$- \frac{1}{239}\left(1 - \frac{1}{3 \cdot 57121} + \frac{1}{5 \cdot 57121^2} - \frac{1}{7 \cdot 57121^3} + \dots\right)$$

Limitandosi alle prime trenta cifre decimali si trova:

$$\pi = 3,\ 14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279 \dots$$

§ 8.º — Numeri Bernoulliani e loro relazione colle somme delle potenze simili dei numeri naturali.

856. Se nell' identità:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{\lfloor 2} + \frac{x^3}{\lfloor 3} + \dots$$

poniamo in luogo di x successivamente $x, 2x, 3x, \dots, nx$ e sommiamo poi le uguaglianze ottenute membro a membro, troviamo:

$$\frac{e^{nx} - 1}{1 - e^{-x}} = n + \sigma_1(n)\frac{x}{\lfloor 1} + \sigma_2(n)\frac{x^2}{\lfloor 2} + \dots, \tag{1}$$

dove:

$$\sigma_k(n) = 1^k + 2^k + \dots + n^k \tag{2}$$

indica la somma delle potenze k^{me} dei primi n numeri naturali.

Moltiplicando la (1) per $1-e^{-x}$ si ha dunque l'identità;

$$\frac{nx}{\lfloor 1}+\frac{n^2x^2}{\lfloor 2}+\frac{n^3x^3}{\lfloor 3}+\dots$$
$$=\left(\frac{x}{\lfloor 1}-\frac{x^2}{\lfloor 2}+\frac{x^3}{\lfloor 3}-\dots\right)\left(n+\sigma_1(n)\frac{x}{\lfloor 1}+\sigma_2(n)\frac{x^2}{\lfloor 2}+\dots\right)$$

dalla quale, sviluppando (art. 838) il prodotto nel secondo membro ed uguagliando quindi (cfr. § 130) i coefficienti di una stessa potenza x^{k+1} nei due membri, si deduce:

$$\frac{n^{k+1}}{\lfloor k+1}=\frac{\sigma_k(n)}{\lfloor 1\lfloor k}-\frac{\sigma_{k-1}(n)}{\lfloor 2\lfloor k-1}+\frac{\sigma_{k-2}(n)}{\lfloor 3\lfloor k-2}-\dots$$
$$+(-1)^{k-1}\frac{\sigma_1(n)}{\lfloor k\lfloor 1}+(-1)^k\frac{n}{\lfloor k+1}.$$

Di qui si ricava la formola:

$$(-1)^{k+1}(k+1)\sigma_k(n)=n+(-1)^{k+1}n^{k+1}+\sum_{i=1}^{i=k-1}(-1)^i\binom{k+1}{i}\sigma_i(n) \qquad (3)$$

che potrà servire al calcolo successivo delle $\sigma_1, \sigma_2, \dots$ (cfr. art. 220 e la Nota 6ª a pg. 231).

857. Immaginiamo determinati (il che, come è facile riconoscere, è sempre possibile ed in unico modo) dei numeri:

$$B_1, B_2, B_3, \dots$$

tali da rendere *formalmente* (*) soddisfatta l'identità:

$$(1-e^{-x})\left(1+\frac{B_1x}{\lfloor 1}+\frac{B_2x^2}{\lfloor 2}+\dots\right)=x \qquad (4)$$

Con ciò si vuol intendere che i numeri $B_1, B_2, \dots$ debbono determinarsi in modo che, fatto lo sviluppo del prodotto;

$$\left(\frac{x}{\lfloor 1}-\frac{x^2}{\lfloor 2}+\frac{x^3}{\lfloor 3}-\dots\right)\left(1+\frac{B_1x}{\lfloor 1}+\frac{B_2x^2}{\lfloor 2}+\frac{B_3x^3}{\lfloor 3}+\dots\right)$$

riesca nullo il coefficiente di qualsiasi potenza di x eccettuato il coefficiente di x che ha il valore 1.

(*) [illegible] dimostrare che l'uguaglianza così ottenuta è poi anche [illegible] per tutti i valori di x il cui modulo non superi 2π. [illegible] la serie $1+\frac{B_1x}{\lfloor 1}+\frac{B_2x^2}{\lfloor 2}+\dots$ è convergente. Per [illegible] risulterebbe evidentemente nullo senza [illegible]

Moltiplicando la (1) e la (4) membro a membro viene:

$$\left(\frac{nx}{\lfloor 1} + \frac{n^2x^2}{\lfloor 2} + \frac{n^3x^3}{\lfloor 3} + \dots\right)\left(1 + \frac{B_1x}{\lfloor 1} + \frac{B_2x^2}{\lfloor 2} + \dots\right)$$

$$x = \left(n + \sigma_1(n)\frac{x}{\lfloor 1} + \sigma_2(n)\frac{x^2}{\lfloor 2} + \dots\right),$$

d'onde si deduce uguagliando i coefficienti a x^{k+1} nei due membri:

$$\frac{\sigma_k(n)}{\lfloor k} = \frac{n^{k+1}}{\lfloor k+1} + \frac{B_1}{\lfloor 1}\frac{n^k}{\lfloor k} + \frac{B_2}{\lfloor 2}\frac{n^{k-1}}{\lfloor k-1} + \dots + \frac{B_k}{\lfloor k}\frac{n}{\lfloor 1} \tag{5}$$

e quindi anche:

$$(k+1)\sigma_k(n) = n^{k+1} + \binom{k+1}{1}B_1n^k + \binom{k+1}{2}B_2n^{k-1} + \dots + \binom{k+1}{k}B_kn \tag{6}$$

858. I numeri $B_1, B_2, B_3, \dots$, mediante i quali abbiamo ottenuta l'espressione definitiva di $\sigma_k(n)$ si dicono numeri *Bernoulliani*. Per calcolarli basta fare nella formola (6) $n = 1$. Si ha così la relazione:

$$k = \binom{k+1}{1}B_1 + \binom{k+1}{2}B_2 + \dots + \binom{k+1}{k}B_k \tag{7}$$

dalla quale, facendo $k = 1, 2, 3, \dots$, si deducono le successive relazioni:

$$2B_1 = 1$$

$$2B_2 + 3B_1 = 2$$

$$4B_3 + 6B_2 + 4B_1 = 3$$

$$\dots\dots\dots$$

mediante le quali si troverà successivamente:

$$B_1 = \frac{1}{2},\ B_3 = 0,\ B_5 = 0,\ B_7 = 0,\ B_9 = 0,\ B_{11} = 0, \dots$$

$$B_2 = \frac{1}{6},\ B_4 = -\frac{1}{30},\ B_6 = \frac{1}{42},\ B_8 = -\frac{1}{30},\ B_{10} = \frac{5}{66}$$

$$B_{12} = -\frac{691}{2720},\ B_{14} = \frac{7}{7},\ B_{16} = -\frac{3617}{511},\ B_{18} = \frac{43867}{798}, \dots$$

859. Dalla (4) si deduce:

$$\frac{x}{1 - e^{-x}} = 1 + \frac{B_1x}{\lfloor 1} + \frac{B_2x^2}{\lfloor 2} + \frac{B_3x^3}{\lfloor 3} + \dots$$

e portando nel primo membro il termine B_1x dopo aver sostituito per B_1 il suo valore $\frac{1}{2}$, e riducendo quindi il primo membro ad

un' unica frazione:

$$\frac{1}{2}x\frac{1+e^{-x}}{1-e^{-x}}=1+\frac{B_2x^2}{\lfloor 2}+\frac{B_3x^3}{\lfloor 3}+\ldots, \tag{8}$$

Ora il primo membro conserva il suo valore se si cambia x in $-x$; dovrà dunque accadere il medesimo per il secondo membro, cioè dovrà essere:

$$\frac{B_2x^2}{\lfloor 2}+\frac{B_3x^3}{\lfloor 3}+\frac{B_4x^4}{\lfloor 4}+\ldots=\frac{B_2x^2}{\lfloor 2}-\frac{B_3x^3}{\lfloor 3}+\frac{B_4x^4}{\lfloor 4}-\ldots,$$

onde:

$$B_3=0\,,\ B_5=0\,,\ B_7=0\,,\ \ldots$$

cioè: *i numeri Bernoulliani di indice dispari sono tutti nulli, ad eccezione del solo* B_1*, che ha per valore* $\frac{1}{2}$.

860. I polinomi $\varphi_k(x)$ definiti dalla formola (5):

$$\frac{1}{\lfloor k}\varphi_k(x)=\frac{x^{k+1}}{\lfloor k+1}+\frac{B_1}{\lfloor 1}\frac{x^k}{\lfloor k}+\frac{B_2}{\lfloor 2}\frac{x^{k-1}}{\lfloor k-1}+\ldots+\frac{B_k}{\lfloor k}\frac{x}{1}$$

si chiamano *polinomi di Bernoulli.*

Prendendo la derivata dei due membri viene:

$$\frac{\varphi'_k(x)}{\lfloor k}=\frac{x^k}{\lfloor k}+\frac{B_1}{1}\frac{x^{k-1}}{\lfloor k-1}+\ldots+\frac{B_{k-1}}{\lfloor k-1}\frac{x}{1}+\frac{B_k}{\lfloor k},$$

cioè:

$$\frac{\varphi'_k(x)}{\lfloor k}=\frac{\varphi_{k-1}(x)}{\lfloor k-1}+\frac{B_k}{\lfloor k}.$$

Di qui segue la relazione notevole:

$$\varphi'_k(x)=k\varphi_{k-1}(x)+B_k \tag{9}$$

che si potrà anche utilizzare per il calcolo dei successivi polinomi di Bernoulli.

Note ed Esercizi.

1. Se si pone simbolicamente:

$$B_i=B^i\,,\ \sigma_i(n)=[\sigma(n)]^i \qquad ,\ i=1,2,3,\ldots$$

le formole (1), (4), (7) e (6) possono evidentemente rappresentarsi in modo più compendioso come segue:

$$e^{nx}-1=(1-e^{-x})(n-1+e^{x\sigma(n)})$$

$$(1-e^{-x})e^{Bx}=x, \qquad (1+B)^k-B^k=k$$

$$(k+1)\sigma_k(n)=(n+B)^{k+1}-B^{k+1}.$$

2. Se nella formola (8) si pone $2ix$ in luogo di x, viene:

$$2ix\frac{1+e^{-2ix}}{1-e^{-2ix}}=1-\frac{4B_2x^2}{\lfloor 2}+\frac{4^2B_4x^4}{\lfloor 4}-\ldots,$$

cioè (cfr. art. 845):

$$x\cot gx=1-\frac{4B_2x^2}{\lfloor 2}+\frac{4^2B_4x^4}{\lfloor 4}-\ldots$$

3. Dedurre dallo sviluppo precedente quelli di $\frac{x}{\sin x}$ e di $\operatorname{tg}x$, valendosi delle formole:

$$\frac{1}{\sin x}=\cot g\frac{x}{2}-\cot gx\quad,\quad \operatorname{tg}x=\cot gx-2\cot g2x.$$

§ 9.° — Le funzioni ϑ di Jacobi.

861. *La serie*:

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}e^{an^2+bn} \tag{1}$$

(*in cui* a *e* b *son due numeri reali od imaginarii*) *è assolutamente convergente quando*

$$\operatorname{mod}e^a<1 \tag{2}$$

e non è mai convergente quando: $\operatorname{mod}e^a>1$.

Invero, il rapporto di un termine qualunque di (1) al precedente essendo:

$$\frac{e^{a(n+1)^2+b(n+1)}}{e^{an^2+b}}=e^{(2n+1)a+b},$$

il suo modulo:

$$(\operatorname{mod}e^a)^{2n+1}\cdot\operatorname{mod}e^b$$

tende evidentemente al limite zero, per $n=\infty$, tutte le volte che sia soddisfatta la condizione (2). In tale supposto la serie formata dai moduli dei termini della (1) è dunque convergente (art. 630): epperò lo è (art. 835) anche la stessa (1).

D' altra parte, poichè:

$$\operatorname{mod}e^{an^2+bn}=\left[\operatorname{mod}e^b\cdot(\operatorname{mod}e^a)^n\right]^n$$

è senz' altro manifesto che, se fosse invece $\operatorname{mod}e^a>1$, il modulo del termine generale della serie (1) diverrebbe infinitamente grande per $n=\infty$; cosicchè la (1) non potrebbe essere in alcun modo convergente.

862. Se è soddisfatta la condizione (2), le due serie:

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} e^{an^2+bn} \quad , \quad \sum_{n=1}^{n=\infty} e^{an^2-bn}$$

sono, per quanto si è testè dimostrato, entrambe assolutamente convergenti. È dunque assolutamente convergente anche la loro somma:

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{an^2+bn}.$$

Se poniamo come è sempre lecito (per ragioni di comodità che appariranno meglio in seguito: $a=\pi i\omega$, $b=2\pi iu$, resta così stabilita l'esistenza della funzione delle due variabili u ed ω:

$$\vartheta(u\,,\,\omega) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\pi i\omega n^2+2\pi iun} \tag{3}$$

la quale ha un valore finito e ben determinato per ogni valore finito dell'*argomento* u, *purchè sia positivo il coefficiente della parte imaginaria del parametro* ω (che si chiama anche il *modulo della funzione* ϑ).

Invero, se poniamo per brevità:

$$e^{\pi i\omega} = q\,,$$

e sia $\omega=\alpha+\beta i$, si ha: $\mathrm{mod}\,q=e^{-\pi\beta}$, cosicchè la condizione $\mathrm{mod}\,q<1$ equivale alla condizione $\beta < 0$.

863. *La funzione* $\vartheta(u\,,\,\omega)$ *soddisfa, per ogni valore di* u, *alle due relazioni*:

$$\vartheta(u+1\,,\,\omega) = \vartheta(u\,,\,\omega)\,,\ \vartheta(u+\omega\,,\,\omega) = e^{-\pi i(2u+\omega)}\vartheta(u\,,\,\omega). \tag{4}$$

Di queste due proprietà, la prima è senz'altro evidente essendo $e^{2\pi i}=1$. La seconda si stabilisce assai facilmente paragonando la sommatoria (3) con quella, evidentemente equivalente, che se ne deduce cangiando n in $n+1$.

Si trova infatti per tal via:

$$\vartheta(u\,,\,\omega) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\pi i\omega(n+1)^2+2\pi iu(n+1)}$$

$$= e^{\pi i\omega+2\pi iu} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\pi i\omega n^2+2\pi i(u+\omega)n}$$

$$= e^{\pi i\omega+2\pi iu}.\vartheta(u+\omega\,,\,\omega).$$

864. La funzione $\vartheta(u\,,\omega)$ da origine alle quattro *funzioni* ϑ *fondamentali*:

$$\left.\begin{aligned}
&\vartheta_{00}(u\,,\omega) = \vartheta(u\,,\omega)\\
&\vartheta_{01}(u\,,\omega) = \vartheta\left(u + \frac{1}{2}\,,\omega\right)\\
&\vartheta_{10}(u\,,\omega) = e^{\frac{\pi i\omega}{4}+\pi i u}\,\vartheta\left(u + \frac{\omega}{2}\,,\omega\right)\\
&\vartheta_{11}(u\,,\omega) = -\,i e^{\frac{\pi i\omega}{4}+\pi i u}\,\vartheta\left(u + \frac{1+\omega}{2}\,,\omega\right)
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

che si possono anche riassumere nell'unica formola più generale:

$$\begin{aligned}
\vartheta_{gg'}(u\,,\omega) &= (-1)^{gg'}\vartheta\left(u + \frac{g}{2}\,\omega + \frac{g'}{2}\,,\omega\right)e^{\pi i\left(gu + \frac{g^2}{4}\,\omega + \frac{gg'}{2}\right)}\\
&= (-1)^{gg'}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\pi i\omega\left(n + \frac{g}{2}\right)^2 + 2\pi i\left(u + \frac{g'}{8}\right)\left(n + \frac{g}{2}\right)}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Una qualunque $\vartheta_{gg'}(u\,,\omega)$ di queste funzioni è contraddistinta, come si vede, dai due indici g , g' che si chiamano le sue *caratteristiche*.

865. La funzione $\vartheta_{gg'}(u\,,\omega)$ soddisfa, come segue assai facilmente dalle (6) e (4), alle due relazioni funzionali:

$$\left.\begin{aligned}
&\vartheta_{gg'}(u+1\,,\omega) = e^{\pi i g}\,\vartheta_{gg'}(u\,,\omega)\\
&\vartheta_{gg'}(u+\omega\,,\omega) = e^{-\pi i(2u+\omega+g')}\,\vartheta_{gg'}(u\,,\omega).
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Si ha infatti per le (4):

$$\vartheta\left((u+1) + \frac{g}{2}\,\omega + \frac{g'}{2}\,,\omega\right) = \vartheta\left(u + \frac{g}{2}\,\omega + \frac{g'}{2}\,,\omega\right)$$

$$\vartheta\left((u+\omega) + \frac{g}{2}\omega + \frac{g'}{2}\,,\omega\right) = e^{-\pi i(2u+g\omega+g'+\omega)}\,\vartheta\left(u + \frac{g}{2}\omega + \frac{g'}{2}\,,\omega\right).$$

866. La funzione $\vartheta(u\,,\omega)$ è *pari* rispetto all'argomento u, cioè $\vartheta(-u\,,\omega) = \vartheta(u\,,\omega)$, giacchè il 2° membro della (3), dovendo n percorrere tutti gli interi positivi e negativi, conserva evidentemente il suo valore se nel termine generale della sommatoria si cangia n in $-n$. Si ha così appunto:

$$\vartheta(u\,,\omega) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\pi i\omega(-n)^2 + 2\pi i u(-n)} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\pi i\omega n^2 - 2\pi i u n} = \vartheta(-u\,,n).$$

Delle quattro funzioni ϑ fondamentali, le prime tre ϑ_{00}, ϑ_{01}, ϑ_{10} sono pari rispetto all'argomento u, *nel mentre che la quarta ϑ_{11} è dispari, cioè:*

$$\vartheta_{00}(-u, \omega) = \vartheta_{00}(u, \omega) \quad , \quad \vartheta_{01}(-u, \omega) = \vartheta_{01}(u, \omega),$$

$$\vartheta_{10}(-u, \omega) = \vartheta_{10}(u, \omega) \quad , \quad \vartheta_{11}(-u, \omega) = -\vartheta_{11}(u, \omega).$$

È questa una conseguenza assai semplice della formola (5), quando si tengano presenti le (4) e la formola $\vartheta(-u, \omega) = \vartheta(u, \omega)$ dell'articolo precedente. Così, ad esempio, si troverà successivamente:

$$\vartheta_{01}(-u, \omega) = \vartheta\left(-u + \frac{1}{2}, \omega\right) = \vartheta\left(u - \frac{1}{2}, \omega\right) =$$

$$= \vartheta\left(\left(u + \frac{1}{2}\right) - 1, \omega\right) = \vartheta\left(u + \frac{1}{2}, \omega\right) = \vartheta_{01}(u, \omega).$$

867. Dalla prima delle (7) discendono, come subito si riconosce, le due formole generali:

$$\left.\begin{aligned} \vartheta_{gg'}\left(u + \frac{1}{2}, \omega\right) &= (-1)^{-g}\, \vartheta_{g,g'+1}(u, \omega) \\ \vartheta_{gg'}\left(u + \frac{\omega}{2}, \omega\right) &= (-1)^{-g'} e^{-\pi i\left(u + \frac{g'}{2} + \frac{\omega}{4}\right)}\, \vartheta_{g+1,g'}(u, \omega) \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

che applicate alle ϑ_{00}, ϑ_{01}, ϑ_{10}, ϑ_{11} danno luogo alla seguente tabella:

$$\vartheta_{00}\left(u + \frac{1}{2}, \omega\right) = \vartheta_{01}(u, \omega) \quad , \quad \vartheta_{00}\left(u + \frac{\omega}{2}, \omega\right) = e^{-\pi i\left(u + \frac{\omega}{4}\right)} \vartheta_{10}(u, \omega)$$

$$\vartheta_{01}\left(u + \frac{1}{2}, \omega\right) = \vartheta_{00}(u, \omega) \quad , \quad \vartheta_{01}\left(u + \frac{\omega}{2}, \omega\right) = ie^{-\pi i\left(u + \frac{\omega}{4}\right)} \vartheta_{11}(u, \omega)$$

$$\vartheta_{10}\left(u + \frac{1}{2}, \omega\right) = -\vartheta_{11}(u, \omega) \quad , \quad \vartheta_{10}\left(u + \frac{\omega}{2}, \omega\right) = e^{-\pi i\left(u + \frac{\omega}{4}\right)} \vartheta_{00}(u, \omega)$$

$$\vartheta_{11}\left(u + \frac{1}{2}, \omega\right) = \vartheta_{10}(u, \omega) \quad , \quad \vartheta_{11}\left(u + \frac{\omega}{2}, \omega\right) = ie^{-\pi i\left(u + \frac{\omega}{4}\right)} \vartheta_{01}(u, \omega).$$

Note ed Esercizi.

1. Si deduca dalle (4), qualunque sia l'intero positivo o negativo k:

$$\vartheta(u + k, \omega) = \vartheta(u, \omega)$$

$$\vartheta(u + k\omega, \omega) = e^{-\pi i(2ku + k^2\omega)}\, \vartheta(u, \omega).$$

2. La formola (6) sussiste e definisce $\vartheta_{gg'}(u, \omega)$ anche per valori qua-

lisivogliano, interi o no, delle g, g'; ed in questo senso più generale si possono intendere anche le (7).

8. Alla formola (8), aggruppando due a due nel secondo membro i termini che corrispondono a valori di n eguali ma di segno contrario, si può anche dare (art. 845) la forma:

$$\vartheta(u\,,\,\omega)=1+2\sum_{n=1}^{n=+\infty}e^{\pi i\omega n^2}\cos 2\pi nu.$$

4. Si deduca da quest'ultima formola o, meglio, direttamente dalle (5), la tabella:

$$\vartheta_{00}(u, \omega)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}q^{n^2}e^{2\pi iun}=1+2\sum_{n=1}^{n=+\infty}q^{n^2}\cos 2\pi nu$$

$$\vartheta_{01}(u\,,\,\omega)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}(-1)^n q^{n^2}e^{2\pi iun}=1+2\sum_{n=1}^{n=+\infty}(-1)^n q^{n^2}\cos 2\pi nu$$

$$\vartheta_{10}(u\,,\,\omega)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}q^{\frac{(2n+1)^2}{4}}e^{\pi iu(2n+1)}=2\sum_{n=1}^{n=+\infty}q^{\frac{(2n+1)^2}{4}}\cos\pi(2n+1)u$$

$$\vartheta_{11}(u\,,\,\omega)=-i\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}(-1)^n q^{\frac{(2n+1)^2}{4}}e^{\pi iu(2n+1)}=2\sum_{n=1}^{n=+\infty}(-1)^n q^{\frac{(2n+1)^2}{4}}\sin\pi(2n+1)u.$$

5. Dimostrare che:

$$\vartheta_{00}(z\,,\,\omega)+\vartheta_{11}(z\,,\,\omega)=\vartheta_{00}\left(\frac{z}{2}\,,\,\frac{\omega}{4}\right).$$

6. Riconoscere che $\vartheta_{11}(0)=0$ (cfr. art. 866) e dedurne poi che

$$\vartheta_{00}\left(\frac{\omega+1}{2}\right)=0\quad,\quad\vartheta_{01}\left(\frac{\omega}{2}\right)=0\quad,\quad\vartheta_{10}\left(\frac{1}{2}\right)=0$$

§ 10.° — Relazioni fondamentali fra le quattro funzioni ϑ.

868. In questo § per le funzioni $\vartheta_{gg'}(u\,,\,\omega)$ si avranno a considerare valori differenti dell'argomento u, tenendo costante il parametro ω. Potremo quindi, per maggiore brevità, adottare, in luogo del simbolo $\vartheta_{gg'}(u\,,\,\omega)$, il simbolo più semplice $\vartheta_{gg'}(u)$, omettendo di mettere in evidenza il parametro ω che resta arbitrario ed è lo stesso dappertutto.

Le quattro funzioni $\vartheta_{00}(u)$, $\vartheta_{01}(u)$, $\vartheta_{10}(u)$, $\vartheta_{11}(u)$ definite all'articolo 864 si presentano così come funzioni dell'unica variabile u. Esse soddisfano identicamente, cioè qualunque sia il valore di u,

alle due relazioni quadratiche:

$$\begin{aligned}\vartheta^2_{01}(0)\vartheta^2_{10}(u) &= \vartheta^2_{10}(0)\vartheta^2_{01}(u) - \vartheta^2_{00}(0)\vartheta^2_{11}(u)\\ \vartheta^2_{01}(0)\vartheta^2_{00}(u) &= \vartheta^2_{00}(0)\vartheta^2_{01}(u) - \vartheta^2_{10}(0)\vartheta^2_{11}(u).\end{aligned} \tag{1}$$

Noi stabiliremo queste identità deducendole da una formola fondamentale di Jacobi che ci fornirà anche altre relazioni importanti fra le stesse funzioni.

869. *Se gli argomenti* z'_1, z'_2, z'_3, z'_4 *sono legati agli argomenti* z_1, z_2, z_3, z_4 *dalle relazioni*:

$$\begin{aligned}z'_1 &= \frac{1}{2}(z_1 + z_2 + z_3 + z_4)\\ z'_2 &= \frac{1}{2}(z_1 + z_2 - z_3 - z_4)\\ z'_3 &= \frac{1}{2}(z_1 - z_2 + z_3 - z_4)\\ z'_4 &= \frac{1}{2}(z_1 - z_2 - z_3 + z_4),\end{aligned} \tag{2}$$

si ha:

$$\begin{aligned}&\vartheta_{00}(z_1)\vartheta_{00}(z_2)\vartheta_{00}(z_3)\vartheta_{00}(z_4) + \vartheta_{10}(z_1)\vartheta_{10}(z_2)\vartheta_{10}(z_3)\vartheta_{10}(z_4)\\ &= \vartheta_{00}(z'_1)\vartheta_{00}(z'_2)\vartheta_{00}(z'_3)\vartheta_{00}(z'_4) + \vartheta_{10}(z'_1)\vartheta_{10}(z'_2)\vartheta_{10}(z'_3)\vartheta_{10}(z'_4).\end{aligned} \tag{3}$$

Se indichiamo con p uno qualunque degl'infiniti numeri pari e con q uno qualunque degl'infiniti numeri dispari positivi o negativi, si può scrivere:

$$\vartheta_{00}(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{\pi i\omega}{4}(2n)^2 - \pi i z(2n)} = \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} e^{\frac{\pi i\omega}{4}p^2 + \pi i z p}$$

$$\vartheta_{10}(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{\pi i\omega}{4}(2n+1)^2 + \pi i z(2n+1)} = \sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} e^{\frac{\pi i\omega}{4}q^2 + \pi i z q}.$$

Poichè ora le somme infinite nei secondi membri convergono assolutamente, si hanno pei prodotti scritti nel primo membro di (3) gli sviluppi assolutamente convergenti:

$$\vartheta_{00}(z_1)\vartheta_{00}(z_2)\vartheta_{00}(z_3)\vartheta_{00}(z_4) = \sum_{p_1, p_2, p_3, p_4} e^{\frac{\pi i\omega}{4}(p^2_1 + p^2_2 + p^2_3 + p^2_4) + \pi i(z_1 p_1 + z_2 p_2 + z_3 p_3 + z_4 p_4)}$$

$$\vartheta_{10}(z_1)\vartheta_{10}(z_2)\vartheta_{10}(z_3)\vartheta_{10}(z_4) = \sum_{q_1, q_2, q_3, q_4} e^{\frac{\pi i\omega}{4}(q^2_1 + q^2_2 + q^2_3 + q^2_4) + \pi i(z_1 q_1 + z_2 q_2 + z_3 q_3 + z_4 q_4)}$$

onde si può scrivere:

$$\vartheta_{00}(z_1)\vartheta_{00}(z_2)\vartheta_{00}(z_3)\vartheta_{00}(z_4) + \vartheta_{10}(z_1)\vartheta_{10}(z_2)\vartheta_{10}(z_3)\vartheta_{10}(z_4)$$

$$= \sum_{m_1, m_2, m_3, m_4} e^{\frac{\pi i \omega}{4}(m^2_1 + m^2_2 + m^2_3 + m^2_4) + \pi i (z_1 m_1 + z_2 m_2 + z_3 m_3 + z_4 m_4)} \quad (4)$$

dove la sommatoria va estesa a tutti i sistemi m_1, m_2, m_3, m_4 di quattro numeri tutti pari o tutti dispari.

Ma, se indichiamo con m'_1, m'_2, m'_3, m'_4 il sistema di numeri legati al sistema m_1, m_2, m_3, m_4 da relazioni simili alle (2), cioè dalle relazioni:

$$\left.\begin{aligned} m'_1 &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + m_3 + m_4) \\ m'_2 &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2 - m_3 - m_4) \\ m'_3 &= \frac{1}{2}(m_1 - m_2 + m_3 - m_4) \\ m'_4 &= \frac{1}{2}(m_1 - m_2 - m_3 + m_4) \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

si ha, come è facile dedurre dalle (2) e (5):

$$m^2_1 + m^2_2 + m^2_3 + m^2_4 = m'^2_1 + m'^2_2 + m'^2_3 + m'^2_4$$

$$z_1 m_1 + z_2 m_2 + z_3 m_3 + z_4 m_4 = z'_1 m'_1 + z'_2 m'_2 + z'_3 m'_3 + z'_4 m'_4,$$

onde la (4) può anche scriversi:

$$\vartheta_{00}(z_1)\vartheta_{00}(z_2)\vartheta_{00}(z_3)\vartheta_{00}(z_4) + \vartheta_{10}(z_1)\vartheta_{10}(z_2)\vartheta_{10}(z_3)\vartheta_{10}(z_4)$$

$$= \sum_{m'_1, m'_2, m'_3, m'_4} e^{\frac{\pi i \omega}{4}(m'^2_1 + m'^2_2 + m'^2_3 + m'^2_4) + \pi i (z'_1 m'_1 + z'_2 m'_2 + z'_3 m'_3 + z'_4 m'_4)}.$$

Quindi, perchè resti stabilita la formola (3), che volevamo dimostrare, basterà riconoscere che anche il sistema m'_1, m'_2, m'_3, m'_4, è formato di numeri tutti pari o tutti dispari, come il sistema m_1, m_2, m_3, m_4; giacchè le (5) si possono risolvere rispetto alle m_1, m_2, m_3, m_4 sotto forma analoga, cioè:

$$m_1 = \frac{1}{2}(m'_1 + m'_2 + m'_3 + m'_4)$$

$$m_2 = \frac{1}{2}(m'_1 + m'_2 - m'_3 - m'_4)$$

$$m_3 = \frac{1}{2}(m'_1 - m'_2 + m'_3 - m'_4)$$

$$m_4 = \frac{1}{2}(m'_1 + m'_2 + m'_3 - m'_4)$$

dimodochè esiste sempre un unico sistema m_1, m_2, m_3, m_4 che da origine ad un dato sistema m'_1, m'_2, m'_3, m'_4.

Ora, per riconoscere ciò, basta osservare che dalle (5) si deduce:

$$m'_1 + m'_2 = m_1 + m_2$$

$$m'_1 + m'_3 = m_1 + m_3$$

$$m'_1 + m'_4 = m_1 + m_4$$

cosicchè, essendo m_1, m_2, m_3, m_4 tutti pari o tutti dispari, le somme:

$$m'_1 + m'_2 \,,\; m'_1 + m'_3 \,,\; m'_1 + m'_4$$

saranno numeri pari; d'onde segue appunto che m'_2, m'_3, m'_4 saranno tutti pari o tutti dispari secondochè sia pari o dispari m'_1.

La formola fondamentale (3) si trova così stabilita.

870. Se si dà alla variabile z_1 l'incremento 1, le variabili z'_1, z'_2, z'_3, z'_4 riceveranno, come si vede dalle (2) l'incremento di $\frac{1}{2}$, e la formola (3) diventerà, tenendo presente (articolo 865) che $\vartheta_{00}(z_1+1) = \vartheta_{00}(z_1)$ e $\vartheta_{10}(z_1+1) = -\vartheta_{10}(z_1)$ ed applicando le formole dell' art. 867:

$$\begin{aligned}&\vartheta_{00}(z_1)\vartheta_{00}(z_2)\vartheta_{00}(z_3)\vartheta_{00}(z_4) - \vartheta_{10}(z_1)\vartheta_{10}(z_2)\vartheta_{10}(z_3)\vartheta_{10}(z_4)\\ &= \vartheta_{01}(z'_1)\vartheta_{01}(z'_2)\vartheta_{01}(z'_3)\vartheta_{01}(z'_4) + \vartheta_{11}(z'_1)\vartheta_{11}(z'_2)\vartheta_{11}(z'_3)\vartheta_{11}(z'_4).\end{aligned} \tag{6}$$

871. Se ora nella (6) poniamo $z_1 = z_2 = u$, $z_3 = z_4 = 0$, cosicchè $z'_1 = z'_2 = u$, $z'_3 = z'_4 = 0$, ed osserviamo che dall'essere $\vartheta_{11}(-u) = -\vartheta_{11}(u)$ segue evidentemente che $\vartheta_{11}(o) = o$, otteniamo l' identità:

$$\vartheta^2_{00}(o)\vartheta^2_{00}(u) = \vartheta^2_{10}(o)\vartheta^2_{10}(u) + \vartheta^2_{01}(o)\vartheta^2_{01}(u) \tag{7}$$

dalla quale, dando ad u l'incremento di $\frac{1}{2}$, deduciamo:

$$\vartheta^2_{00}(o)\vartheta^2_{01}(u) = \vartheta^2_{10}(o)\vartheta^2_{11}(u) + \vartheta^2_{01}(o)\vartheta^2_{00}(u)\,;$$

e finalmente, se in quest'ultima cangiamo u in $u + \frac{\omega}{2}$, otteniamo:

$$-\vartheta^2_{00}(o)\vartheta^2_{11}(u) = -\vartheta^2_{10}(o)\vartheta^2_{01}(u) + \vartheta^2_{01}(o)\vartheta^2_{10}(u).$$

Queste due ultime identità sono appunto le relazioni (1) che ci eravamo proposto di stabilire.

872. Se a ciascuna delle z_1, z_2, z_3, z_4 si da l'incremento di $\frac{1}{2}$, cosicchè z'_1 riceverà l' incremento di 1 e z'_2, z'_3, z'_4 resteranno inalterate, la formola (6) ci dà:

$$\begin{aligned}&\vartheta_{01}(z_1)\vartheta_{01}(z_2)\vartheta_{01}(z_3)\vartheta_{01}(z_4) - \vartheta_{11}(z_1)\vartheta_{11}(z_2)\vartheta_{11}(z_3)\vartheta_{11}(z_4)\\ &= \vartheta_{01}(z'_1)\vartheta_{01}(z'_2)\vartheta_{01}(z'_3)\vartheta_{01}(z'_4) - \vartheta_{11}(z'_1)\vartheta_{11}(z'_2)\vartheta_{11}(z'_3)\vartheta_{11}(z'_4).\end{aligned} \tag{8}$$

e da quest'identità, ponendo $z'_1 = z'_2 = u$, $z'_3 = z'_4 = 0$, cosicchè :

$z_1 = u + v$, $z_2 = u - v$, $z_3 = 0$, $z_4 = 0$, si deduce :

$$\vartheta^2_{01}(0)\vartheta_{01}(u+v)\vartheta_{01}(u-v) = \vartheta^2_{01}(u)\vartheta^2_{01}(v) - \vartheta^2_{11}(u)\vartheta^2_{11}(v). \quad (9)$$

873. Con artifizi analoghi a quelli di cui ci siamo serviti per ottenere la formola (9) si otterrebbe un gruppo di formole conosciute sotto il nome di *formole di addizione delle funzioni* ϑ. Noi ci limiteremo a riportarne quì in aggiunta alla (9), lasciandone la verifica al lettore, solamente altre tre che ci saranno utili in seguito :

$$\begin{aligned}
&\vartheta_{00}(0)\vartheta_{10}(0)\vartheta_{01}(u+v)\vartheta_{11}(u-v)= \\
&\qquad =\vartheta_{01}(u)\vartheta_{11}(u)\vartheta_{00}(v)\vartheta_{10}(v)-\vartheta_{00}(u)\vartheta_{10}(u)\vartheta_{01}(v)\vartheta_{11}(v) \\
&\vartheta_{01}(0)\vartheta_{10}(0)\vartheta_{01}(u+v)\vartheta_{10}(u-v)= \\
&\qquad =\vartheta_{01}(u)\vartheta_{10}(u)\vartheta_{01}(v)\vartheta_{10}(v)+\vartheta_{00}(u)\vartheta_{11}(u)\vartheta_{00}(v)\vartheta_{11}(v) \quad (10) \\
&\vartheta_{00}(0)\vartheta_{01}(0)\vartheta_{00}(u+v)\vartheta_{01}(u-v)= \\
&\qquad =\vartheta_{00}(u)\vartheta_{01}(u)\vartheta_{00}(v)\vartheta_{01}(v)-\vartheta_{10}(u)\vartheta_{11}(u)\vartheta_{10}(v)\vartheta_{11}(v).
\end{aligned}$$

Note ed Esercizi.

1. Ponendo nella (6): $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$, dedurne l'identità fra z_1 , z_2 , z_3:

$$\begin{aligned}
&\vartheta_{01}(0)\vartheta_{01}(z_1+z_2)\vartheta_{01}(z_2+z_3)\vartheta_{01}(z_3+z_2) = \\
&= \vartheta_{00}(z_1+z_2+z_3)\vartheta_{00}(z_1)\vartheta_{00}(z_2)\vartheta_{00}(z_3) \\
&- \vartheta_{10}(z_1+z_2+z_3)\vartheta_{10}(z_1)\vartheta_{10}(z_2)\vartheta_{10}(z_3).
\end{aligned}$$

Per maggiori ragguagli circa le molteplici relazioni che si possono dedurre dalla formola fondamentale di Jacobi, cfr. p. es. le *Funzioni Ellittiche* di E. Pascal (Manuali Hoepli, 1896).

2. Si trovino le formole che nascono dalle (8), (6), (8) dando a z_1 , z_2 , z_3 , z_4 risp. gl'incrementi $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, 0 , 0.

E così pure le formole che nascono dal dare risp. gl' incrementi : 0 , $\frac{1}{2}$, $\frac{\omega}{2}$, $\frac{1+\omega}{2}$.

§ 11.° — Funzioni ellittiche a periodi indipendenti.

874. Mediante quoti di funzioni ϑ si costruiscono facilmente delle funzioni dell' argomento u (dette *funzioni ellittiche*) dotate di due periodi. Come funzioni ellittiche fondamentali si possono assumere le tre seguenti:

$$\begin{aligned}
\mathrm{sn}(u\,;\,\Omega_1\,,\,\Omega_2) &= \frac{\vartheta_{00}\left(0\,,\frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right)}{\vartheta_{10}\left(0\,,\frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right)}\cdot\frac{\vartheta_{11}\left(\frac{u}{\Omega_1}\,,\,\frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right)}{\vartheta_{01}\left(\frac{u}{\Omega_1}\,,\,\frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right)}\\
\mathrm{cn}(u\,;\,\Omega_1\,,\,\Omega_2) &= \frac{\vartheta_{01}\left(0\,,\frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right)}{\vartheta_{10}\left(0\,,\frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right)}\cdot\frac{\vartheta_{10}\left(\frac{u}{\Omega_1}\,,\,\frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right)}{\vartheta_{01}\left(\frac{u}{\Omega_1}\,,\,\frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right)} \qquad (1)\\
\mathrm{dn}(u\,;\,\Omega_1\,,\,\Omega_2) &= \frac{\vartheta_{01}\left(0\,,\frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right)}{\vartheta_{00}\left(0\,,\frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right)}\cdot\frac{\vartheta_{00}\left(\frac{u}{\Omega_1}\,,\,\frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right)}{\vartheta_{01}\left(\frac{u}{\Omega_1}\,,\,\frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right)}
\end{aligned}$$

ognuna delle quali, come segue immediatamente dalle formole dell'art. 865, ammette il periodo $2\Omega_1$ e il periodo $2\Omega_2$, cioè:

$$\begin{aligned}
\mathrm{sn}(u+2\Omega_1\,;\,\Omega_1\,,\,\Omega_2) &= \mathrm{sn}(u\,;\,\Omega_1\,,\,\Omega_2)\quad,\quad \mathrm{sn}(u+2\Omega_2)=\mathrm{sn}(u)\\
\mathrm{cn}(u+2\Omega_1\,;\,\Omega_1\,,\,\Omega_2) &= \mathrm{cn}(u\,;\,\Omega_1\,,\,\Omega_2)\quad,\quad \mathrm{cn}(u+2\Omega_2)=\mathrm{cn}(u) \qquad (2)\\
\mathrm{dn}(u+2\Omega_1\,;\,\Omega_1\,,\,\Omega_2) &= \mathrm{dn}(u\,;\,\Omega_1\,,\,\Omega_2)\quad,\quad \mathrm{dn}(u+2\Omega_2)=\mathrm{dn}(u).
\end{aligned}$$

875. Le quantità stesse Ω_1, Ω_2 sono periodi soltanto per alcune delle tre funzioni ellittiche e *semi-periodi* per le altre. E precisamente si ha:

$$\begin{aligned}
\mathrm{sn}(u+\Omega_1) &= -\,\mathrm{sn}u \quad,\quad \mathrm{sn}(u+\Omega_2)=\mathrm{sn}u\\
\mathrm{cn}(u+\Omega_1) &= -\,\mathrm{cn}u \quad,\quad \mathrm{cn}(u+\Omega_2)=-\,\mathrm{cn}u \qquad (3)\\
\mathrm{dn}(u+\Omega_1) &= \mathrm{dn}u \quad,\quad \mathrm{dn}(u+\Omega_2)=-\,\mathrm{dn}u.
\end{aligned}$$

Ciò risulta, del pari immediatamente, dalle stesse formole dell'articolo 865.

876. *Fra le tre funzioni ellittiche* (1) *hanno luogo le due relazioni fondamentali*:

$$\begin{aligned}
cn^2(\mathrm{u}\,;\,\Omega_1\,,\,\Omega_2)+sn^2(\mathrm{u}\,;\,\Omega_1\,,\,\Omega_2) &= 1\\
dn^2(\mathrm{u}\,;\,\Omega_1\,,\,\Omega_2)+\mathrm{k}^2sn^2(\mathrm{u}:\Omega_1\,,\,\Omega_2) &= 1
\end{aligned} \qquad (4)$$

dove:

$$k = \frac{\vartheta^2_{10}\left(0, \frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right)}{\vartheta^2_{00}\left(0, \frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right)}. \tag{5}$$

Invero, se la prima delle due relazioni quadratiche (art. 868) fra le funzioni ϑ si divide per $\vartheta^2_{10}(o)\vartheta^2_{01}(u)$, si ottiene, qualunque sia l'argomento u ed il modulo ω cui si riferiscono le ϑ, l'identità:

$$\frac{\vartheta^2_{01}(o, \omega)}{\vartheta^2_{10}(o, \omega)} \cdot \frac{\vartheta^2_{10}(u, \omega)}{\vartheta^2_{01}(u, \omega)} + \frac{\vartheta^2_{00}(o, \omega)}{\vartheta^2_{10}(o, \omega)} \cdot \frac{\vartheta^2_{11}(u, \omega)}{\vartheta^2_{01}(u, \omega)} = 1$$

che è appunto la prima delle (4) quando si prenda $\omega = \frac{\Omega_2}{\Omega_1}$ e si cangi u in $\frac{u}{\Omega_1}$. La seconda delle (4) si ottiene in modo analogo dalla seconda relazione quadratica dell'art. 868 divisa per $\vartheta^2_{00}(o)$ $\vartheta^2_{01}(u)$, che ci dà:

$$\frac{\vartheta^2_{01}(o)}{\vartheta^2_{00}(o)} \cdot \frac{\vartheta^2_{00}(u)}{\vartheta^2_{01}(u)} + \frac{\vartheta^2_{10}(o)}{\vartheta^2_{00}(o)} \cdot \frac{\vartheta^2_{11}(u)}{\vartheta^2_{01}(u)} = 1$$

il che si può anche scrivere:

$$\frac{\vartheta^2_{01}(o)}{\vartheta^2_{00}(o)} \cdot \frac{\vartheta^2_{00}(u)}{\vartheta^2_{01}(u)} + \frac{\vartheta^4_{10}(o)}{\vartheta^4_{00}(o)} \left\{ \frac{\vartheta^2_{00}(o)}{\vartheta^2_{10}(o)} \cdot \frac{\vartheta^2_{11}(u)}{\vartheta^2_{01}(u)} \right\} = 1$$

e ricade appunto nella seconda delle (4) quando si prenda $\omega = \frac{\Omega_2}{\Omega_1}$ e si cangi u in $\frac{u}{\Omega_1}$.

877. Dalle formole (1) si derivano poi senza difficoltà alcuna, col sussidio della tabella dell'art. 876, le seguenti:

$$\begin{aligned} &\operatorname{sn}\left(u + \frac{\Omega_1}{2}\right) = \frac{\operatorname{cn}u}{\operatorname{dn}u}, \quad &&\operatorname{sn}\left(u + \frac{\Omega_2}{2}\right) = \frac{1}{k \operatorname{sn}u} \\ &\operatorname{cn}\left(u + \frac{\Omega_1}{2}\right) = -k'\frac{\operatorname{sn}u}{\operatorname{dn}u}, \quad &&\operatorname{cn}\left(u + \frac{\Omega_2}{2}\right) = \frac{-i}{k}\frac{\operatorname{dn}u}{\operatorname{sn}u} \\ &\operatorname{dn}\left(u + \frac{\Omega_1}{2}\right) = \frac{k'}{\operatorname{dn}u}, \quad &&\operatorname{dn}\left(u + \frac{\Omega_2}{2}\right) = -i\frac{\operatorname{cn}u}{\operatorname{sn}u} \end{aligned} \tag{6}$$

dove:

$$k' = \frac{\vartheta^2_{01}\left(0, \frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right)}{\vartheta^2_{00}\left(0, \frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right)}. \tag{7}$$

878. *I due numeri* k *e* k' *definiti dalle* (6) *e* (7) *sono legati dalla*

relazione :

$$k^2 + k'^2 = 1.$$

Ponendo infatti $u = 0$ nell' identità (7) del § prec., essa ci dà qualunque sia ω :

$$\vartheta^4_{00}(o\,,\,\omega) = \vartheta^4_{10}(o\,,\,\omega) + \vartheta^4_{01}(o\,,\,\omega)\,,$$

cioè appunto la (8) quando si dividano i due membri per $\vartheta^4_{00}(o, \omega)$ e si prenda $\omega = \frac{\Omega_2}{\Omega_1}$.

879. Dalle formole (1) e (6) si deducono, ricordando (cfr. articolo 866) che $\vartheta_{11}(o\,,\,\omega) = 0$, i valori particolari :

$$\begin{array}{llll} \mathrm{sn}(0)=0\;, & \mathrm{sn}\left(\frac{\Omega_1}{2}\right)=1\;, & \mathrm{sn}\left(\frac{\Omega_2}{2}\right)=\infty\;, & \mathrm{sn}\left(\frac{\Omega_1+\Omega_2}{2}\right)=\frac{1}{k} \\ \mathrm{cn}(0)=1\;, & \mathrm{cn}\left(\frac{\Omega_1}{2}\right)=0\;, & \mathrm{cn}\left(\frac{\Omega_2}{2}\right)=\infty\;, & \mathrm{cn}\left(\frac{\Omega_1+\Omega_2}{2}\right)=-i \\ \mathrm{dn}(0)=1\;, & \mathrm{dn}\left(\frac{\Omega_1}{2}\right)=k'\;, & \mathrm{dn}\left(\frac{\Omega_2}{2}\right)=\infty\;, & \mathrm{dn}\left(\frac{\Omega_1+\Omega_2}{2}\right)=0. \end{array} \tag{9}$$

880. Finalmente si hanno per le funzioni ellittiche le seguenti *formole di addizione*, delle quali è manifesta l'analogia colle formole di addizione delle funzioni trigonometriche :

$$\begin{aligned} \mathrm{sn}(u+v) &= \frac{\mathrm{sn}u\,\mathrm{cn}v\,\mathrm{dn}v + \mathrm{sn}v\,\mathrm{cn}u\,\mathrm{dn}u}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2u\,\mathrm{sn}^2v} \\ \mathrm{cn}(u+v) &= \frac{\mathrm{cn}u\,\mathrm{cn}v - \mathrm{sn}u\,\mathrm{sn}v\,\mathrm{dn}u\,\mathrm{dn}v}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2u\,\mathrm{sn}^2v} \\ \mathrm{dn}(u+v) &= \frac{\mathrm{dn}u\,\mathrm{dn}v - k^2\mathrm{sn}u\,\mathrm{sn}v\,\mathrm{cn}u\,\mathrm{cn}v}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2u\,\mathrm{sn}^2v}. \end{aligned} \tag{10}$$

Queste formole sono una conseguenza quasi immediata delle formole di addizione delle funzioni ϑ da noi già date al § prec. Esse si deducono da quelle dividendo i primi e i secondi membri delle formole dell' art. 873 risp. per il primo e secondo membro della formola (9) dell' art. 872 e cangiando poi dappertutto u e v risp. in $\frac{u}{\Omega_1}$ e $\frac{v}{\Omega_1}$ dopo aver preso $\omega = \frac{\Omega_2}{\Omega_1}$.

Si trova così, ad esempio, dapprima :

$$\frac{\vartheta_{00}(o)\vartheta_{10}(o)\vartheta_{11}(u-v)}{\vartheta_{01}(o)\vartheta_{01}(o)\vartheta_{01}(u-v)} = \frac{\vartheta_{01}(u)\vartheta_{11}(u)\vartheta_{00}(v)\vartheta_{10}(v) - \vartheta_{00}(u)\vartheta_{10}(u)\vartheta_{01}(v)\vartheta_{11}(v)}{\vartheta^2_{01}(u)\vartheta^2_{01}(v) - \vartheta^2_{11}(u)\vartheta^2_{11}(v)}$$

$$= \frac{\dfrac{\vartheta_{11}(u)}{\vartheta_{01}(u)}\dfrac{\vartheta_{00}(v)}{\vartheta_{01}(v)}\dfrac{\vartheta_{10}(v)}{\vartheta_{01}(v)} - \dfrac{\vartheta_{00}(u)}{\vartheta_{01}(u)}\dfrac{\vartheta_{10}(u)}{\vartheta_{01}(u)}\dfrac{\vartheta_{11}(v)}{\vartheta_{01}(v)}}{1 - \dfrac{\vartheta^2_{11}(u)}{\vartheta^2_{01}(u)}\dfrac{\vartheta^2_{11}(v)}{\vartheta^2_{01}(v)}}$$

il che si può scrivere, dopo aver moltiplicati i due membri per

$$\frac{\vartheta_{00}(0)}{\vartheta_{10}(0)}\frac{\vartheta_{01}(0)}{\vartheta_{10}(0)}\frac{\vartheta_{01}(0)}{\vartheta_{00}(0)}$$

e scrivendo per brevità $\vartheta_{gg'}$ in luogo di $\vartheta_{gg'}(0)$, anche così:

$$\frac{\vartheta_{00}}{\vartheta_{10}}\frac{\vartheta_{11}(u-v)}{\vartheta_{01}(u-v)}=$$

$$\frac{\frac{\vartheta_{00}\vartheta_{11}(u)}{\vartheta_{10}\vartheta_{01}(u)}\cdot\frac{\vartheta_{01}\vartheta_{00}(v)}{\vartheta_{10}\vartheta_{01}(v)}\cdot\frac{\vartheta_{10}\vartheta_{10}(v)}{\vartheta_{00}\vartheta_{01}(v)}-\frac{\vartheta_{00}\vartheta_{11}(v)}{\vartheta_{10}\vartheta_{01}(v)}\cdot\frac{\vartheta_{01}\vartheta_{10}(u)}{\vartheta_{10}\vartheta_{01}(u)}\cdot\frac{\vartheta_{01}\vartheta_{00}(u)}{\vartheta_{00}\vartheta_{01}(u)}}{1-\left[\frac{\vartheta^2_{10}}{\vartheta^2_{00}}\right]^2\cdot\frac{\vartheta^2_{00}\vartheta^2_{11}(u)}{\vartheta^2_{10}\vartheta^2_{01}(u)}\frac{\vartheta^2_{00}\vartheta^2_{11}(0)}{\vartheta^2_{10}\vartheta^2_{01}(0)}}.$$

Sarà dunque:

$$\mathrm{sn}(u-v)=\frac{\mathrm{sn}u\,\mathrm{cn}v\,\mathrm{dn}v-\mathrm{sn}v\,\mathrm{cn}u\,\mathrm{dn}u}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2u\,\mathrm{sn}^2v},$$

ecc. ecc.

Note ed Esercizi.

1. Combinando le formole (10) con quelle che ne nascerebbero cambiando v in $-v$, dedurne le seguenti:

$$(\mathrm{I})\quad\begin{cases}\mathrm{sn}(u+v)+\mathrm{sn}(u-v)=\dfrac{2\,\mathrm{sn}u\,\mathrm{cn}v\,\mathrm{dn}v}{D}\\[2ex]\mathrm{cn}(u+v)+\mathrm{cn}(u-v)=\dfrac{2\,\mathrm{cn}u\,\mathrm{dn}\,v}{D}\\[2ex]\mathrm{dn}(u+v)+\mathrm{dn}(u-v)=\dfrac{2\,\mathrm{sn}v\,\mathrm{cn}u\,\mathrm{dn}u}{D}\end{cases}$$

$$(\mathrm{I})'\quad\begin{cases}\mathrm{sn}(u+v)-\mathrm{sn}(u-v)=\dfrac{2\,\mathrm{sn}v\,\mathrm{cn}u\,\mathrm{dn}u}{D}\\[2ex]\mathrm{cn}(u+v)-\mathrm{cn}(u-v)=\dfrac{2\,\mathrm{sn}u\,\mathrm{sn}v\,\mathrm{dn}u\,\mathrm{dn}v}{D}\\[2ex]\mathrm{dn}(u+v)-\mathrm{dn}(u-v)=-\dfrac{2k^2\mathrm{sn}u\,\mathrm{cn}u\,\mathrm{sn}v\,\mathrm{cn}v}{D}\end{cases}$$

$$(\mathrm{II})\quad\begin{cases}\mathrm{sn}(u+v)\mathrm{sn}(u-v)=\dfrac{\mathrm{sn}^2u-\mathrm{sn}^2v}{D}\\[2ex]\mathrm{cn}(u+v)\mathrm{cn}(u-v)=\dfrac{\mathrm{cn}^2u+\mathrm{cn}^2v}{D}-1\\[2ex]\mathrm{dn}(u+v)\mathrm{dn}(u-v)=\dfrac{\mathrm{dn}^2u+\mathrm{dn}^2v}{D}-1\end{cases}$$

essendo dappertutto :

$$D = 1 - k^2 \mathrm{sn}^2 u\, \mathrm{sn}^2 v.$$

§ 12.° — Derivate delle funzioni ellittiche. Le funzioni ellittiche ordinarie: sn$(u\,,k)$, cn$(u\,,k)$, dn$(u\,,k)$.

881. Anche per le funzioni ellittiche $\mathrm{sn}(u\,;\Omega_1\,,\Omega_2)$, $\mathrm{cn}(u\,;\Omega_1\,,\Omega_2)$, $\mathrm{dn}(u\,;\Omega_1\,,\Omega_2)$ accade, come per le funzioni trigonometriche, che *le loro derivate rispetto all' argomento* u *sono funzioni razionali delle stesse tre funzioni ellittiche fondamentali.*

Cominciamo col calcolo della derivata di $\mathrm{sn}(u\,;\Omega_1\,,\Omega_2)$, al quale oggetto ci giova partire dalla formola di addizione già data nel § prec. (art. 880):

$$\mathrm{sn}(u+v) = \frac{\mathrm{sn}u\,\mathrm{cn}u\,\mathrm{dn}v + \mathrm{sn}v + \mathrm{cn}u\,\mathrm{dn}u}{1 - k^2\mathrm{sn}^2u\,\mathrm{cn}^2v}.$$

Sommando questa formola con quella che se ne deduce cambiando v in $-v$, viene :

$$\mathrm{sn}(u+v) - \mathrm{sn}(u-v) = \frac{2\,\mathrm{sn}v\,\mathrm{cn}u\,\mathrm{dn}u}{1 - k^2\mathrm{sn}^2u\,\mathrm{sn}^2v}$$

e ponendo ora $u + \frac{h}{2}$ in luogo di u ed $\frac{h}{2}$ in luogo di v :

$$\frac{\mathrm{sn}(u+h) - \mathrm{sn}u}{h} = \frac{\mathrm{sn}\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cdot \frac{\mathrm{cn}\left(u+\frac{h}{2}\right)\mathrm{dn}\left(u+\frac{h}{2}\right)}{1 - k^2\mathrm{sn}^2\left(u+\frac{h}{2}\right)\mathrm{sn}^2\frac{h}{2}}.$$

Di qui si trae passando al limite per $h=0$ (poichè $\mathrm{sn}(o)=0$):

$$\lim_{h=0}\frac{\mathrm{sn}(u+h) - \mathrm{sn}u}{h} = \mathrm{cn}u\,\mathrm{dn}u \lim_{h=0}\frac{\mathrm{sn}\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}. \qquad (1)$$

Ora si può scrivere (cfr. art. 874) :

$$\lim_{h=0}\frac{\mathrm{sn}\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \frac{\vartheta_{00}\left(0\,,\frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right)}{\Omega_1\cdot\vartheta_{10}\left(0\,,\frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right)\vartheta_{01}\left(0\,,\frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right)} \lim_{h=0}\frac{\vartheta_{11}\left(\frac{h}{2\,\Omega_1}\,,\frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right)}{\frac{h}{2\Omega_1}},$$

e, per la definizione stessa di derivata, si ha, poichè $\vartheta_{11}\left(0\,,\frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right)=0$:

$$\lim_{h=0}\frac{\vartheta_{11}\left(\frac{h}{2\Omega_1}\right)}{\frac{h}{2\Omega_1}} = \lim_{h=0}\frac{\vartheta_{11}\left(\frac{h}{2\Omega_1}\right) - \vartheta_{11}(0)}{\frac{h}{2\Omega_1}} = \vartheta'_{11}(0).$$

Se dunque poniamo:

$$\frac{\vartheta_{00}\left(0,\frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right)\vartheta'_{11}\left(0,\frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right)}{\Omega_1\cdot\vartheta_{10}\left(0,\frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right)\vartheta_{01}\left(0,\frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right)}=g(\Omega_1\,,\,\Omega_1)\,, \qquad (2)$$

si ha dalla (1):

$$(\mathrm{sn}u)'=g\cdot\mathrm{cn}u\cdot\mathrm{dn}u. \qquad (3)$$

882. Dopo ciò, si calcoleranno facilmente le derivate di cn$u$ e dn$u$ derivando le relazioni (cfr. art. 876):

$$\mathrm{cn}^2u=1-\mathrm{sn}^2u\ ,\ \mathrm{dn}^2u=1-k^2\mathrm{sn}^2u.$$

Si troverà per tal modo:

$$\begin{aligned}(\mathrm{cn}u)'&=-g\cdot\mathrm{sn}u\,\mathrm{dn}u\\(\mathrm{dn}u)'&=-gk^2\cdot\mathrm{sn}u\,\mathrm{cn}u.\end{aligned} \qquad (4)$$

883. Nelle funzioni ellittiche da noi fin quì considerate i due parametri Ω_1 ed Ω_2 sono indipendenti, cioè possono fissarsi ad arbitrio (*). Ordinariamente però si impone ad essi la condizione che il *moltiplicatore* $g(\Omega_1\,,\,\Omega_2)$ riesca uguale all'unità, cioè la condizione:

$$\Omega_1=\frac{\vartheta_{00}\left(0,\frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right)\vartheta'_{11}\left(0,\frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right)}{\vartheta_{01}\left(0,\frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right)\vartheta_{10}\left(0,\frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right)}, \qquad (\alpha)$$

cosicchè le funzioni ellittiche *ordinarie* dipendono, oltrechè dall' *argomento* u, da un unico parametro arbitrario. Per tale parametro si suol scegliere il numero k da noi già incontrato (art. 876) e definito in funzione di Ω_1 ed Ω_2 per mezzo della formola:

$$k=\frac{\vartheta^2_{10}\left(0,\frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right)}{\vartheta^2_{00}\left(0,\frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right)}. \qquad (5)$$

In conformità a ciò, per mettere in evidenza anche il parametro k da cui dipendono le funzioni ellittiche ordinarie sn$u$, cn$u$, dn$u$, gioverà rappresentarle con

$$\mathrm{sn}(u\,,\,k)\,,\ \mathrm{cn}(u\,,\,k)\,,\ \mathrm{dn}(u\,,\,k). \qquad (\beta)$$

884. Il numero k si chiama il *modulo* delle tre funzioni ellitti-

---

(*) Salvo, ben inteso, la restrizione che sia positivo il coefficiente della parte imaginaria del rapporto $\frac{\Omega_2}{\Omega_1}$ (cfr. art. 862).

che ordinarie, i cui simboli funzionali sn , cn , dn si leggono: *seno amplitudine*, *coseno amplitudine* e *delta amplitudine*. Se si fa tendere a zero il modulo k, la funzione dn$u$ tende a divenire costante ed uguale all'unità, nel mentre che sn$u$ e cn$u$ tendono risp. a coincidere (cfr. le Note quì sotto) colle funzioni trigonometriche sin$u$ e cos$u$.

885. Per le derivate delle funzioni ellittiche ordinarie si hanno in luogo delle (3) e (4) le espressioni più semplici:

$$(\mathrm{sn}u)' = \mathrm{cn}u\ \mathrm{dn}u\ ,\ (\mathrm{cn}u)' = -\mathrm{sn}u\ \mathrm{dn}u\ ,\ (\mathrm{dn}u)' = -k^2\mathrm{sn}u\ \mathrm{dn}u. \quad (\gamma)$$

Note.

1. Chiunque abbia qualche famigliarità coi primi principii del calcolo differenziale ed integrale, riconoscerà, senza alcuna difficoltà, come, posto

$$x = \mathrm{sn}(u\ ,\ k)\ , \quad (\alpha)$$

l'eguaglianza da noi dimostrata:

$$(\mathrm{sn}u)' = \mathrm{cn}u \cdot \mathrm{dn}u$$

che può anche scriversi (art. 876):

$$(\mathrm{sn}u)' = \sqrt{1 - \mathrm{sn}^2u}\sqrt{1 - k^2\mathrm{sn}^2u}\ ,$$

equivale alla formola:

$$u = \int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}. \quad (\beta)$$

Egli è precisamente col tentare di risolvere il legame fra x ed u, espresso da quest'ultima relazione, rispetto alla variabile x, cioè colla così detta *inversione* dell'*integrale ellittico* che si giunse la prima volta, da *Legendre*, alla scoperta della funzione ellittica fondamentale sn(u , k).

2. Se si pone:

$$x = \sin\varphi\ , \quad (\gamma)$$

la relazione (β) prende la forma equivalente:

$$u = \int_0^\varphi \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}. \quad (\delta)$$

La quantità φ considerata come funzione di u si chiama l'*amplitudine* di u e si scrive:

$$\varphi = \mathrm{am}u. \quad (\varepsilon)$$

In luogo di scrivere $x = \mathrm{sn}u$, si può dunque anche scrivere $x = \sin \mathrm{am}u$, ed é questa la ragione per la quale la scrittura sn$u$ si legge, come già si è notato (art. 884) *seno amplitudine di* u ; ecc.

3. Poichè (art. 379): $\mathrm{sn}\left(\frac{\Omega_1}{2}\right) = 1\ ,\ \mathrm{sn}\left(\frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2}\right) = \frac{1}{k}$, possiamo ritenere:

$$\frac{\Omega_1}{2} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}\ ,\ \frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2} = \int_0^{\frac{1}{k}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

e quindi:

$$\Omega_1 = 2K \ , \ \Omega_2 = 2iK' ,$$

essendo (per k reale positivo e minore di 1) K e K' le quantità reali positive espresse dagl' integrali definiti:

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \ , \ K' = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}} .$$

4. Per $h = 0$ la formola (β) diviene:

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

e dà:

$$u = \text{arc}\sin x$$

d' onde:

$$x = \sin u .$$

Vediamo così che le funzioni ellittiche sn$u$, cn$u$ si riducono per $k=0$ risp. alle funzioni trigonometriche sin$u$ e cos$u$.

5. Per $k = 1$ le funzioni ellittiche degenerano in semplici funzioni esponenziali e precisamente:

$$\sin(u, 1) = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}} \ , \ \text{cn}(u, 1) = \frac{2}{e^u + e^{-u}} .$$

6. All'art. 881 si è ammesso implicitamente che la funzione $\vartheta_{11}(u)$ abbia una derivata. Non ci siamo però trattenuti su questo punto, perchè la continuità e derivabilità delle funzioni ϑ risulteranno dai teoremi generali del § 13 di questo stesso capitolo; giacchè la serie che definiva la $\vartheta(u)$ é una serie che procede secondo le potenze intere di $e^{2\pi i u}$.

7. Per maggiori sviluppi sulla teoria delle funzioni ellittiche si veggano le: *lezioni sulla teoria delle funzioni di variabile complessa e delle funzioni ellittiche di* Luigi Bianchi (Pisa, Spoerri 1901)

§ 13.° — Serie che procedono secondo le potenze intere e positive di una variabile.

886. Consideriamo ora serie a termini variabili:

$$f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \dots \qquad (1)$$

in cui, cioè, le $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, ... siano funzioni ben determinate della variabile x, che potrà assumere valori reali o complessi. Si chiama *campo di convergenza* della serie (1) l' insieme di tutti quei valori reali o complessi di x per i quali la detta serie riesce convergente.

Così, ad esempio, il campo di convergenza della serie:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

è costituito da tutti quei valori di x per i quali mod$x < 1$. Indicando infatti con S_n la somma dei primi n termini, si ha:

$$S_n = \frac{x^n}{x-1} + \frac{1}{1-x}$$

e quindi, per $\mathrm{mod}x < 1$:

$$\lim_{n=\infty} S_n = \frac{1}{1-x}.$$

Per $\mathrm{mod}x > 1$, la serie è invece divergente, poichè in tal caso $\lim_{n=\infty}(\mathrm{mod}x^n) = \infty$. Se poi sia $\mathrm{mod}x=1$, si potrà porre $x = \cos\varphi + i\sin\varphi$ e quindi $x^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$, la quale espressione non tende ad alcun limite determinato per $n = \infty$, eccettuato il caso di $\varphi = 0$, cioè di $x = 1$, nel quale la serie è manifestamente divergente.

887. Se ε è una quantità positiva *fissata* piccola a piacere, ed x un valore qualunque reale o complesso appartenente al campo di convergenza C della serie (1), esisterà tempre, come sappiamo, un valore di n per il quale (e per tutti gl'infiniti valori successivi) si abbia:

$$\mathrm{mod}[f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \ldots] < \varepsilon. \qquad (2)$$

Se però in luogo del valore x si prenda un altro valore qualunque fra quelli che appartengono al campo C, potrà accadere che la (2) non sia più verificata, a meno che si cambi opportunamente il valore di n. È dunque importante di sapere, dato un campo C′ di valori di x contenuto in C, se la diseguaglianza (2) possa essere soddisfatta, fissato a piacere ε, e determinato opportunamente n, *simultaneamente* per tutti i valori di x appartenenti a C′. Se ciò è possibile, si dice che la serie (1) converge *uniformemente* entro il campo C′.

888. Veniamo ora a studiare in particolare le serie, importantissime in analisi, che procedono secondo le potenze intere e positive di una variabile x, cioè la serie del tipo:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots \qquad (3)$$

dove $a_0, a_1, a_2, \ldots$ sono coefficienti costanti ben determinati.

Cominceremo con dimostrare che: *se la serie* (3) *è convergente per un certo valore di* x, *essa sarà altresì convergente, anzi assolutamente convergente, per ogni altro valore* x′, *il cui modulo sia inferiore al modulo di* x.

Invero, essendo $\mathrm{mod}x' < \mathrm{mod}x$, e quindi $\dfrac{\mathrm{mod}x'}{\mathrm{mod}x} < 1$, sarà convergente (art. 628) la serie:

$$1 + \frac{\mathrm{mod}x'}{\mathrm{mod}x} + \frac{(\mathrm{mod}x')^2}{(\mathrm{mod}x)^2} + \ldots.$$

Questa serie a termini tutti positivi resterà convergente (articolo 627), se si moltiplicano i suoi termini risp. per

$$\mathrm{mod}a_0,\ \mathrm{mod}(a_1x),\ \mathrm{mod}(a_2x),\ \ldots,$$

giacchè questi numeri tendono, per la supposta convergenza di (3), al limite zero, onde restano tutti evidentemente inferiori ad un certo numero finito.

Si ottiene così la serie convergente:

$$\text{mod}a_0 + \text{mod}(a_1x') + \text{mod}(a_2x'^2) + \dots$$

c. d. d.

889. Dal teorema ora dimostrato segue primieramente che, se nel campo di convergenza C della serie (3) esistono valori di x per i quali mod$x$ possa riuscire grande quanto si vuole, la serie (3) sarà convergente per *tutti* i valori di x. Se ciò non accade, gli infiniti valori reali e positivi che può prendere mod$x$, si divideranno in due classi, cioè quei numeri reali e positivi r che sono modulo di qualche numero x appartenente al campo C e quei numeri r che non lo sono. Dette A ed A′ queste due classi, segue dal teorema dell'art. prec. che ogni numero di A è inferiore ad ogni numero di A′. Esisterà dunque un numero positivo R ben determinato rappresentante l'elemento di separazione delle due classi, cosicchè la serie (3) sarà convergente per tutti i valori di x il cui modulo è inferiore ad R e divergente per mod$x > \text{R}$.

Ricordando la rappresentazione geometrica dei numeri complessi vediamo dunque che *il campo di convergenza della serie* (3), *se non abbraccia tutto l'intero piano rappresentativo dei numeri complessi, è limitato da un cerchio di raggio* R *col centro nell'origine dei numeri* (*che si chiama cerchio di convergenza della serie*).

Del resto anche il primo caso si può considerare come incluso nel secondo, in quanto, cioè, l'intero piano si può assimilare ad un cerchio di raggio $\text{R} = \infty$.

Notiamo finalmente che non si può dire nulla in generale circa la convergenza della serie (3) pei valori di x rappresentati dai punti stessi del cerchio di convergenza. Può accadere che il campo di convergenza della (3) comprenda tutti questi punti; ma può anche accadere che per alcuni punti o anche per tutti i punti del cerchio di convergenza la serie riesca divergente o indeterminata.

890. Se x è un valore qualunque rappresentato da un punto situato *nell'interno* del cerchio di convergenza della serie (3), esisterà evidentemente *nell'interno* dello stesso cerchio qualche altro punto rappresentante un valore X di modulo superiore a quello di x; e sarà convergente anche la serie:

$$a_0 + a_1\text{X} + a_2\text{X}^2 + \dots .$$

La serie (3) sarà dunque assolutamente convergente per quel valore di x, per quanto si è già stabilito all'art. 888, essendo mod$x$ < modX. Epperò:

La serie $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ *converge assolutamente per ogni valore di* x *che cada nell'interno del suo cerchio di convergenza.*

891. *Se nella serie:* $a_0+a_1x+a_2x^2+\dots$ *il rapporto:* $\text{mod}a_n : \text{mod}a_{n+1}$ *tende ad un limite determinato per* $n = \infty$, *questo limite dà precisamente il valore del raggio di convergenza della serie.*

Detto h questo limite, si avrà infatti:

$$\lim_{n=\infty} \frac{\text{mod}(a_{n+1}x^{n+1})}{\text{mod}(a_nx^n)} = \frac{\text{mod}x}{h}.$$

Quindi (art. 631) la serie

$$\text{mod}a_0 + \text{mod}(a_1x) + \text{mod}(a_2x^2) + \ldots, \tag{4}$$

e per conseguenza (art. 835) anche la (3), sarà convergente per $\frac{\text{mod}x}{h} < 1$, cioè se $\text{mod}x < h$. Se invece $\text{mod}x > h$, la serie (4) sarà divergente (art. 633), cosicchè (art. 890) un cosiffatto valore di x non potrebbe cadere nell'interno del cerchio di convergenza della (3).

892. Sia C′ un insieme di valori x tutti compresi nell'interno del cerchio di convergenza della serie (3). Esisterà evidentemente un numero X compreso nel cerchio di convergenza C e tale che il suo modulo superi il modulo di qualunque numero appartenente a C′. La serie:

$$a_0 + a_1\text{X} + a_2\text{X}^2 + \ldots$$

sarà quindi convergente, e con essa (art. 890) anche la serie:

$$\text{mod}a_0 + \text{mod}a_1\,\text{modX} + \text{mod}a_2\,(\text{modX})^2 + \ldots,$$

cosicchè, essendo ε una quantità positiva, fissata piccola a piacere, si avrà per n abbastanza grande:

$$\text{mod}a_{n+1}(\text{modX})^{n+1} + \text{mod}a_{n+2}(\text{modX})^{n+2} + \ldots < \varepsilon.$$

Se dunque x è un numero qualunque appartenente a C′, poichè per ipotesi $\text{mod}x < \text{modX}$, si avrà *a fortiori:*

$$\text{mod}\{a_{n+1}x^{n+1} + a_{n+2}x^{n+2} + \ldots\} < \varepsilon.$$

Vediamo così, per la definizione di convergenza *uniforme* data all'art. 887, che: *ogni serie procedente secondo le potenze intere e positive di una variabile* x *converge uniformemente per tutti i valori di* x *appartenenti ad ogni campo tutto compreso nell'interno del campo di convergenza della serie.*

893. *Se la serie* $f(x) = a_\mu x^\mu + a_{\mu+1}x^{\mu+1} + \ldots$, *si annulla per* $x = 0$ (*ed è convergente per qualche valore di* x *diverso da zero*), *fissato a piacere un numero positivo* δ, *esisterà un altro numero positivo* ε *tale che, per* $\text{mod}x < \varepsilon$, *si abbia sempre* $\text{mod}f(x) < \delta$.

Invero, detto r un numero positivo inferiore al raggio di convergenza della serie considerata, esisterà (art. 890) il numero positivo, finito e determinato:

$$\text{L} = r^\mu\,\text{mod}a_\mu + r^{\mu+1}\,\text{mod}a_{\mu+1} + \ldots,$$

e si avrà evidentemente per ogni valore di x, il cui modulo sia inferiore ad r:

$$\text{mod}f(x) < (\text{mod}x)^\mu\{\text{mod}a_\mu + r\,\text{mod}a_{\mu+1} + \ldots\},$$

cioè:

$$\text{mod}f(x) < \frac{(\text{mod}x)^\mu \cdot \text{L}}{r^\mu}.$$

Se dunque imponiamo a mod$x$ anche la restrizione:

$$\frac{(\text{mod}x)^\mu}{r^\mu} < \delta ,$$

cioè:

$$\text{mod}x < r\sqrt[\mu]{\frac{\delta}{L}} ,$$

si avrà appunto *a fortiori*;

$$\text{mod}f(x) < \delta ,$$

come si desiderava.

894. *Se la serie* $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ *non si annulla per* $x = 0$ (*e converge per qualche valore di* x *diverso da zero*), *esisterà un numero positivo* ρ, *inferiore al raggio di convergenza della serie, tale che il valore della serie sia diverso da zero per tutti quei valori di* x *il cui modulo è inferiore a* ρ.

Si potrà infatti, per il teorema precedente, determinare il numero positivo ρ in modo che, per mod$x < \rho$, si abbia sempre:

$$\text{mod}\{a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots\} < \text{mod}a_0.$$

Per tutti questi valori di x la serie non potrà avere valore nullo, poichè se fosse: $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots = 0$, se ne dedurrebbe invece evidentemente:

$$\text{mod}\{a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots\} = \text{mod}a_0.$$

895. *Se due serie:*

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$$

e

$$b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots$$

sono convergenti ed assumono egual valore per tutti quei valori di x, *il cui modulo è inferiore a un certo numero positivo* ρ (*sia esso pure piccolissimo, purchè diverso da zero*), *sono in esse necessariamente uguali i coefficienti di tutte le potenze omonime di* x.

Sia infatti, se è possibile, a_μ il primo dei coefficienti $a_0, a_1, \dots$, che non coincida col corrispondente coefficiente b_μ. La serie:

$$(a_\mu - b_\mu)x^\mu + (a_{\mu+1} - b_{\mu+1})x^{\mu+1} + \dots$$

e quindi anche la serie:

$$(a_\mu - b_\mu) + (a_{\mu+1} - b_{\mu+1})x + (a_{\mu+2} - b_{\mu+2})x^2 + \dots$$

avrà, secondo l'ipotesi fatta, valore nullo per ogni valore x che sia diverso da zero e di modulo inferiore a ρ. Ora ciò è in manifesta contraddizione col teorema dell'art. prec., poichè quest'ultima serie non si annullerebbe per $x = 0$.

Dal teorema così dimostrato discende evidentemente come corollario che: *se una funzione ben determinata di* x *si può svilup-*

pare secondo le potenze intere e positive di x, *ciò non può farsi che in un unico modo.*

896. Supponiamo che la serie:

$$U(n) = f_0(n) + f_1(n)x + f_2(n)x^2 + \ldots$$

i cui coefficienti dipendono dall'intero n, sia convergente per tutti i valori abbastanza grandi di n, e che i coefficienti $f_0(n), f_1(n), \ldots$ tendano uniformemente, per $n = \infty$, verso certi valori ben determinati $v_0, v_1, \ldots$, con che si vuol intendere che tutte le differenze $f_i(n) - v_i$ si possono rendere simultaneamente inferiori, in valore assoluto, ad un numero dato ε, purchè si prenda n abbastanza grande.

Vogliamo dimostrare che: *se anche la serie:*

$$V = v_0 + v_1 x + v_2 x^2 + \ldots$$

è convergente, e se mod x < 1, *si ha:*

$$V = \lim_{n=\infty} U(n).$$

Si ha infatti:

$$\mathrm{mod}[U(n) - V] \gtreqless \mathrm{mod}[f_0(n) - v_0] + \mathrm{mod}[f_1(n) - v_1]\mathrm{mod}x + \ldots$$

e quindi, comunque sia fissato ε, per n abbastanza grande:

$$\mathrm{mod}[U(n) - V] \gtreqless \varepsilon(1 + \mathrm{mod}x + \mathrm{mod}x^2 + \ldots) = \frac{\varepsilon}{1 - \mathrm{mod}x},$$

il che dimostra l'asserto; poichè il secondo membro si potrà assumere piccolo a piacere, prendendo ε sufficientemente piccolo.

897. Chiuderemo con una proprietà, assai utile per il calcolo pratico dei raggi di convergenza, che si sarebbe anche potuta prendere come punto di partenza per istabilire la nozione di cerchio di convergenza.

Il cerchio di convergenza di una serie $a_0 + a_1 x + \ldots$ *è la linea di separazione fra quei valori di* x, *pei quali i singoli termini della serie si mantengono finiti, col crescere di* n, *e quelli pei quali ciò non accade.*

Infatti, se x è interno al cerchio di convergenza, dovendo la serie riuscire convergente, il suo termine generale tenderà a zero col crescere di n; epperò i valori assoluti degli infiniti suoi termini si manterranno evidentemente inferiori ad un certo limite superiore assegnabile. Reciprocamente, se si abbia, per ogni valore di n,

$$\mathrm{mod}(a_n x^n) < A,$$

essendo A un numero positivo fisso, il punto x cadrà nell'interno o sul cerchio stesso di convergenza. Poichè, se cadesse fuori, esisterebbe evidentemente qualche altro valore X, del pari esterno al cerchio, di modulo inferiore al modulo di x; ed allora dalla

convergenza assoluta delle serie:

$$1 + \frac{\text{mod}X}{\text{mod}x} + \frac{(\text{mod}X)^2}{(\text{mod}x)^2} + \dots$$

seguirebbe (art. 627) moltiplicandone i singoli termini risp. per le quantità finite $\text{mod}a_0$, $\text{mod}a_1 \, \text{mod}x$, $\text{mod}a_2(\text{mod}x)^2$, ... la convergenza della serie:

$$\text{mod}a_0 + \text{mod}(a_1X) + \text{mod}(a_2X^2) + \dots$$

contrariamente al supposto.

Note ed Esercizi.

1. *Si osservi che il cerchio di convergenza di una serie* $a_0+a_1x+a_2x^2+\dots$ *è caratterizzato da ciò che la serie dei valori assoluti dei termini è convergente per ogni valore di* x *interno al cerchio e divergente per ogni valore ad esso esterno*, e se ne deduca che *la serie* $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ *e la serie* $\text{mod}a_0 + (\text{mod}a_1)x + (\text{mod}a_2)x^2 + \dots$ *hanno sempre lo stesso cerchio di convergenza.*

2. Fra le serie che procedono secondo le potenze di una variabile, ha molta importanza, per il suo alto grado di generalità, la serie di *Gauss*, detta anche *ipergeometrica* (in quanto si può riguardare come un'estensione della serie in progressione geometrica):

$$1+\frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\cdot\beta(\beta+1)}{1\cdot2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdot\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\cdot2\cdot3\cdot\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3+\dots$$

o con notazione più breve (cfr. art. 499):

$$F(\alpha\,,\beta\,,\gamma\,,x) = +1\frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}x + \frac{\alpha^{\bar{2}}\beta^{\bar{2}}}{1^{\bar{2}}\cdot\gamma^{\bar{2}}}x^2 + \frac{\alpha^{\bar{3}}\beta^{\bar{3}}}{1^{\bar{3}}\cdot\gamma^{\bar{3}}} + \dots$$

che dipende, oltrechè dalla variabile x, dai tre parametri α, β, γ. Questi ultimi possono assumere, al pari di x, valori arbitrari. Soltanto non sarà il caso di dare ad essi valori interi e negativi; poichè, per valori interi e negativi di α o di β, i coefficienti della serie si annullano evidentemente da un certo punto in poi, cosicchè la serie si riduce ad un semplice polinomio intero in x; e, per valori interi e negativi di γ, essa non avrebbe alcun senso, giacchè i suoi termini diverrebbero, a partire da un certo punto, tutti infiniti.

Esclusi questi casi, e detto a_n il coefficiente di x^n, si ha:

$$\lim_{n=\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n=\infty}\frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(1+n)(\gamma+n)} = 1\,,$$

cosicchè *la serie ipergeometrica è convergente* (art. 631) *per* $\text{mod}x<1$ *e non lo è mai per* $\text{mod}x > 1$.

3. Consideriamo ora il caso di $\text{mod}x=1$. Se $\alpha=\alpha_1+\alpha_2 i$, $\beta=\beta_1+\beta_2 i$, $\gamma=\gamma_1+\gamma_2 i$ sono i numeri α, β, γ decomposti nelle loro pari reali ed imaginarie, sarà:

$$\frac{\text{mod}a_{n+1}}{\text{mod}a_n} = \text{mod}\frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(1+n)(\gamma+n)} = \sqrt{\frac{[(n+\alpha_1)^2+\alpha_2{}^2][(n+\beta_1)^2+\beta_2{}^2]}{(n+1)^2[(n+\gamma_1)^2+\gamma_2{}^2]}}\,,$$

cosicchè si potrà scrivere:

$$n\left(1-\frac{\mathrm{mod}a_{n+1}}{\mathrm{mod}a_n}\right)=n\left(1-\sqrt{1+\varepsilon_n}\right)=-\frac{(1+\varepsilon_n)^{\frac{1}{2}}-1}{\varepsilon_n}\cdot n\varepsilon_n$$

dove:

$$\varepsilon_n=\frac{[(n+\alpha_1)^2+\alpha_2^2][(n+\beta_1)^2+\beta_2^2]}{(n+1)^2[(n+\gamma_1)^2+\gamma_2^2]}-1=\frac{2(\alpha_1+\beta_1-\gamma_1-1)n^3+\ldots}{n^4+\ldots}$$

è un numero che tende a zero col crescere di n all'infinito.

Si ha dunque (art. 648), poichè evidentemente $\lim n\varepsilon_n=2(\alpha_1+\beta_1-\gamma_1-1)$:

$$\lim_{n=\infty} n\left(1-\frac{\mathrm{mod}a_{n+1}}{\mathrm{mod}a_n}\right)=-\lim_{n=\infty}\frac{(1+\varepsilon_n)^{\frac{1}{2}}-1}{\varepsilon_n}\cdot\lim_{n=\infty} n\varepsilon_n=1+\gamma_1-\alpha_1-\beta_1.$$

La serie dei moduli:

$$1+mod\frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}+mod\frac{\alpha^{\bar 2}\beta^{\bar 2}}{1^{\bar 2}\cdot\gamma^{\bar 2}}+mod\frac{\alpha^{\bar 3}\beta^{\bar 3}}{1^{\bar 3}\cdot\gamma^{\bar 3}}+\ldots$$

sarà dunque convergente (cfr. la Nota 8ª del § 9° del Capitolo VII) *se* $\gamma_1-\alpha_1-\beta_1$ *è positivo e divergente se* $\gamma_1-\alpha_1-\beta_1$ *è negativo.*

4. Come caso particolare della serie ipergeometrica ritroviamo la serie binomiale (Cfr. le Note del § 5°):

$$F(-m,\ \beta,\ \beta,\ -x)=1+\binom{m}{1}x+\binom{m}{2}x^2+\ldots,$$

onde possiamo dire che *la serie binomiale è assolutamente convergente anche per* $\mathrm{mod}x=1$, *semprechè la parte reale del numero* m *sia positiva.*

5. Si ha pure come caso particolare la serie così detta *logaritmica* (cfr. la Nota 10ª).

$$xF(1,\ 1,\ 2,\ -x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}+\ldots.$$

6. Verificare l'identità:

$$\gamma[\gamma-1-(2\gamma-\alpha-\beta-1)x]F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ x)=$$

$$\gamma(\gamma-1)(1-x)F(\alpha,\ \beta,\ \gamma-1,\ x)-(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)xF(\alpha,\ \beta,\ \gamma+1,\ x).$$

7. Da quest'identità si deduce per $x=1$:

$$\frac{F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ 1)}{F(\alpha,\ \beta,\ \gamma+1,\ 1)}=\frac{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma-\alpha-\beta)}$$

d'onde segue subito, cangiando γ in $\gamma+1$, $\gamma+2$, ..., $\gamma+n-1$ e moltiplicando quindi i risultati:

$$\frac{F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ 1)}{F(\alpha,\ \beta,\ \gamma+n,\ 1)}=\frac{(\gamma-\alpha)^{\bar n}(\gamma-\beta)^{\bar n}}{\gamma^{\bar n}(\gamma-\alpha-\beta)^{\bar n}}.$$

Ma $F(\alpha,\ \beta,\ \gamma+n,\ 1)$ tende, come è facile riconoscere, per $n=\infty$, al va-

lore 1. Si ha dunque (per $\gamma_1 > \alpha_1 + \beta_1$):

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = \lim_{n=\infty} \frac{(\gamma-\alpha)^{\bar{n}}(\gamma-\beta)^{\bar{n}}}{\gamma^{\bar{n}}(\gamma-\alpha-\beta)^{\bar{n}}}, \ldots$$

8. **Tutte le espressioni:**

$$\frac{1-\varepsilon}{1}, \frac{(1-\varepsilon)(2-\varepsilon)}{1\cdot 2}, \frac{(1-\varepsilon)(2-\varepsilon)(3-\varepsilon)}{1\cdot 2\cdot 3}, \ldots$$

convergono al limite 1, quando la quantità reale positiva ε converge al limite zero, ma non uniformemente. Posto infatti per brevità:

$$\frac{(1-\varepsilon)(2-\varepsilon)\ldots(k-\varepsilon)}{1\cdot 2\ldots k} = T_k,$$

si ha:

$$1 - T_k = (1 - T_1) + (T_1 - T_2) + (T_2 - T_3) + \ldots + (T_{k-1} - T_k).$$

Se dunque, fissato a piacere il numero positivo δ, si avesse, per un valore abbastanza piccolo di ε e per tutti i valori di k:

$$1 - T_k < \delta,$$

si avrebbe anche:

$$\varepsilon + \frac{\varepsilon(1-\varepsilon)}{1\cdot 2} + \frac{\varepsilon(1-\varepsilon)(2-\varepsilon)}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots + \frac{\varepsilon(1-\varepsilon)(2-\varepsilon)\ldots(k-1-\varepsilon)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k} < \delta$$

il che è assurdo, se $\delta < 1$, perchè se k abbastanza grande, il primo membro di questa diseguaglianza differisce di tanto poco quanto si vuole dalla quantità:

$$1 - F(-\varepsilon, \gamma, \gamma, 1)$$

che ha il valore 1, come chiaramente appare dall'espressione data nella nota che precede.

9. Se la funzione $f(x)$ dell'argomento reale (o complesso) x, ha un valore finito e ben determinato per tutti i valori reali (o anche complessi) di x circostanti ad un certo valore speciale $x = \alpha$, e se la diseguaglianza:

$$\mathrm{mod}[f(\alpha+h) - f(\alpha)] < \delta,$$

essendo δ un numero positivo da fissarsi a piacere, è soddisfatta per tutti i valori reali (o anche complessi), abbastanza piccoli, di h, si dice che essa è *continua per il valore* $x = \alpha$.

10. *Se la serie:*

$$F(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \ldots$$

è uniformemente convergente (art. 887) *per tutti i valori di* x *appartenenti ad un certo campo* C (*il quale potrà essere il semplice intervallo fra* a *e* b, *se si tratta di funzioni ad argomento reale, ovvero un certo pezzo del piano di Gauss, se si tratti di funzioni ad argomento complesso*) *e se ciascuna delle* $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... *è continua per un certo valore* α *interno al campo* C, *sarà continua per questo stesso valore* α *anche la* F(x).

Detta $F_n(x)$ la somma dei primi n termini della serie ed $R_n(x)$ la somma dei rimanenti, si può scrivere infatti:

$$F(\alpha+h) - F(\alpha) = F_n(\alpha+h) - F_n(\alpha) + R_n(\alpha+h) - R_n(\alpha)$$

e per la supposta convergenza uniforme si potrà determinare l'indice n

in modo che il valore assoluto di $R_n(\alpha + h)$ sia inferiore ad una quantità positiva $\frac{\varepsilon}{4}$ fissata a piacere, indipendentemente dal valore di h, semprechè $\alpha + h$ si conservi interno al campo C. Fissato così il valore di n, si avrà

$$\mathrm{mod}[F(\alpha + h) - F(\alpha)] \gtreqless \mathrm{mod}[F_n(\alpha + h) - F_n(\alpha)] + \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Ciò posto, poichè $F_n(x)$, come somma di un numero *finito* di funzioni continue, è anch'essa evidentemente una funzione continua, si potrà prendere h abbastanza piccolo perchè sia

$$\mathrm{mod}[F_n(\alpha + h) - F_n(\alpha)] < \frac{1}{2}\varepsilon$$

ed allora si avrà appunto:

$$\mathrm{mod}[F(\alpha + h) - F(\alpha)] < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon, \quad \text{c. d. d.}$$

11. Corollario. — *Le funzioni di* x, *rappresentabili mediante serie procedenti secondo le potenze intere e positive di* x, *sono continue per ogni valore di* x *interno al cerchio di convergenza della serie.*

Basta riflettere che queste serie sono uniformemente convergenti (articolo 892) e che i loro termini sono semplici potenze di x, e quindi certamente funzioni continue di x.

12. Applicando ad una serie:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots \tag{α}$$

la stessa legge di derivazione dei polinomi interi in x, se ne deriva la serie:

$$\varphi(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \dots \tag{β}$$

la quale *ha precisamente lo stesso cerchio di convergenza della serie* (α).

Infatti, se ξ è un valore qualunque interno al cerchio di convergenza della (α), ed x un altro valore del pari interno al cerchio, ma di modulo superiore a $\mathrm{mod}\xi$, sarà convergente la serie:

$$1 + 2\frac{\mathrm{mod}\xi}{\mathrm{mod}x} + 3\frac{(\mathrm{mod}\xi)^2}{(\mathrm{mod}x)^2} + \dots, \tag{γ}$$

giacchè in essa il rapporto di un termine al precedente ha per limite il numero $\frac{\mathrm{mod}\xi}{\mathrm{mod}x}$, che è minore di 1. Sarà quindi (art. 627) convergente anche la serie:

$$\mathrm{mod}a_1 + 2\,\mathrm{mod}(a_2\xi) + 3\,\mathrm{mod}(a_3\xi^2) + \dots$$

che nasce dalla (γ) moltiplicandone i termini per le quantità:

$$\mathrm{mod}a_1\ ,\ \mathrm{mod}(a_2x)\ ,\ \mathrm{mod}(a_3x^2)\ , \dots$$

le quali si conservano finite. per la supposta convergenza di (α).

13. *La funzione* $\varphi(x)$ *rappresentata dalla serie* (β) *è precisamente la derivata, secondo la definizione generale dell'art.* 684, *della funzione* $f(x)$ *rappresentata dalla serie* (α), cioè:

$$\lim_{h=0}\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \varphi(x). \tag{δ}$$

Si ha primieramente:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\varphi(x)=\sum_{n=2}^{n=\infty}a_n\Big\{(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}x+\dots$$
$$+(x+h)x^{n-2}-(n-1)x^{n-1}\Big\}$$

$$=h\sum_{n=2}^{n=\infty}x_n\Big\{\frac{(x+h)^{n-1}-x^{n-1}}{h}+x\frac{(x+h)^{n-2}-x^{n-2}}{h}+\dots+x^{n-2}\frac{(x+h)-x}{h}\Big\}.$$

Ora, detto r un numero positivo compreso fra mod$x$ ed il raggio di convergenza della (α), si ha, prendendo h in modo che sia

$$\operatorname{mod}x+\operatorname{mod}h \leqq r,$$

come è facile riconoscere:

$$\operatorname{mod}\frac{(x+h)^\rho-x^\rho}{h}\leqq \rho r^{\rho-1}$$

onde:

$$\operatorname{mod}\Big\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\varphi(x)\Big\}\leqq$$

$$\leqq(\operatorname{mod}h)\sum_{n=2}^{n=\infty}\operatorname{mod}a_n\cdot\Big\{(n-1)r^{n-2}+(n-2)r^{n-2}+\dots+2r^{n-2}+r^{n-2}\Big\}$$

$$=(\operatorname{mod}h)\sum_{n=2}^{n=\infty}\frac{n(n-1)}{2}\operatorname{mod}a_n\cdot r^{n-2}.$$

Ma la serie:

$$\psi(x)=\sum_{n=2}^{n=\infty}n(n-1)a_nx^{n-2},$$

dedotta dalla (β) precisamente come la (β) si era dedotta dalla (α), ha, per quanto già si è dimostrato, lo stesso cerchio di convergenza della (α) e della (β), cosicchè essa è assolutamente convergente per $x=r$.

Esiste dunque il numero finito, indipendente da h:

$$\mathrm{T}=\sum_{n=2}^{n=\infty}n(n-1)\operatorname{mod}a_n\cdot r^{n-2}$$

e dalla diseguaglianza:

$$\operatorname{mod}\Big\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,\varphi(x)\Big\}<\frac{1}{2}\mathrm{T}\cdot\operatorname{mod}h$$

discende evidentemente la (δ) facendo tendere h allo zero; c. d. d.

14. Si deduca dall'ultima formola che: *se*

$$\mathrm{f}(\mathrm{x})=\mathrm{a}_0+\mathrm{a}_1\mathrm{x}+\mathrm{a}_2\mathrm{x}^2+\dots$$

e si pone:

$$\mathrm{F}(\mathrm{x}) = mod\,\mathrm{a}_0 + (mod\,\mathrm{a}_1)\mathrm{x} + (mod\,\mathrm{a}_2)\mathrm{x}^2 + \ldots,$$

si ha, sempreché **$mod\,\mathrm{x} + mod\,\mathrm{h}$** ***sia inferiore al raggio di convergenza di*** $\mathrm{f}(\mathrm{x})$:

$$mod\left\{\frac{\mathrm{f}(\mathrm{x}+\mathrm{h}) - \mathrm{f}(\mathrm{x})}{\mathrm{h}} - \mathrm{f}'(\mathrm{x})\right\} < \frac{1}{2}\,mod\,\mathrm{h}\cdot \mathrm{F}''(mod\,\mathrm{x} + mod\,\mathrm{h}).$$

15. Dalle cose fin qui stabilite segue che: ***se una funzione*** $\mathrm{f}(\mathrm{x})$ ***è sviluppabile secondo le potenze intere e positive di*** x***, essa ammette le derivate di qualunque ordine ed è continua, insieme con esse, per ogni valore di*** x ***compreso nell'interno del campo di convergenza dello sviluppo. A questo sviluppo si può poi dare la forma***:

$$\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \mathrm{f}(0) + \mathrm{x}\mathrm{f}'(0) + \mathrm{x}^2\frac{\mathrm{f}''(0)}{\underline{|2}} + \ldots.$$

16. Dallo sviluppo in serie di $f'(x)$ si deduce (cfr. art. 895) che: ***se la derivata di*** $\mathrm{f}(\mathrm{x})$ ***è nulla per tutti i valori abbastanza piccoli di mod***x***, la*** $\mathrm{f}(\mathrm{x})$ ***ha valore costante per tutti i valori di*** x ***interni al campo di convergenza del suo sviluppo in serie.***

17. Come applicazione della nota 18ª possiamo ottenere assai facilmente lo sviluppo in serie della funzione $\log_e(1+x)$ da noi già ben definita per valori reali e positivi di x.

Invero la serie $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$, convergente per mod$x < 1$, ha per derivata (cfr. la nota 18ª): $1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$, cioè $\frac{1}{1+x}$, ed $\frac{1}{1+x}$ è anche la derivata (cfr. art. 686) di $\log_e(1+x)$. Si ha dunque (cfr. Cap. VIII, § 7°, Nota 5ª), per mod$x < 1$, lo sviluppo convergente:

$$\log_e(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \ldots,$$

giacchè la derivata della differenza fra i due membri è nulla pei valori abbastanza piccoli di mod$x$; onde la differenza stessa sarà una costante e questa costante sarà necessariamente uguale a zero, poichè i due membri hanno già uguale valore per $x = 0$.

18. Calcolare le derivate di sin$x$ e cos$x$ applicando la derivazione termine per termine ai loro sviluppi in serie (art. 847). Si troverà così:

$$(\sin x)' = \cos x\ ,\ (\cos x)' = -\sin x.$$

19. Si deduca poi di qui (cfr. art. 695) che:

$$(\mathrm{tg}\,x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

CAPITOLO XII.

DELLE RADICI DELL'EQUAZIONE DI GRADO n.

§ 1.º — Teorema fondamentale dell'esistenza di una soluzione reale o complessa di un' equazione qualunque di grado n.

898. Essendo:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

una funzione intera, del grado n, della variabile x, i cui coefficienti siano numeri reali o complessi fissati a piacere, ogni valore reale od imaginario di x che soddisfi all' equazione:

$$f(x) = 0 \qquad (1)$$

si dirà essere una *radice* dell' equazione stessa.

La ragione di cosiffatta denominazione è, dopo l' introduzione nell'algebra dei numeri complessi, pienamente giustificata dal fatto che l' equazione più semplice del grado n, cioè l' equazione binomia:

$$b_0x^n + b_n = 0$$

ammette sempre n e soltanto n soluzioni distinte, la cui espressione generale, in funzione dei coefficienti dati b_0 e b_n, è contenuta nel simbolo di estrazione di radice:

$$x = \sqrt[n]{\frac{-b_n}{b_0}}$$

il quale, come sappiamo (art. 823), è appunto suscettibile di n significati fra loro distinti.

899. Posta un'equazione della forma generale (1) si affaccia però la questione di investigare se esista sempre, oppur no, almeno un valore speciale di x che la soddisfi, o, che è la stessa cosa, almeno un valore finito e determinato x per il quale il numero reale positivo $\mathrm{mod}f(x)$ acquisti il valore zero; giacchè sappiamo che dall'essere $\mathrm{mod}f(x) = 0$ segue $f(x) = 0$ e reciprocamente.

Tale questione verrà da noi risoluta affermativamente. La dimostrazione che siamo per dare, parte dal seguente:

POSTULATO. — *Esiste sempre almeno un valore speciale* $\mathbf{x} = a$ *della variabile* $\mathbf{x}$ *per il quale* $\mathrm{mod}f(\mathbf{x})$ *prende il minimo valore possibile.*

Cosicchè per qualunque altro valore di x si avrà sempre:

$$\mathrm{mod} f(x) \gtreqless \mathrm{mod} f(\alpha).$$

Noi ammetterremo, per ora, questo postulato come evidente.

900. Teorema. — *Ogni equazione algebrica ha sempre almeno una radice reale o complessa.*

Invero, se applichiamo all' equazione (1):

$$f(x) = 0$$

il postulato dell'art. prec. possiamo ritenere come già dimostrata l'esistenza di un valore determinato reale o complesso α, tale che si abbia per tutti i possibili valori di x:

$$\mathrm{mod} f(x) \gtreqless \mathrm{mod} f(\alpha). \tag{2}$$

Ciò posto, noi diciamo che per un siffatto valore α dovrà aversi necessariamente:

$$\mathrm{mod} f(\alpha) = 0$$

e dimostreremo ciò facendo vedere che sarebbe assurdo l'ammettere che si avesse: $\mathrm{mod} f(\alpha) > 0$.

Fatto ciò, ne seguirà senz'altro la verità del teorema enunciato, poichè, non potendo essere $\mathrm{mod} f(\alpha) > 0$, sarà necessariamente $\mathrm{mod} f(\alpha) = 0$, cioè α sarà una radice dell' equazione (1).

901. Supponiamo infatti, se è possibile, che si avesse:

$$\mathrm{mod} f(\alpha) > 0. \tag{3}$$

Poichè le quantità:

$$f'(\alpha)\,,\, f''(\alpha)\,,\, f'''(\alpha)\,,\,\ldots\,,\, f^{(n)}(\alpha)$$

non sono tutte nulle, giacchè almeno l' ultima di esse:

$$f^{(n)}(\alpha) = \underline{|n} \cdot a_0$$

sarà in ogni caso diversa da zero, sia $f^{(\mu)}(\alpha)$ la prima di esse che è diversa da zero. Allora, se indichiamo con h un numero qualunque diverso da zero, potremo scrivere per lo sviluppo di Taylor:

$$f(\alpha + h) = f(\alpha) + h^{\mu}\frac{f^{(\mu)}(\alpha)}{\underline{|\mu}} + h^{\mu+1}\frac{f^{(\mu+1)}(\alpha)}{\underline{|\mu+1}} + \ldots + h^{n}\frac{f^{(n)}(\alpha)}{\underline{|n}}$$

e dividendo entrambi i membri per $f(\alpha)$, che si è voluta supporre diversa da zero,

$$\frac{f(\alpha+h)}{f(\alpha)} = 1 + A_{\mu}h^{\mu} + A_{\mu+1}h^{\mu+1} + \ldots + A_n h^n\,, \tag{4}$$

ponendo per brevità:

$$A_i = \frac{f^{(i)}(\alpha)}{\underline{|i}\, f(\alpha)}\quad,\quad i = \mu\,,\,\mu+1\,,\,\ldots\,,\,n.$$

Poichè A_μ è, per supposto, diverso da zero, se lo scriviamo sotto la forma trigonometrica:

$$A_\mu = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

potremo ritenere $r > 0$. Poniamo ora similmente:

$$h = \rho(\cos\psi + i\sin\psi), \qquad (5)$$

cosicchè sarà:

$$A_\mu h^\mu = r\cdot\rho^\mu\cdot[\cos(\varphi + \mu\psi) + i\sin(\varphi + \mu\psi)] \qquad (6)$$

e cominciamo a determinare l'argomento arbitrario ψ ed il modulo arbitrario ρ in modo che

$$1 + A_\mu h^\mu$$

riesca un numero reale, positivo e minore dell' unità. A tale oggetto basterà porre primieramente:

$$\varphi + \mu\psi = \pi, \qquad (7)$$

cioè prendere:

$$\psi = \frac{\pi - \varphi}{\mu},$$

poichè allora la (6) diviene:

$$A_\mu h^\mu = -r\rho^\mu,$$

e porre quindi:

$$r\rho^\mu < 1,$$

cioè prendere:

$$\rho > \sqrt[\mu]{\frac{1}{r}}. \qquad (8)$$

Se ora scriviamo la (4) come segue:

$$\frac{f(a+h)}{f(a)} = (1 - r\rho^\mu) + h^\mu[A_{\mu+1}h + A_{\mu+2}h^2 + \ldots + A_n h^{n-\mu}],$$

ed applichiamo il teorema che il modulo della somma di due numeri non può mai superare la somma dei loro moduli, coll'avvertenza che nel nostro caso la prima parte del secondo membro è già un numero reale e positivo, deduciamo:

$$\frac{\mathrm{mod} f(a+h)}{\mathrm{mod} f(a)} \gtreqless 1 - r\rho^\mu + \rho^\mu\cdot\mathrm{mod}(A_{\mu+1}h + A_{\mu+2}h^2 + \ldots).$$

Poichè ora la somma:

$$A_{\mu+1}h + A_{\mu+2}h^2 + \ldots + A_n h^{n-\mu}$$

è una funzione di h che si annulla per $h = 0$, si potrà sempre prendere (cfr. art. 678) il modulo ρ di h abbastanza piccolo perchè il modulo di questa somma riesca inferiore ad r.

Allora dalla diseguaglianza precedente seguirà *a fortiori:*

$$\frac{\operatorname{mod} f(\alpha+h)}{\operatorname{mod} f(\alpha)} < 1 ,$$

cioè :

$$\operatorname{mod} f(\alpha+h) \lesseqgtr \operatorname{mod} f(\alpha)$$

il che è in contraddizione colla (2) la quale, dovendo sussistere per ogni valore di x, ci da invece per $x=\alpha+h$:

$$\operatorname{mod} f(\alpha+h) \lesseqgtr \operatorname{mod} f(\alpha).$$

Resta dunque esclusa la possibilità della (3) e per conseguenza resta dimostrato quanto si voleva, cioè che

$$\operatorname{mod} f(\alpha) = 0 ,$$

ossia che α è una radice dell' equazione proposta.

§ 2.° — Dimostrazione del Postulato ammesso nel § precedente (*).

902. La prima dimostrazione del teorema fondamentale che *ogni equazione di grado* n *ammette almeno una radice reale o complessa* è stata data da *d'Alembert*. Dopo di lui ne ha dato diverse dimostrazioni *Gauss*. Fra tutte queste e le altre che se ne diedero appresso si distingue però per semplicità e facilità ad essere compresa quella di *Legendre* modificata poi da *Cauchy*, che si trova data da quest'ultimo nel suo trattato classico sull'analisi algebrica (**). Questa è appunto, salvo lievissimi cambiamenti, la dimostrazione da noi data nel § precedente.

Questa dimostrazione non potrebbe però ritenersi come assolutamente rigorosa, inquantochè in essa si ammette implicitamente come evidente il Postulato: *esiste sempre un certo valore* $x=\alpha$, *per il quale* mod$f(z)$ *ha il minimo valore possibile.*

Il *Lipschitz* nel suo *Lehrbuch der Analysis*, per evitare questo inconveniente, ha modificato radicalmente la dimostrazione di Cauchy. È riuscito così a renderla assolutamente rigorosa, rendendola però al tempo stesso troppo prolissa e complicata.

Pertanto noi abbiamo conservata press'a poco inalterata la dimostrazione di Cauchy, riservandoci di dimostrare separatamente in modo assolutamente rigoroso il postulato che si è premesso. La dimostrazione che siamo per dare è tanto più utile, inquantochè essa vale non solamente per il caso in cui $f(z)$ sia una funzione intera, ma, generalmente, per ogni funzione $f(z)$ che goda della proprietà di essere continua e della proprietà che mod$f(z)$ superi una quantità positiva k assegnata, per tutti i valori abbastanza grandi di mod$z$.

(*) Chi vuole potrà tralasciare questo § ammettendo il postulato.
(**) *Cauchy: Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, Paris 1821.

903. Quando diciamo che una funzione $f(z)$ della variabile complessa $z = x + iy$ è continua in un certo valore a di z, intendiamo significare (precisamente come all'art. 673 per la continuità delle funzioni di una variabile reale) che la diseguaglianza:

$$\mathrm{mod}\{f(z) - f(a)\} < \delta ,$$

in cui δ è un numero positivo da fissarsi a piacere, è soddisfatta per tutti i valori di z abbastanza vicini ad x; cioè per

$$\mathrm{mod}\{z - a\} < \varepsilon ,$$

essendo ε un numero reale positivo da determinarsi opportunamente, appenachè sia stato fissato δ.

Ciò posto, che la funzione razionale intera $f(z)$ sia continua in ogni punto del campo della variabile complessa z, risulta da una dimostrazione che è quì inutile ripetere perchè affatto identica a quella data all' art. 678 per variabili reali.

È invece importante di aggiungere che se:

$$f(z) = f(x + iy) = u(x , y) + i \cdot v(x , y)$$

è la $f(z)$ decomposta nelle sue parti reale ed imaginaria (cosicchè $u(x , y)$ e $v(x , y)$ sono funzioni reali delle due variabili reali x ed y) ciascuna delle due funzioni $u(x , y)$ e $v(x , y)$ e quindi anche la funzione:

$$\mathrm{mod} f(z) = \sqrt{[u(x , y)]^2 + [v(x , y)]^2}$$

saranno funzioni continue (cfr. art. 709) delle due variabili reali x ed y. È questa una conseguenza affatto ovvia della continuità di $f(z)$.

904. Che poi la funzione intera:

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n$$

goda della proprietà che *per tutti i valori abbastanza grandi di* mod$z$ *il valore di* mod$f(z)$ *superi il numero fissato ad arbitrio* K, si riconosce facilmente osservando che $f(z)$ si può anche scrivere sotto la forma seguente:

$$f(z) = z^n \left\{ a_0 + a_1 \left(\frac{1}{z}\right) + a_2 \left(\frac{1}{z}\right)^2 + \ldots + a_n \left(\frac{1}{z}\right)^n \right\}.$$

Invero, facendo crescere indefinitamente mod$x$, la frazione $\frac{1}{z}$ tenderà al valore zero; onde la quantità fra parentesi ha per limite il numero finito e diverso da zero a_0, quando mod$z$ cresce all'infinito, nel mentre che il fattore esterno z^n diverrà in valore assoluto infinitamente grande.

È dunque chiaro che mod$f(z)$ diverrà infinitamente grande quando mod$z$ cresca all'infinito.

905. Venendo ora al postulato in questione, cominceremo dal dimostrare che:

(A). ***Esiste necessariamente un numero determinato reale e***

positivo H, *tale che, per ogni valore reale o complesso di* z, *si abbia* $mod f(z) \overline{\gtrless} H$, *è tale inoltre che, data una quantità positiva* ε *piccola a piacere purchè non nulla, esista sempre qualche valore di* z *per il quale sia*

$$mod f(z) - H < \varepsilon.$$

Si imagini infatti costruita in un modo qualunque una successione indefinita di numeri positivi piccolissimi e diversi da zero $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$ tali da aversi:

$$\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0$$

e si cominci dal considerare la progressione aritmetica:

$$0, \varepsilon_1, 2\varepsilon_1, 3\varepsilon_1, 4\varepsilon_1, \ldots$$

i cui termini dividono l'intero campo dei numeri positivi in tanti piccoli intervalli di grandezza ε.

Imaginando di esaminare successivamente col pensiero ciascuno di questi intervalli, si concepirà l'esistenza di un certo intervallo il quale godrà, *per il primo*, della proprietà di contenere qualche possibile valore di $mod f(z)$.

Sia questo l'intervallo compreso fra $\mu\varepsilon_1$ e $(\mu+1)\varepsilon_1$, cosicchè si avrà per ogni valore di z:

$$mod f(z) \overline{\gtrless} \mu\varepsilon_1,$$

ma esisterà certamente almeno un valore z tale da aversi:

$$mod f(z) \overline{\lessgtr} (\mu+1)\varepsilon_1.$$

Si imaginino ora inseriti fra i due numeri $\mu\varepsilon_1$ e $(\mu+1)\varepsilon_1$ altri numeri $a_2, a_3, \ldots, a_{m-1}$ in modo che la progressione:

$$a_1 = \mu\varepsilon_1, a_2, a_3, \ldots, a_{m-1}, a_m = (\mu+1)\varepsilon_1$$

venga a dividere l' intervallo ora considerato in nuovi intervalli la cui grandezza non superi ε_2, e supponiamo che *il primo* di questi nuovi intervalli nel quale cade qualche possibile valore di $mod f(x)$ sia quello compreso fra a_i ed a_{i+1}. Allora si divida nuovamente l'intervallo compreso fra a_i ed a_{i+1} mediante una terza progressione:

$$b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots,$$

in nuovi intervalli ciascuno di grandezza non superiore ad ε_3, e siano b_j e b_{j+1} i due termini che individuano il primo di questi intervalli nel quale cade qualche possibile valore di $mod f(x)$.

Così procedendo indefinitamente si verranno a formare due classi di numeri:

$$a_1, a_i, b_j, c_k, \ldots$$
$$a_m, a_{i+1}, b_{j+1}, c_{k+1}, \ldots$$

le quali godranno evidentemente della proprietà di essere ogni numero della prima inferiore ad ogni numero della seconda e di

soddisfare alle condizioni:

$$a_m - a_1 = \varepsilon_1 \ , \ a_{i+1} - a_i \gtreqqless \varepsilon_2 \ , \ b_{j+1} - b_j \gtreqqless \varepsilon_3 \ , \ c_{h+1} - c_h \gtreqqless \varepsilon_4 \ \ldots .$$

Esisterà dunque (art. 548) un numero *perfettamente determinato* H:

$$H = (a_1 \ , a_i \ , b_j \ , c_h \ , \ldots ; a_m \ , a_{i+1} \ , b_{j+1} \ , c_{h+1} \ , \ldots)$$

individuato da queste due classi di numeri; e tale numero H godrà evidentemente delle proprietà richieste nell'enunciato (A).

906. (B). *Se* H *è il numero considerato nell'enunciato* (A), *esisterà sempre almeno un valore speciale* $x = \alpha$ *della variabile* x *per il quale si abbia precisamente* mod$f(\alpha) = H$.

In altri termini si tratta ora di dimostrare che il limite inferiore H non solamente può essere avvicinato indefinitamente da mod$f(x)$ dando ad x valori opportunamente scelti, ma può altresì essere effettivamente *raggiunto* per uno speciale e determinato valore di x.

Invero, per quanto si è osservato sopra (art. 904) esisterà un cerchio, col centro nell'origine del piano rappresentativo della variabile complessa $z = x + iy$, di raggio R abbastanza grande perchè la differenza:

$$\text{mod} f(z) - H$$

si conservi superiore ad un numero positivo determinato diverso da zero per tutti i punti z esterni al cerchio. Pertanto quei punti z mediante i quali, secondo l'enunciato (A), mod$f(z)$ può farsi differire da H di tanto poco quanto si voglia, esisteranno e dovranno esclusivamente cercarsi nell'interno o sul contorno del cerchio, cioè del campo definito dalla condizione:

$$\sqrt{x^2 + y^2} \gtreqqless R.$$

Esisterà dunque (art. 712) nell'interno o sul contorno di questo campo almeno un punto (x, y) per il quale sarà precisamente:

$$\text{mod} f(z) = H,$$

giacchè mod$f(z)$ è in ogni punto, sito nell'interno o sul contorno del campo stesso, funzione continua delle due variabili x ed y.

Il postulato si trova così completamente dimostrato.

§ 3.° — Ogni equazione di grado n ammette precisamente n radici distinte o non distinte.

907. Data la funzione intera del grado n in x:

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + x_n \ , \qquad (1)$$

sia α una radice, *che certamente esiste* (art. 900), dell'equazione:

$$f(x) = 0. \qquad (2)$$

Noi sappiamo (art. 493) che *in tale supposto il primo membro* f(x) *è divisibile esattamente per* $x - \alpha$; cosicchè si può porre, *identicamente rispetto ad* x,

$$f(x) = (x - \alpha) \cdot f_1(x), \qquad (3)$$

essendo $f_1(x)$ una certa funzione intera di x, del grado $n - 1$.

Considerando ora l'equazione $f_1(x) = 0$, che avrà certamente una radice β, si potrà porre allo stesso modo identicamente:

$$f_1(x) = (x - \beta) \cdot f_2(x) \qquad (4)$$

dove $f_2(x)$ è una funzione del grado $n - 2$ in x. Similmente, detta γ una radice di $f_2(x) = 0$, si avrà:

$$f_2(x) = (x - \gamma) \cdot f_3(x), \qquad (5)$$

e così di seguito, finchè si giungerà ad una funzione f_{n-1} di primo grado in x, per la quale si avrà:

$$f_{n-1}(x) = (x - \lambda) \cdot f_n(x) \qquad (6)$$

dove f_n è una funzione di grado zero in x, cioè una *costante* che indicheremo con C.

Moltiplicando ora membro a membro tutte le identità (3), (4), (5), . . . , (6) così ottenute e sopprimendo i fattori comuni ai due membri, resterà evidentemente l' identità:

$$f(x) = C \cdot (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) \ldots (x - \lambda). \qquad (7)$$

Richiamando l' espressione (1) di $f(x)$ ed eguagliando nella (7) i coefficienti della più alta potenza, x^n, di x nei due membri, si ha evidentemente $C = a_0$; onde scriveremo:

$$f(x) = a_0 \cdot (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) \ldots (x - \lambda). \qquad (8)$$

908. Dalla (8) si vede che: *la funzione intera* f(x), *del grado* n *in* x, *si può sempre decomporre nel prodotto di* n *fattori ciascuno di primo grado in* x *e precisamente nel prodotto di* n *fattori della forma* $x - h$ (*dove* h *è un numero reale o complesso*) *moltiplicati per una costante* a_0 *eguale al coefficiente di* x^n *in* f(x).

Questa decomposizione si può effettuare *in un unico modo*. Supponiamo infatti che si avesse anche:

$$f(x) = a_0(x - \alpha')(x - \beta')(x - \gamma') \ldots (x - \lambda').$$

Sarà allora identicamente:

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) \ldots (x-\lambda) = (x-\alpha')(x-\beta')(x-\gamma') \ldots (x-\lambda'). \qquad (9)$$

Ponendo in questa identità $x = \alpha'$, il secondo membro si annulla; onde si dovrà annullare anche il primo, cioè essere:

$$(\alpha' - \alpha)(\alpha' - \beta)(\alpha' - \gamma) \ldots (\alpha' - \lambda) = 0.$$

Ma, il prodotto di più numeri complessi non potendo esser nullo senza che lo sia almeno uno dei fattori, dovrà essere p. es.:

$$\alpha' - \alpha = 0,$$

cioè $\alpha'=\alpha$; onde la (9) si potrà semplificare e resterà l' identità:

$$(x-\beta)(x-\gamma)\ldots(x-\lambda)=(x-\beta')(x-\gamma')\ldots(x-\lambda')$$

da cui si dedurrà similmente, ponendo $x=\beta'$, che dev'essere p. es. $\beta=\beta'$, onde resterà poi l' identità:

$$(x-\gamma)\ldots(x-\lambda)=(x-\gamma')\ldots(x-\lambda'),$$

ecc. ecc. Si conclude dunque che, *fatta astrazione dall' ordine*, i numeri $\alpha', \beta', \gamma', \ldots, \lambda'$ coincidono precisamente coi numeri $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$.

Dunque: *la decomposizione sopra accennata si può soltanto effettuare in un unico modo.*

909. Dall' identità (8):

$$f(x)=a_0(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots(x-\lambda) \qquad (8)$$

segue evidentemente che $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ sono altrettante radici dell'equazione $f(x)=0$, poichè il secondo membro si annulla evidentemente per $x=\alpha, x=\beta, \ldots, x=\lambda$. Segue inoltre che sono queste le sole radici che può ammettere l'equazione $f(x)=0$. Infatti, se ε sia una radice, si avrà $f(\varepsilon)=0$, cioè per l'identità (8):

$$a_0\cdot(\varepsilon-\alpha)(\varepsilon-\beta)(\varepsilon-\gamma)\ldots(\varepsilon-\lambda)=0,$$

onde, poichè a_0 è diverso da zero, dovrà essere nullo uno almeno dei fattori $\varepsilon-\alpha, \varepsilon-\beta, \ldots$; cioè ε dovrà coincidere con una delle radici $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$.

910. Gli n numeri $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ per i quali si verifica l'identità (8), non sono sempre necessariamente tutti distinti. Ora, se fra i numeri $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ ve ne siano p che coincidono col numero α, si dice (cfr. art. 696) che α è una radice *multipla* di ordine p o di *multiplicità* p, o più semplicemente si dice che l'equazione $f(x)=0$ ammette p radici eguali ad α. In tal caso l' identità (8) prende la forma:

$$f(x)=a_0(x-\alpha)^p\cdot(x-\beta)\ldots(x-\delta),$$

cioè $f(x)$ è uguale ad $(x-\alpha)^p$ moltiplicato per una funzione intera di grado $n-p$ in x. Cioè: *si dice che* α *è radice multipla di grado* p *dell'equazione* $f(x)=0$, *ovvero che* $f(x)=0$ *ha* p *radici eguali ad* α, *quando il primo membro* $f(x)$ *è divisibile esattamente per la potenza* $(x-\alpha)^p$.

911. Riassumendo concludiamo che: *se l' equazione* $f(x)=0$ *di grado* n *in* x *ha* t *radici distinte* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t$ *risp. dei gradi di multiplicità* $p_1, p_2, \ldots, p_t$, *si ha identicamente*:

$$f(x)=a_0(x-\alpha_1)^{p_1}(x-\alpha_2)^{p_2}(x-\alpha_3)^{p_3}\ldots(x-\alpha_t)^{p_t} \qquad (10)$$

dove:

$$p_1+p_2+p_3+\ldots+p_t=n$$

e che una cosiffatta decomposizione di $f(x)$ non si può effettuare in altro modo.

Contando ogni radice dell'equazione $f(x)=0$ tante volte come radice quanto è il suo grado di multiplicità, si può dunque anche enunciare il teorema che *ogni equazione di grado* n *ammette sempre* n *radici eguali o distinte.*

912. Corollario. — *Affinchè un'equazione del grado* n *abbia* $n-\mu$ *radici, uguali o distinte, diverse da zero, è necessario e sufficiente che gli ultimi* μ *coefficienti di* f(x) *siano tutti nulli.*

Dalla (10) appare infatti che, per essere $\alpha_1=0$ e $p_1=\mu$, dev'essere la $f(x)$ esattamente divisibile per x^μ.

913. È appena necessario di far rilevare che il teorema dell'articolo 698 sussiste inalterato, senza che occorra modificarne in alcun modo la dimostrazione, anche per radici complesse di equazioni a coefficienti reali o complessi.

Cioè: *affinchè* α *sia radice multipla del grado* k *dell'equazione* $f(x)=0$, *è necessario e sufficiente che esso sia anche radice delle prime* $k-1$ *equazioni derivate:* $f'(x)=0$, $f''(x)=0$, . . . , $f^{(k-1)}(x)=0$ o anche, che è la stessa cosa, *è necessario e sufficiente che esso sia radice multipla del grado* $k-1$ *della prima derivata* $f'(x)=0$.

914. È invece importante richiamare l'attenzione sul seguente teorema: *affinchè un'equazione* $f(x)=0$ *abbia soltanto radici semplici, è necessario e sufficiente che le due funzioni* f(x) *ed* f'(x) *siano prime fra loro;* giacchè questo teorema non si sarebbe potuto enunciare, perchè non esatto, finchè non si consideravano che le radici reali delle equazioni a coefficienti reali.

Invero, se $f(x)=0$ abbia α come radice multipla, le due funzioni $f(x)$ ed $f'(x)$ avranno, per quanto si è già stabilito, il divisore comune di primo grado $x-\alpha$, cioè non saranno prime fra loro. Ma si ha ora reciprocamente che, se $f(x)$ ed $f'(x)$ hanno il divisore comune $\psi(x)$, l'equazione $\psi(x)=0$ avrà una radice reale o complessa α, cosicchè $\psi(x)$ e quindi anche $f(x)$ ed $f'(x)$ ammetteranno il divisore comune $x-\alpha$.

915. Chiuderemo questo § col seguente teorema che ci tornerà utile in seguito: *se* A *è il massimo modulo dei coefficienti di una equazione qualunque*

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \qquad (11)$$

ed α *una radice qualunque, reale o complessa, di quest'equazione, si ha sempre*:

$$\frac{\mathrm{mod}\,a_n}{A+\mathrm{mod}\,a_n} < \alpha < \frac{A+\mathrm{mod}\,a_0}{\mathrm{mod}\,a_0}. \qquad (12)$$

Se fosse infatti: $\mathrm{mod}\,\alpha \leqq \dfrac{\mathrm{mod}\,a_n}{A+\mathrm{mod}\,a_n}$, se ne dedurrebbe (**art. 680**):

$$\mathrm{mod}\{a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\alpha\} < \mathrm{mod}\,a_n\,,$$

il che è assurdo, poichè, essendo α radice della (11), si ha invece:

$$a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\alpha = -a_n\,,$$

onde:

$$\mathrm{mod}\{a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\alpha\} = \mathrm{mod}a_n.$$

La prima delle diseguaglianze (12) è dunque dimostrata. Per dimostrare la seconda, osserviamo che, se α è radice della (11), sarà $\frac{1}{\alpha}$ radice dell' equazione:

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0,$$

cosicchè applicando a quest'equazione la prima diseguaglianza già dimostrata, si avrà:

$$\frac{\mathrm{mod}a_0}{\mathrm{A} + \mathrm{mod}a_0} < \mathrm{mod}\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{1}{\mathrm{mod}\alpha}$$

d'onde si trae: $\mathrm{mod}\alpha < \frac{\mathrm{A} + \mathrm{mod}a_0}{\mathrm{mod}a_0}$, che è appunto la seconda diseguaglianza (12).

Note ed Esercizi.

1. Nel Cap. XI (art. 827) abbiamo già trovato tutte le radici dell'equazione binomia $x^n - 1 = 0$ per $n = 1, 2, 3, 4$. Verificare quindi che si ha:

$$(x^3 - 1) = (x - 1)\left(x + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

ed

$$(x^4 - 1) = (x - 1)(x - i)(x + 1)(x + i).$$

2. Decomporre in fattori di 1° grado le funzioni:

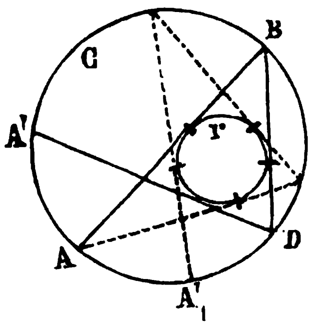
$$3x^4 - 6x^2 + 8 \;,\; x^6 - 1 \;,\; x^8 - 1.$$

3. Vi sono dei problemi *geometrici*, chiamati talvolta *porismi*, per i quali si verifica il fatto singolare, che essi non ammettono in generale alcuna soluzione; affinchè ne ammettano qualcuna, è necessario che i dati del problema soddisfino a certe condizioni particolari, ed in tal caso essi ne ammettono *sempre* un numero infinito. Così ad esempio il problema di costruire un triangolo (o più generalmente un poligono di n lati) inscritto in un cerchio dato e circoscritto ad un altro non ammette in generale soluzione; ma, se esiste un triangolo inscritto in un cerchio e circoscritto ad un altro, ne esisteranno infiniti, e precisamente ogni punto del primo cerchio si potrà assumere come vertice di un triangolo che soddisfa al problema. La spiegazione adeguata di simili paradossi geometrici si ha appunto nel teorema dimostrato in questo §. L' incognita x del problema geometrico trattato per via analitica dovrà soddisfare ad un' equazione algebrica di un certo grado n, le cui n radici darebbero ordinariamente le n possibili soluzioni del problema. Nel caso del porisma si verifica però il fatto che tale equazione di grado n è *sempre* soddisfatta da n valori speciali i quali, se soddisfano il problema algebrico, non rappresentano però che soluzioni *improprie* del problema geometrico (p. es. triangoli con lati sovrapposti); onde è chiaro che il problema geometrico non avrà *in generale* vere e proprie soluzioni. Qualora però esso ne abbia una, l'equazione sopraddetta avrà, oltre le n radici corrispondenti alle so-

luzioni improprie, anche una nuova radice e quindi un numero di radici superiore al suo grado, il che è assurdo a meno che l'equazione sia soddisfatta identicamente. Ma in tal caso ogni valore x soddisferà alla equazione e quindi anche il problema geometrico ammetterà infinite soluzioni.

4. Per meglio chiarire l'importante principio sopra esposto proponiamoci di dimostrare che *non esistono triangoli inscritti in una data conica* C *e circoscritti ad un'altra data conica* Γ, *ovvero ne esistono infiniti.*

Preso a piacere sulla conica C un punto A, si conduca per A una tangente alla conica Γ fino ad incontrare nuovamente la C in B; dal punto B si conduca ora la seconda tangente alla conica Γ fino ad incontrare nuovamente C nel punto D e da D la seconda tangente a Γ fino ad incontrare nuovamente C in A'. Affinchè il punto A fosse il vertice di un triangolo che risolvesse il problema, converrebbe che coincidesse con A l'uno o l'altro dei due punti A' che si possono far corrispondere ad A nel modo indicato. Intanto, poichè ad ogni punto A corrispondono così due punti A' e reciprocamente, i parametri λ e λ' di questi due punti (nella rappresentazione parametrica *univoca* dei punti di C) saranno legati da una relazione algebrica di 2° grado così rispetto a λ che rispetto a λ'. Facendo in tale relazione $\lambda' = \lambda$, si avrà così per l'incognita λ del problema una equazione del *quarto grado*.



Ora una semplice ispezione alla figura ci fa subito vedere che il problema geometrico ammette *sempre* precisamente quattro soluzioni improprie corrispondenti alle quattro tangenti comuni alle due coniche. Siano B_1, B_2, B_3, B_4 i punti nei quali queste tangenti comuni toccano la C e da ogni punto B_i si tiri la seconda tangente a Γ che incontri nuovamente C in A_i. Si riconoscerà subito che il triangolo che ha un vertice in A_i e gli altri due infinitamente vicini sovrapposti in B_i è una soluzione impropria del problema; poichè prendendo come punto di partenza il punto A_i, uno dei suoi due corrispondenti coincide evidentemente con A_i, coincidendo in tal caso D con B.

Lasciamo al lettore l'analoga determinazione delle quattro soluzioni improprie per il problema analogo relativo ad un poligono di k lati.

5. L'equazione $x^5 - 12x^4 + 56x^3 - 126x^2 + 135x - 54 = 0$ è soddisfatta da $x = 3$. Riconoscere, mediante l'esame delle derivate, che questa radice è tripla.

6. Essendo $x_1, x_2, \ldots, x_n$ le n radici dell'equazione:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

riconoscere che:

$$\frac{f^{(n-r)}(x)}{\lfloor n-r} = a_0\sum(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_r),$$

dove la sommatoria va estesa agli $\binom{n}{r}$ prodotti delle differenze $x - x_1$, $x - x_2, \ldots, x - x_n$ combinate r ad r.

7 La risoluzione numerica delle equazioni nel campo complesso, cioè la determinazione numerica delle radici complesse di un'equazione $f(x)=0$, a coefficienti dati reali o complessi, si riconduce alla risoluzione numerica, da noi già trattata al Capitolo X, delle equazioni nel campo reale.

Posto infatti $z = x + iy$, si abbia, separando in $f(z)$ la parte reale da

quella imaginaria: $f(x+iy)=\varphi(x\,,y)+i\psi(x\,,y)$. Se z è radice dell'equazione, dovrà essere:

$$\varphi(x\,,y)=0 \quad \text{e} \quad \psi(x\,,y)=0\,,$$

e si tratterà di trovare le coppie di valori reali di x e y che soddisfano simultaneamente a queste due equazioni che hanno i loro coefficienti tutti reali. Ora ciò si riconduce, come vedremo in seguito (Capitolo XIII) alla determinazione delle radici reali di un'equazione a coefficienti reali $R(x)=0$ dedotta mediante l'eliminazione di y dalle due superiori equazioni $\varphi(x, y)=0$, $\psi(x, y)=0$.

§ 4.° — Relazioni fondamentali fra le radici ed i coefficienti di un'equazione.

916. Se α, β, γ, ..., λ sono le n radici dell'equazione:

$$f(x)\equiv x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots+p_n=0, \tag{1}$$

si ha identicamente, come si è visto al § prec.:

$$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots(x-\lambda). \tag{2}$$

Sviluppando ora il prodotto nel secondo membro ed ordinando il risultato secondo le potenze decrescenti di x, si trova:

$$\begin{aligned}(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots(x-\lambda)&=x^n\\ &-(\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\lambda)x^{n-1}\\ &+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma+\ldots\quad)x^{n-2}\\ &-(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\ldots\quad)x^{n-3}\\ &+\ldots\\ &+(-1)^n\alpha\beta\gamma\ldots\lambda,\end{aligned} \tag{3}$$

come risulta dalla formola (6) dell'art. 218 ponendo in essa $a_1=-\alpha$, $a_2=-\beta$, $a_3=-\gamma$, ..., $a_n=-\lambda$, e $b=x$.

In questo sviluppo il coefficiente di x^{n-k} è la somma dei prodotti delle α, β, ..., λ combinate k a k presa col segno + o −, secondochè k è pari o dispari.

Il secondo membro della (3) dovrà dunque coincidere con la funzione intera: $x^n+p_1x^{n-1}+\ldots+p_n$.

Eguagliando i coefficienti delle potenze simili troviamo così le relazioni seguenti:

$$\begin{aligned}p_1&=-(\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\lambda)\\ p_2&=+(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma+\ldots\quad)\\ p_3&=-(\alpha\beta\gamma+\alpha\gamma\delta+\ldots\quad)\\ p_4&=+(\alpha\beta\gamma\delta+\ldots\quad)\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ p_n&=(-1)^n\cdot\alpha\beta\gamma\ldots\lambda,\end{aligned} \tag{4}$$

cioè: *se un'equazione algebrica di grado* n *abbia il coefficiente di* x^n *uguale all'unità,* (*) *la somma degli* $\binom{n}{k}$ *risultati che si ottengono moltiplicando le* n *radici a* k *a* k, *è uguale al coefficiente di* x^{n-k}, *preso però col segno* ± *secondochè* k *è dispari o pari. In particolare la somma delle radici sarà uguale al coefficiente del secondo termine preso con segno contrario ed il prodotto sarà eguale al termine noto preso col segno + o —, secondochè il grado* n *dell'equazione è pari ovvero dispari.*

917. Di qui si deduce che è sempre facile di costruire l'equazione che ha per radici certi numeri dati. Così p. es. volendosi costruire l'equazione di terzo grado:

$$x^3 + p_1x^2 + p_2x + p_3 = 0$$

che ha per radici i tre numeri 1, $-\frac{1}{2}$, 2, si dovrà prendere

$$p_1 = -\left(1 - \frac{1}{2} + 2\right) = -\frac{5}{2}$$

$$p_2 = \left(-1\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot 2 - \frac{1}{2}\cdot 2\right) = \frac{1}{2}$$

$$p_3 = -\left(1\cdot 2\cdot\frac{-1}{2}\right) = 1.$$

Si trova così l'equazione:

$$x^3 - \frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1 = 0$$

o, che è lo stesso,

$$2x^3 - 5x^2 + x + 2 = 0.$$

918. Le relazioni fra le radici $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ dell'equazione:

$$F(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n = 0 \qquad (5)$$

ed i coefficienti $a_0, a_1, a_2, \ldots$, anzichè per mezzo delle funzioni simmetriche, così dette *elementari,* testè incontrate:

$$\Sigma\alpha\ ,\ \Sigma\alpha\beta\ ,\ \Sigma\alpha\beta\gamma\ ,\ \ldots$$

si possono anche stabilire in modo semplice per mezzo delle *somme di potenze simili:*

$$\begin{aligned} S_1 &= \alpha + \beta + \gamma + \ldots + \lambda \\ S_2 &= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \ldots + \lambda^2 \\ S_3 &= \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \ldots + \lambda^3 \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \qquad (6)$$

che si chiamano anche funzioni simmetriche *semplici* (cfr. art. 522).

(*) Se l'equazione data non avesse il primo coefficiente a_0 eguale all'unità, basterebbe dividerla per a_0 ed essa prenderebbe appunto la forma $x^n + p_1x^{n-1} + \ldots + p_n = 0$.

Per trovare le relazioni che legano i coefficienti a_0, a_1, a_2, ... alle S_0, S_1, S_2, . . . , partiamo dall' identità:

$$F(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+ \dots +a_n=a_0(x-\alpha)(x-\beta) \dots (x-\lambda)$$

che derivata rispetto ad x ci dà (art. 692) per la regola della derivazione di un prodotto:

$$\begin{aligned} F'(x) &= na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \dots + a_{n-1} \\ &= \frac{F(x)}{x-\alpha} + \frac{F(x)}{x-\beta} + \frac{F(x)}{x-\gamma} + \dots + \frac{F(x)}{x-\lambda}. \end{aligned} \tag{7}$$

Ma per la regola di Ruffini si ha, poichè $F(\alpha) = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{F(x)}{x-\alpha} &= a_0x^{n-1}+(a_0\alpha+a_1)x^{n-2}+(a_0\alpha^2+a_1\alpha+a_2)x^{n-3}+\dots \\ &\quad +(a_0\alpha^{n-1}+a_1\alpha^{n-2}+\dots+a_{n-1}), \end{aligned}$$

onde, sostituendo in (7), si ha l' identità:

$$\begin{aligned} &na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + (n-2)a_2x^{n-3} + \dots + a_{n-1} \\ &= a_0x^{n-1} + (a_0\alpha + a_1)x^{n-2} + (a_0\alpha^2 + a_1\alpha + a_2)x^{n-3} + \dots \\ &+ a_0x^{n-1} + (a_0\beta + a_1)x^{n-2} + (a_0\beta^2 + a_1\beta + a_2)x^{n-3} + \dots \\ &+ a_0x^{n-1} + (a_0\gamma + a_1)x^{n-2} + (a_0\gamma^2 + a_1\gamma + a_2)x^{n-3} + \dots \\ &+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &+ a_0x^{n-1} + (a_0\lambda + a_1)x^{n-2} + (a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2)x^{n-3} + \dots, \end{aligned}$$

ossia raccogliendo nel secondo membro i coefficienti di una stessa potenza di x e tenendo presenti le (6):

$$\begin{aligned} &na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+(n-2)a_2x^{n-3}+ \dots +a_{n-1} \\ &=na_0x^{n-1}+(a_0S_1+na_1)x^{n-2}+(a_0S_2+a_1S_1+na_2)x^{n-3}+ \dots \\ &\quad +(a_0S_{n-1}+a_1S_{n-2}+ \dots +na_{n-1}). \end{aligned}$$

Eguagliando ora nei due membri di questa identità i coefficienti delle potenze omonime di x, si trovano le relazioni:

$$\begin{aligned} (n-1)a_1 &= a_0S_1 + na_1 \\ (n-2)a_2 &= a_0S_2 + a_1S_1 + na_2 \\ (n-3)a_3 &= a_0S_3 + a_1S_2 + a_2S_1 + na_3 \\ &\dots\dots\dots\dots \\ a_{n-1} &= a_0S_{n-1} + a_1S_{n-2} + a_2S_{n-3} + \dots + na_{n-1} \end{aligned}$$

o anche, portando tutto nei secondi membri:

$$\left\{ \begin{aligned} &a_0S_1 + a_1 = 0 \\ &a_0S_2 + a_1S_1 + 2a_2 = 0 \\ &a_0S_3 + a_1S_2 + a_2S_1 + 3a_3 = 0 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &a_0S_{n-1} + a_1S_{n-2} + a_2S_{n-3} + \dots + (n-1)a_{n-1} = 0. \end{aligned} \right. \tag{8}$$

Queste formole sono conosciute ordinariamente sotto il nome di formole di *Newton*.

919. Se l'equazione, di cui $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ sono radici, sia stata ridotta (mediante la divisione per a_0) alla forma:

$$x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_{n-1} x + p_n = 0, \tag{9}$$

e formole (8) prendono la forma più semplice:

$$\left\{\begin{array}{l} S_1 + p_1 = 0 \\ S_2 + p_1 S_1 + 2p_2 = 0 \\ S_3 + p_1 S_2 + p_2 S_1 + 3p_3 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ S_{n-1} + p_1 S_{n-2} + \ldots + (n-1)p_{n-1} = 0 \\ S_n + p_1 S_{n-1} + \ldots + p_{n-1} S_1 + np_n = 0. \end{array}\right. \tag{10}$$

L'ultima equazione aggiunta si ottiene direttamente considerando che, per essere $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ radici dell'equazione (9), si ha:

$$\begin{array}{l} \alpha^n + p_1 \alpha^{n-1} + p_2 \alpha^{n-2} + \ldots + p_n = 0 \\ \beta^n + p_1 \beta^{n-1} + p_2 \beta^{n-2} + \ldots + p_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + p_2 \lambda^{n-2} + \ldots + p_n = 0 \end{array}$$

d'onde sommando membro a membro si ha appunto:

$$S_n + p_1 S_{n-1} + p_2 S_{n-2} + \ldots + np_n = 0.$$

Mediante le formole (10), dati i coefficienti $p_1, p_2, \ldots, p_n$, si calcoleranno successivamente i valori delle $S_1, S_2, \ldots, S_n$; cioè dalla prima si caverà il valore di S_1; sostituendo poi questo valore nella seconda si caverà S_2; sostituendo i valori trovati per S_1 ed S_2 nella terza si caverà S_3, e così di seguito.

Reciprocamente, date le radici $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$, si conosceranno le $S_1, S_2, \ldots, S_n$, e allora le formole (10) potranno servire a calcolare successivamente i coefficienti $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Si trovano così le espressioni seguenti:

$S_1 = -p_1$	$p_1 = -S_1$
$S_2 = p_1^2 - 2p_2$	$2p_2 = -S_2 + S_1^2$
$S_3 = -p_1^3 + 3p_1p_2 - 3p_3$	$6p_3 = -2S_3 + 3S_1S_2 - S_1^3$
$S_4 = p_1^4 - 4p_1^2p_2 + 4p_1p_3$	$24p_4 = -6S_4 + 8S_3S_1 - 6S_2S_1^2$
$+ 2p_2^2 - 4p_4$, ecc.	$+ 3S_2^2 + S_1^4$, ecc.

In queste formole vi è da notare che l'espressione di una qualunque somma S_k si compone di termini per ciascuno dei quali la somma degli *indici* di tutti i fattori p è costantemente uguale a k o, come si suol dire brevemente, di termini che sono tutti di *peso*

eguale a k. Cioè si ha un'espressione della forma:

$$S_k = \sum A \cdot p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n}$$

(essendo le A dei coefficienti numerici) colla condizione:

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \ldots + n\alpha_n = k.$$

Ciò è una conseguenza, evidentemente, dal fatto che in ogni singola formola del sistema (10) la somma degli indici delle S e delle p è costante ed eguale risp. ad 1, 2, 3,....

Si vede pure facilmente che il numero dei fattori $p_1, p_2, \ldots$ che entrano in ogni termine dell'espressione di S_k è sempre uguale od inferiore a k, cosicchè S_k si presenta come una funzione intera di grado k nei coefficienti $p_1, p_2, p_3, \ldots$. Concludiamo dunque che S_k *si esprime con una funzione razionale intera (a coefficienti numerici interi), di grado* k *e di peso costante* k, *delle variabili* $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

920. Se moltiplichiamo l' eguaglianza:

$$\alpha^n + p_1\alpha^{n-1} + \ldots + p_{n-1}\alpha + p_n = 0, \qquad (11)$$

che esprime essere α una radice dell'equazione (9), per la potenza intera e positiva α^k, si avrà:

$$\alpha^{n+k} + p_1\alpha^{n+k-1} + \ldots + p_{n-1}\alpha^{k+1} + p_n\alpha^k = 0,$$

onde, sommando membro a membro questa uguaglianza colle eguaglianze analoghe che si potrebbero scrivere per le altre radici $\beta, \gamma, \ldots, \lambda$, si trova:

$$S_{n+k} + p_1 S_{n+k-1} + p_2 S_{n+k-2} + \ldots + p_{n-1} S_{k+1} + p_n S_k = 0.$$

Ponendo ora successivamente $k = 1, 2, 3, \ldots$, si ha così la seguente *prosecuzione* delle formole (10):

$$\left\{\begin{array}{l} S_{n+1} + p_1 S_n + p_2 S_{n-1} + \ldots + p_n S_1 = 0 \\ S_{n+2} + p_1 S_{n+1} + p_2 S_n + \ldots + p_n S_2 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right. \qquad (10')$$

921. Moltiplicando invece la (11) per le potenze $\alpha^{-1}, \alpha^{-2}, \ldots$ si otterrebbero similmente delle formole che combinate alle (10) darebbero il modo di calcolare le somme di potenze simili negative $S_{-1}, S_{-2}, \ldots$. Si giunge però più presto al risultato per altra via che indicheremo in seguito (cfr. Capitolo XIV, § 4.°).

Esercizi.

1. Costruire l'equazione di 4° grado che ha per radici i numeri $1+i$, $1-i$, 2, 3.

2. Se l'equazione a coefficienti reali $x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \ldots + p_n = 0$ ha tutte le sue radici reali, dev'essere $p_1^2 > 2p_2$. Infatti la somma dei quadrati delle radici sarà evidentemente un numero positivo.

3. Se $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sono le n radici di un'equazione binomia $x^n - A = 0$, dimostrare che:

$$S_k = \alpha_1{}^k + \alpha_2{}^k + \ldots + \alpha_n{}^k = 0$$

per $k < n$ e che $S_k = nA$ per $k = n$. Trovare poi il valore di S_k per qualunque valore intero e positivo di k.

4. Applicando al sistema delle prime k equazioni di primo grado (10) dell'art. 919 fra le k incognite $S_1, S_2, \ldots, S_k$ la risoluzione per determinanti, mostrare che si ottiene:

$$S_k = - \begin{vmatrix} 1 & p_1 & p_2 & p_3 & \ldots p_{k-1} \\ 0 & 1 & p_1 & p_2 & \ldots p_{k-2} \\ 0 & 0 & 1 & p_1 & \ldots p_{k-3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \cdot \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots p_1 \\ p_1 & 2p_2 & 3p_3 & 4p_4 & \ldots kp_k \end{vmatrix}$$

5. Dimostrare che *nell'espressione generale di* S_k *in funzione di* $p_1, p_2, p_3, \ldots$ *i termini di grado pari hanno tutti un coefficiente numerico positivo e quelli di grado dispari un coefficiente numerico negativo.*

Dimostrare poi, mediante la verifica *a posteriori* col metodo di induzione da k a $k+1$, che *l'espressione effettiva di* S_k *in funzione di* $p_1, p_2, \ldots, p_n$ *è data da*

$$S_k = k \cdot \sum \frac{(-1)^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n} \lfloor \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n - 1}{\lfloor \alpha_1 \lfloor \alpha_2 \lfloor \alpha_3 \ldots \lfloor \alpha_n} p_1{}^{\alpha_1} p_2{}^{\alpha_2} p_3{}^{\alpha_3} \ldots p_n{}^{\alpha_n}$$

dove la sommatoria va estesa a tutti i valori interi e positivi delle α, che soddisfano alle condizioni $\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + n\alpha_n = k$.

Questa formola notevolissima è stata trovata da *Waring* (*).

6. Dalla regola circa i segni enunciata sopra dedurre che per l'equazione:

$$x^n - a_1 x^{n-1} - a_2 x^{n-2} - \ldots - a_n = 0$$

in cui le a sono numeri reali positivi, le somme $S_1, S_2, S_3, \ldots$ hanno pure valori tutti reali e positivi.

§ 5.° — Delle funzioni simmetriche delle radici di un' equazione del grado n.

922. Teorema I. — *Se* $F(\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda)$ *è una funzione razionale intera delle* n *radici dell'equazione:*

$$x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_n = 0,$$

e se inoltre essa è simmetrica (art. 519) *rispetto alle* $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$

(*) *Meditationes algebraicae.* Ed. III, Cfr. *Serret: Cours d'Algèbre Supérieure*, Paris 1887; dove è riportata una dimostrazione *diretta* dovuta a *Lagrange* della formola di *Waring*. Una dimostrazione diretta molto semplice si deduce partendo da una formola nota del calcolo differenziale. Vedi: *Gomes Texeira: Démonstration d'une formule de Waring, Nouvelles Annales de Mathématiques;* Agosto 1880.

(*considerate come variabili arbitrarie*), *il suo valore si può esprimere come una funzione intera* (*a coefficienti numerici, razionali* (*) *e conosciuti*) *delle* $p_1, p_2, \ldots, p_n$ (*e dei coefficienti della* F).

Invero, nell'ipotesi fatta, la F si può scindere (art. 523) in una somma di somme multiple:

$$S_p = \Sigma \alpha^p \quad , \quad S_{p,q} = \Sigma \alpha^p \beta^q \quad , \quad S_{p,q,r} = \Sigma \alpha^p \beta^q \gamma^r \ , \ldots$$

moltiplicate per certi coefficienti composti coi coefficienti di F.

Fatto ciò, ciascuna delle somme multiple si esprimerà (art. 525) come una funzione intera (a coefficienti numerici interi) delle somme semplici $S_1, S_2, S_3 \ldots$.

Finalmente le $S_1, S_2, S_3 \ldots$ si esprimeranno, alla loro volta, (art. 919) come funzioni intere (a coefficienti numerici interi) delle $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Dopo ciò, l'espressione delle F si troverà evidentemente ridotta alla forma voluta.

923. Esempio 1.° — Sia l'equazione generale del 4° grado:

$$x^4 + p_1 x^3 + p_2 x^2 + p_3 x + p_4 = 0 \qquad (1)$$

le cui radici siano $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Proponiamoci di calcolare la funzione delle radici:

$$F = (\alpha\beta + \gamma\delta)(\alpha\gamma + \beta\delta)(\alpha\delta + \beta\gamma)$$

che a primo sguardo si riconosce essere simmetrica.

Svolgendo i prodotti si trova:

$$F = \{\alpha^3\beta\gamma\delta + \beta^3\alpha\gamma\delta + \gamma^3\alpha\beta\delta + \delta^3\alpha\beta\gamma\}$$
$$+ \{\alpha^2\beta^2\gamma^2 + \alpha^2\beta^2\delta^2 + \alpha^2\gamma^2\delta^2 + \beta^2\gamma^2\delta^2\} ,$$

sicchè si può scrivere:

$$F = \frac{1}{6} S_{3,1,1,1} + \frac{1}{6} S_{2,2,2}.$$

Ora si ha (art. 526, formola (3)):

$$S_{2,2,2} = S_2^3 - 3S_2S_4 + 2S_6 ,$$

cosicchè potrà calcolarsene il valore colle formole di Newton in funzione di p_1, p_2, p_3, p_4.

Quanto ad $S_{3,1,1,1}$, si potrebbe farne il calcolo col metodo generale; ma si giunge invece subito al risultato osservando che

$$\frac{1}{6} S_{3,1,1,1} = \alpha^3\beta\gamma\delta + \beta^3\alpha\gamma\delta + \gamma^3\alpha\beta\delta + \delta^3\alpha\beta\gamma = \alpha\beta\gamma\delta(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2)$$

Infatti, si è già visto che:

$$\alpha\beta\gamma\delta = p_4 \ , \ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = S_2 = p_1^2 - 2p_2 ,$$

(*) Si potrebbe anche dire *a coefficienti numerici interi*, come dimostreremo nelle Note (Cfr. la Nota 11.ma).

onde:

$$\frac{1}{6}\,S_{3,1,1,1} = p_4 p_1^2 - 2p_2 p_4.$$

924. Dall' esempio ora dato già appare come non sempre sia conveniente di ricorrere al metodo generale su cui si è fondata la dimostrazione del teorema dell' art. 922. Lo stesso calcolo di $S_{2,2,2}$ si può effettuare più speditamente osservando che si può scrivere:

$$\frac{1}{6}\,S_{2,2,2} = \alpha^2\beta^2\gamma^2 + \alpha^2\beta^2\delta^2 + \alpha^2\gamma^2\delta^2 + \beta^2\gamma^2\delta^2$$

$$= (\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta)^2$$

$$- 2\{\alpha^2\beta^2\gamma\delta + \alpha^2\gamma^2\beta\delta + \alpha^2\delta^2\beta\gamma + \beta^2\gamma^2\alpha\delta + \beta^2\delta^2\alpha\gamma + \gamma^2\delta^2\alpha\beta\}$$

$$= (\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta)^2$$

$$- 2\alpha\beta\gamma\delta\{\alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta\},$$

d' onde si ha immediatamente:

$$\frac{1}{6}\,S_{2,2,2} = p_3^2 - 2p_4 p_2.$$

Si conclude dunque che:

$$(\alpha\beta + \gamma\delta)(\alpha\gamma + \beta\delta)(\alpha\delta + \beta\gamma) = p_3^2 + p_1^2 p_4 - 4p_2 p_4.$$

925. Esempio 2.° — Se ε è una radice cubica complessa dell'unità, l'espressione:

$$(\alpha + \varepsilon\beta + \varepsilon^2\gamma)(\alpha + \varepsilon\gamma + \varepsilon^2\beta)$$

è simmetrica rispetto alle α, β, γ. Si trova infatti, sviluppando il prodotto e tenendo presente (art. 827) le relazioni:

$$\varepsilon + \varepsilon^2 = -1 \quad , \quad \varepsilon^4 = \varepsilon,$$

che

$$(\alpha + \varepsilon\beta + \varepsilon^2\gamma)(\alpha + \varepsilon\gamma + \varepsilon^2\beta) = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$$

$$= (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 3(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha).$$

926. Esempio 3.° — Anche la funzione:

$$(\alpha + \beta - \gamma - \delta)(\alpha + \gamma - \beta - \delta)(\alpha + \delta - \beta - \gamma) \tag{2}$$

è simmetrica rispetto alle α, β, γ, δ, benchè ciò non appaia a prima vista. Invero si riconosce subito che, scambiando fra di loro due lettere, uno dei tre fattori resta inalterato, nel mentre che gli altri due si permutano fra di loro cambiando al tempo stesso di segno.

I 64 termini a cui darebbe luogo lo sviluppo completo di (2) si compongono evidentemente:

1.° Dei 4 termini α^3, β^3, γ^3, δ^3, la cui somma espressa nei coefficienti di (1) è data (art. 919) da

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 = S_3 = -p_1^3 + 3p_1 p_2 - 3p_3.$$

2.° Di 36 termini del tipo $\pm\alpha^2\beta$; cioè di 12 termini del tipo $+\alpha^2\beta$ e di 24 del tipo $-\alpha^2\beta$. Infatti si vede subito che il termine $+\alpha^2\beta$ si presenta una volta nello sviluppo e il termine $-\alpha^2\beta$ due volte. Stante la simmetria già accertata del prodotto (2) possiamo dunque ritenere *a priori* che ognuno dei 12 termini di questo stesso tipo si presenterà del pari una volta col segno + e due volte col segno —. La somma di questi 36 termini è dunque (cfr. art. 525):

$$-S_{2,1} = -S_2S_1 + S_3 = p_1p_2 - 3p_3.$$

3.° Di 24 termini del tipo $\pm\alpha\beta\gamma$. Anche qui si accerta prima immediatamente che nello sviluppo si presenta 4 volte il termine $+\alpha\beta\gamma$ e due volte il termine $-\alpha\beta\gamma$. Si deve quindi ritenere *a priori* che accadrà lo stesso per gli altri tre termini simili $\alpha\beta\delta$, $\alpha\gamma\delta$, $\beta\gamma\delta$. La somma di questi 24 termini sarà dunque:

$$2(\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta) = -2p_3.$$

Si ha dunque per la funzione (2) l'espressione:

$$-p_1^3 + 4p_1p_2 - 8p_3. \tag{2}$$

927. Teorema II. — *Se* $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ *sono le* n *radici dell'equazione:*

$$x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \ldots + p_n = 0 \tag{3}$$

e $\Phi(\beta, \gamma, \ldots, \lambda)$ *una funzione intera e simmetrica delle* $n-1$ *radici* $\beta, \gamma, \ldots, \lambda$, *essa si potrà sempre esprimere come una funzione intera dell'altra radice* α *e delle* $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Infatti, dividendo il primo membro dell'equazione precedente per $x-\alpha$, si vede, per la regola di Ruffini, che $\beta, \gamma, \ldots, \lambda$ sono le radici dell'equazione di grado $n-1$:

$$x^{n-1} + (\alpha + p_1)x^{n-2} + (\alpha^2 + p_1\alpha + p_2)x^{n-3} + \ldots = 0. \tag{4}$$

Ma, per il teorema I (art. 922), essendo $\Phi(\beta, \gamma, \ldots, \lambda)$ una funzione simmetrica delle radici di quest'equazione, essa si potrà esprimere nel solito modo per mezzo dei suoi coefficienti:

$$\alpha + p_1 \ , \ \alpha^2 + p_1\alpha + p_2 \ , \ldots$$

cioè appunto, in ultima analisi, in funzione intera di α e delle $p_1, p_2, \ldots, p_n$; c. d. d.

928. Il teorema ora dimostrato ci fornisce un nuovo metodo per il calcolo di una funzione intera e simmetrica $F(\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda)$ delle radici della (3).

Considerando infatti, per un momento, la F come funzione simmetrica delle sole $\beta, \gamma, \ldots, \lambda$, la si potrà esprimere, per quanto si è visto, sotto la forma:

$$F(\alpha, \beta, \ldots, \lambda) = P_0\alpha^\mu + P_1\alpha^{\mu-1} + \ldots + P_\mu, \tag{5}$$

essendo le P delle funzioni intere delle $p_1, p_2, \ldots, p_n$. E scambiando in questa eguaglianza (che si può anche considerare come una identità rispetto alle $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, che sono contenute simme-

tricamente nelle P) la α successivamente con β, γ, ... si avrà parimenti:

$$F(\alpha, \beta, \ldots, \lambda) = P_0\beta^\mu + P_1\beta^{\mu-1} + \ldots + P_\mu \qquad (6)$$

. . . .

Dalle (5) e (6) sommate membro a membro si ha ora:

$$F(\alpha, \beta, \ldots, \lambda) = P_0S_\mu + P_1S_{\mu-1} + \ldots + P_{\mu-1}S_1 + nP_\mu,$$

ecc. ecc.

929. Si può anche evitare l'introduzione delle S_1, S_2, ..., S_μ osservando che, per essere α radice della (3), si ha:

$$\alpha^n = -(p_1\alpha^{n-1} + p_2\alpha^{n-2} + \ldots + p_n) \qquad (7)$$

e che, mediante l'uso ripetuto di questa formola, il grado di α nell'espressione (5) si potrà, occorrendo, abbassare successivamente di un'unità fino a ridurlo inferiore ad n. Fatto ciò si avrà, in luogo della (5):

$$F(\alpha, \beta, \ldots, \lambda) = Q_0\alpha^{n-1} + Q_1\alpha^{n-2} + \ldots + Q_n, \qquad (5)'$$

essendo anche le Q funzioni intere delle p_1, p_2, ..., p_n.

Senonchè ora le funzioni Q_0, Q_1, ..., Q_{n-1} dovranno riuscire identicamente nulle; poichè in caso contrario l'equazione di grado $n-1$ in z:

$$Q_0z^{n-1} + Q_1z^{n-2} + \ldots + Q_{n-1}z + [Q_n - F(\alpha, \beta, \ldots, \lambda)] = 0$$

ammetterebbe le n radici $z = \alpha$, β, ..., λ; cioè più radici del suo grado, il che è assurdo.

Resterà dunque semplicemente:

$$F(\alpha, \beta, \ldots, \lambda) = Q_n$$

con che la F si troverà già espressa colle p_1, ..., p_n.

930. Esempio 4.° — Come applicazione del metodo cui si è ora accennato, calcoleremo nuovamente la funzione simmetrica (2), che designeremo per brevità con F, delle radici della (1).

Poichè $\alpha + \beta + \gamma + \delta = -p_1$, si può anche scrivere:

$$F = -8\left(-\alpha - \frac{1}{2}p_1 - \beta\right)\left(-\alpha - \frac{1}{2}p_1 - \gamma\right)\left(-\alpha - \frac{1}{2}p_1 - \delta\right),$$

cosicchè, se nell'identità:

$$x^3 + (\alpha+p_1)x^2 + (\alpha^2+p_1\alpha+p_2)x + \alpha^3+p_1\alpha^2+p_2\alpha+p_3 = (x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)$$

si sostituisca $-\alpha - \frac{1}{2}p_1$ in luogo di x, viene:

$$F = -8\left\{\left(-\alpha - \frac{p_1}{2}\right)^3 + \left(\alpha + p_1\right)\left(-\alpha - \frac{p_1}{2}\right)^2 + \right.$$

$$\left.\left(\alpha^2 + p_1\alpha + p_2\right)\left(-\alpha - \frac{p_1}{2}\right) + \alpha^3 + p_1\alpha^2 + p_2\alpha + p_3\right\}.$$

Poichè il secondo membro è già di grado inferiore a 4, esso si deve ridurre (art. 928) al suo termine indipendente da α, dimodochè, facendo $\alpha = 0$, si ha subito:

$$F = -8\left\{-\frac{p_1^3}{8} + \frac{p_1^3}{4} - \frac{p_1 p_2}{2} + p_3\right\} = -p_1^3 + 4p_1 p_2 - 8p_3.$$

931. Teorema III. — *Se* $f(\alpha)$ *è una funzione razionale di una radice* α *dell'equazione*:

$$x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_n = 0, \qquad (a)$$

essa si può sempre ridurre alla forma intera:

$$f(\alpha) = R_0 \alpha^{n-1} + R_1 \alpha^{n-2} + \ldots + R_{n-1}\alpha + R_n \qquad (b)$$

essendo le $R_0, \ldots, R_n$ *funzioni razionali delle* $p_1, \ldots, p_n$.

Sia infatti:

$$f(\alpha) = \frac{\varphi(\alpha)}{\psi(\alpha)}$$

la funzione $f(\alpha)$ ridotta alla forma di quoto di due funzioni intere $\varphi(\alpha)$ e $\psi(\alpha)$. Dette $\beta, \gamma, \ldots, \lambda$ le altre $n-1$ radici dell'equazione (a), si può anche scrivere:

$$f(\alpha) = \frac{\varphi(\alpha)\,\psi(\beta)\,\psi(\gamma)\ldots\psi(\lambda)}{\psi(\alpha)\,\psi(\beta)\,\psi(\gamma)\ldots\psi(\lambda)}$$

dove ora il denominatore, essendo simmetrico rispetto a tutte le radici $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, è esprimibile (art. 922) in funzione intera delle $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Quanto al numeratore, esso si potrà esprimere in funzione intera di α e delle $p_1, \ldots, p_n$; poichè il prodotto $\psi(\beta)\,\psi(\gamma) \ldots \psi(\lambda)$, che è simmetrico rispetto alle $\beta, \gamma, \ldots, \lambda$, si può appunto (art. 927) esprimere in tal modo. Ove il grado della funzione intera di α così ottenuta riesca superiore ad $n-1$, lo si abbasserà successivamente fino al grado $n-1$, mediante la relazione (7), in modo analogo a quello tenuto all'art. 929, dopo dichè $f(\alpha)$ si troverà evidentemente ridotta alla forma voluta (b)

932. Corollario. — *Ogni funzione razionale di* k *delle* n *radici dell'equazione* (a) *si può anche esprimere come funzione intera delle stesse* k *radici.*

Infatti, dopochè la funzione proposta si sarà resa, col procedimento indicato, intera rispetto ad una variabile α, la si renderà poi anche intera, applicando di nuovo lo stesso procedimento, anche rispetto ad un'altra variabile β, e così via.

933. Teorema IV. — *Se* $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ *sono* k *delle* n *radici dell'equazione*:

$$x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_n = 0 \qquad (8)$$

e $\Phi(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k)$ *è una funzione intera e simmetrica delle* $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$, *essa si potrà sempre esprimere in funzione intera simmetrica delle* $n-k$ *rimanenti radici (e delle* $p_1, p_2, \ldots, p_n$*).*

Questo teorema si dimostra in modo analogo a quello tenuto per il teorema II, che ne è un caso particolare. Siano infatti $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-k}$ le rimanenti radici. Dividendo il primo membro della (8) per $x-\alpha_1$, poi il risultato per $x-\alpha_2$, e così di seguito fino a dividere per $x-\alpha_{n-k}$, si otterrà un'equazione del grado k, i cui coefficienti saranno funzioni intere (ed evidentemente simmetriche) delle α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_{n-k}$. Quest' equazione avrà appunto per radici le β_1, $\beta_2, \ldots, \beta_k$ e $\Phi(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k)$ si esprimerà (art. 922) in funzione intera dei suoi coefficienti. Quindi, ecc.

Note ed Esercizi.

1. Delle tre radici α, β, γ dell'equazione $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, calcolare le funzioni simmetriche:

$$(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)(\beta+\gamma), \quad \frac{1}{\alpha+\beta}+\frac{1}{\alpha+\gamma}+\frac{1}{\beta+\gamma}, \quad \frac{\gamma}{\alpha+\beta}+\frac{\beta}{\alpha+\gamma}+\frac{\alpha}{\beta+\gamma}.$$

2. Delle radici α, β, γ, δ dell'equazione $x^4+p_1x^3+p_2x^2+p_3x+p_4=0$, calcolare le funzioni simmetriche:

$$(\alpha\beta-\gamma\delta)(\alpha\gamma-\beta\delta)(\alpha\delta-\beta\gamma)$$

$$\frac{\alpha}{\beta+\gamma+\delta}+\frac{\beta}{\alpha+\gamma+\delta}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\delta}+\frac{\delta}{\alpha+\beta+\gamma}.$$

3. Essendo $\varepsilon = -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ (cfr. art. 827), esprimere $\frac{1}{1+\varepsilon}$ in funzione intera di ε con coefficienti razionali.

4. Se $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sono le radici di $f(x)=0$, si ha:

$$\frac{1}{f'(\alpha_1)}+\frac{1}{f'(\alpha_2)}+\ldots+\frac{1}{f'(\alpha_n)}=0.$$

5. Riesce spesso assai utile di stabilire, fra gl'infiniti termini che possono far parte di una funzione intera di n variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$, un ordine ben determinato di successione, come si fa per le funzioni intere di una sola variabile. Per quest'ultime la cosa è assai semplice, bastando definire come termine di *rango* μ^{mo} quel termine che contiene l'unica variabile elevata alla potenza μ. Nel caso di più variabili conviene innanzi tutto fissare, una volta per sempre, l'ordine di precedenza fra le variabili; cioè distinguere le variabili in *prima variabile* (che sarà per noi la x_1), *seconda variabile* (che sarà per noi la x_2) e così di seguito.

Ciò premesso, *dati due termini qualisivogliano*:

$$x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}, \quad x_1^{\beta_1}x_2^{\beta_2}\ldots x_n^{\beta_n},$$

per decidere quale fra essi sia da ritenersi di rango superiore a quello dell'altro, si distingueranno due casi:

a) *se sia* $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n \gtreqless \beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_n$, *si dirà che è di rango più elevato il primo termine, ovvero il secondo, secondochè abbia luogo il segno* $>$ *ovvero il segno* $<$.

b) *se* $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n = \beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_n$, *e sia* β_i *il primo dei numeri* $\beta_1, \beta_2, \ldots$ *che non coincide col corrispondente* α_i, *si dirà che il primo ter-*

mine è di rango più alto o più basso del secondo, secondochè sia $\alpha_i > \beta_i$, ovvero $\alpha_i < \beta_i$.

6. Dopo ciò è chiaro che gl'infiniti termini, che si possono formare colle n variabili $x_1, \ldots, x_n$, ordinati in modo che i loro ranghi vadano sempre crescendo, si verranno a rappresentare con una successione semplicemente infinita:

$$X_0, X_1, X_2, \ldots$$

designando der brevità con X_i quel termine che occupa il posto i, che si chiamerà il *termine di rango* i.

Una funzione intera qualunque delle $x_1, \ldots, x_n$, ordinata secondo i ranghi decrescenti dei suoi termini, sarà della forma:

$$F = a_0 X_k + a_1 X_{k-1} + \ldots + a_{k-1} X_1 + a_k X_0$$

essendo le a dei coefficienti costanti; e il numero k, rango del suo primo termine, si dirà al tempo stesso essere il *rango di F*.

7. Esempio. — Per il caso di tre variabili x, y, z, assumendo come prima variabile la x, come seconda la y e come terza la z, si ha evidentemente:

$$X_0 = x^0 y^0 z^0 = 1 \ , \ X_1 = z \ , \ X_2 = y \ , \ X_3 = x \ ,$$

$$X_4 = z^2 \ , \ X_5 = yz \ , \ X_6 = y^2 \ , \ X_7 = xz \ , \ X_8 = xy \ , \ X_9 = x^2 \ ,$$

$$X_{10} = z^3 \ , \ X_{11} = z^2 y \ , \ X_{12} = zy^2 \ , \ X_{13} = y^3 \ , \ X_{14} = z^2 x \ , \ldots$$

8. L'importanza della definizione da noi data del rango dei termini e delle funzioni intere appare dalle seguenti proprietà, delle quali lasciamo al lettore la facile dimostrazione:

a) se X_h, X_k, X_t sono tre termini qualisivogliano, il rango del termine $X_h X_t$ sarà maggiore, uguale o minore del rango del termine $X_k X_t$, secondochè sia h maggiore, uguale o minore di k.

b) il rango del prodotto di due funzioni intere è uguale al rango del prodotto dei loro primi termini.

9. Ciò premesso: *se $x_1^\lambda x_2^\mu x_3^\nu x_4^\rho \ldots$ è il termine di rango più elevato in una certa funzione simmetrica delle $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots$, sarà necessariamente* $\lambda \gtreqqless \mu \gtreqqless \nu \gtreqqless \rho \gtreqqless \ldots$

Ammettiamo infatti p. es. che fosse, se è possibile, $\nu < \rho$. Poichè la funzione di cui si tratta è simmetrica, essa dovrebbe contenere anche il termine $x_1^\lambda x_2^\mu x_3^\rho x_4^\nu \ldots$, il quale sarebbe evidentemente di rango più alto di quello del termine $x_1^\lambda x_2^\mu x_3^\nu x_4^\rho \ldots$, contro il supposto.

10. *Waring* ha dato, per il calcolo di una funzione simmetrica F delle n variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$ radici dell'equazione:

$$x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_{n-1} x + p_n = 0 \ ,$$

un procedimento, che si fonda sostanzialmente sulla proprietà testè dimostrata.

Se $A x_1^\lambda x_2^\mu x_3^\nu x_4^\rho \ldots x_{n-1}^\sigma x_n^\tau$ è il primo termine della funzione simmetrica F, il prodotto:

$$\pm A p_1^{\lambda-\mu} p_2^{\mu-\nu} p_3^{\nu-\rho} \ldots p_{n-1}^{\sigma-\tau} p_n^\tau$$

$$= A(x_1 + x_2 + \ldots)^{\lambda-\mu}(x_1 x_2 + x_1 x_3 + \ldots)^{\mu-\nu}(x_1 x_2 x_3 + \ldots)^{\nu-\rho} \ldots$$

considerato come funzione intera delle $x_1, x_2, \ldots, x_n$ avrà per termine di rango più elevato il prodotto dei primi termini dei suoi fattori, cioè precisamente lo stesso primo termine di F. La differenza fra F e questo prodotto sarà dunque una funzione di rango inferiore al rango di F; onde

si potrà porre:

$$F = \pm A p_1^{\lambda-\mu} p_2^{\mu-\nu} \ldots p_{n-1}^{\sigma-\tau} p_n^{\tau} + F_1$$

dove F_1 è ancora una funzione simmetrica delle $x_1, \ldots, x_n$, ma di rango inferiore al rango di F.

Si applicherà ora ad F_1 lo stesso procedimento e così di seguito, finchè si giunga ad una funzione simmetrica di rango nullo, cioè ad una semplice costante.

11. Il procedimento di Waring ha il vantaggio di mettere in evidenza che: *se i coefficienti della funzione simmetrica intera* $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *sono numeri interi, anche i coefficienti della funzione intera equivalente* $\varphi(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ *saranno del pari interi.*

§ 6.° — Discriminante di un' equazione. Risoluzione generale delle equazioni di 2.° grado.

934. Si chiama *discriminante* dell' equazione generale:

$$x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_{n-1} x + p_n = 0 \qquad (1)$$

una certa funzione razionale intera dei suoi coefficienti, che indicheremo con Δ, che uguagliata a zero esprime la condizione necessaria e sufficiente, cui debbono soddisfare i coefficienti $p_1, p_2, \ldots, p_n$ affinchè l'equazione (1) abbia almeno una radice multipla, cioè almeno due radici uguali.

935. Per trovare in generale la funzione Δ che soddisfa alle proprietà volute, indichiamo per un momento con $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ le n radici (*incognite*) dell' equazione (1) e consideriamo il prodotto:

$$\Delta = (\alpha_2 - \alpha_1)^2 (\alpha_3 - \alpha_1)^2 \ldots (\alpha_n - \alpha_1)^2 (\alpha_3 - \alpha_2)^2 \ldots (\alpha_n - \alpha_2)^2 \ldots$$

dei quadrati delle $\dfrac{n(n-1)}{2}$ differenze delle n radici combinate due a due. Questa funzione delle radici, che possiamo anche designare più brevemente così:

$$\Delta = \prod_{j>i} (\alpha_j - \alpha_i)^2 = \Big[\prod_{j>i} (\alpha_j - \alpha_i)\Big]^2, \qquad (2)$$

è evidentemente una funzione simmetrica delle $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, poichè, scambiando fra loro queste radici, il prodotto $\Pi(\alpha_j - \alpha_i)$ potrebbe al più cambiare di segno, onde il suo quadrato resterà inalterato. Per il teorema dell'art. 922 si avrà dunque:

$$\Delta = f(p_1, p_2, \ldots, p_n)$$

indicando con f una funzione intera a coefficienti numerici conosciuti.

936. Ciò premesso, è facile ora di riconoscere che *la funzione intera* Δ *così definita, dei coefficienti* $p_1, p_2, \ldots, p_n$ *dell'equazione* (1), *si annulla tutte le volte che l' equazione* (1) *abbia almeno*

due radici eguali e soltanto in questo caso; cosicchè questa funzione Δ *si può ritenere come il discriminante dell' equazione* (1).

Infatti dall' espressione (2) di Δ riesce manifesto che, se una certa radice, p. es. α_j, coincide con una certa altra radice, p. es. α_i, si avrà $\alpha_j - \alpha_i = 0$ e quindi $\Delta = 0$. Reciprocamente, se sia $\Delta = 0$, si avrà:

$$\prod_{j>i} (\alpha_j - \alpha_i) = 0 ,$$

onde almeno uno degli $\frac{n(n-1)}{2}$ fattori di cui si compone il primo membro dovrà essere nullo. Sarà dunque p. es. $\alpha_j - \alpha_i = 0$, onde $\alpha_j = \alpha_i$; cioè l'equazione avrà almeno queste due radici uguali. Si vede dunque che $\Delta = 0$ è la condizione necessaria e sufficiente perchè l' equazione abbia radici eguali.

937. Per giungere all'espressione effettiva di Δ in funzione dei coefficienti $p_1, p_2, \ldots, p_n$, notiamo che si può anche scrivere (art. 481):

$$\Delta = \left[\prod_{j>i} (\alpha_j - \alpha_i)\right]^2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \ldots \alpha_n \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 & \ldots \alpha_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \alpha_3^{n-1} & \ldots \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}^2$$

cosicchè, sviluppando il quadrato del determinante secondo la regola del prodotto per orizzontali (art. 465), si ha:

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{vmatrix}$$

dove:

$$c_{ik} = \alpha_1^{i-1}\alpha_1^{k-1} + \alpha_2^{i-1}\alpha_2^{k-1} + \ldots + \alpha_n^{i-1}\alpha_n^{k-1} = S_{i+k-2} ,$$

designandosi al solito con S_μ la somma delle potenze μ^{me} delle radici dell' equazione (1).

Si ottiene così per Δ la seguente forma:

$$\Delta = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & S_2 & \ldots S_{n-1} \\ S_1 & S_2 & S_3 & \ldots S_n \\ S_2 & S_3 & S_4 & \ldots S_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{n-1} & S_n & S_{n+1} & \ldots S_{2n-2} \end{vmatrix} \qquad (3)$$

che si potrà poi esprimere coi coefficienti $p_1, p_2, \ldots, p_n$, sostituendo in luogo delle somme semplici S_μ le loro espressioni date dalle formole di Newton.

938. Esempio 1.° — Per l' equazione di 2° grado:

$$ax^2 + bx + c = a(x^2 + p_1 x + p_2) = 0 \qquad (4)$$

dove cioè:

$$p_1 = \frac{b}{a} \quad , \quad p_2 = \frac{c}{a},$$

si ha:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & S_1 \\ S_1 & S_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -p_1 \\ -p_1 & p_1^2 - 2p_2 \end{vmatrix} = p_1^2 - 4p_2 = \frac{b^2 - 4ac}{a^2} \qquad (5)$$

cosicchè: *affinchè l'equazione* $\mathrm{ax^2 + bx + c = 0}$ *abbia le due radici uguali, è necessario e sufficiente che sia* $\mathrm{b^2 - 4ac = 0}$.

939. Dette α e β le due radici dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$, si ha dunque per la (2):

$$(\alpha - \beta)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{a^2},$$

d' onde:

$$\alpha - \beta = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a}.$$

Sommando membro a membro (o sottraendo) quest'uguaglianza con quella che dà (art. 916) la somma delle due radici dell'equazione:

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$$

si ottengono subito le formole:

$$\alpha = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad , \quad \beta = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

che risolvono nel modo più generale l' equazione del secondo grado.

940. Esempio 2.° — Per l' equazione del terzo grado:

$$a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = a_0(x^3 + p_1 x^2 + p_2 x + p_3) = 0$$

si ha:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & S_1 & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 \\ S_2 & S_3 & S_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -p_1 & p_1^2 - 2p_2 \\ 2p_1 & -2p_2 & p_1 p_2 - 3p_3 \\ p_2 & -3p_3 & p_1 p_3 \end{vmatrix}$$

come si trova subito aggiungendo ad ogni orizzontale (a cominciare dalla terza) la precedente moltiplicata per p_1 e l'antiprecedente moltiplicata per p_2, e tenendo presenti le formole di Newton. Sviluppando viene:

$$\Delta = p_1^2 p_2^2 - 4p_2^3 - 4p_1^3 p_3 + 18 p_1 p_2 p_3 - 27 p_3^2.$$

Prendendo per l' equazione la prima forma più generale, si ha

dunque come condizione per l'esistenza di una radice doppia:

$$a_1^2a_2^2 - 4a_0a_2^3 - 4a_1^3a_3 + 18a_0a_1a_2a_3 - 27a_0^2a_3^2 = 0.$$

941. *Se le radici dell'equazione* $f(x)=0$ *del grado* n, *il cui discriminante sia* Δ, *hanno i loro moduli inferiori al numero positivo* L, *il modulo della differenza fra due qualunque di esse radici è maggiore di:*

$$\frac{\sqrt{mod\Delta}}{(2L)^{\frac{n(n-1)}{2}-1}}.$$

Infatti, poichè il numero Δ è espresso, in funzione delle radici $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ di $f(x)=0$, mediante la formola:

$$\Delta = \prod_{j>i} (\alpha_j - \alpha_i)^2,$$

si ha evidentemente:

$$\text{mod}\Delta = \prod_{j>i} [\text{mod}(\alpha_j - \alpha_i)]^2. \tag{6}$$

Ma, per supposto:

$$\text{mod}(\alpha_j - \alpha_i) \lesseqgtr \text{mod}\alpha_j + \text{mod}\alpha_i < 2L;$$

quindi, se in luogo di ciascuno degli $\frac{n(n-1)}{2}$ fattori del prodotto (6), ad eccezione di un solo, sostituiamo la quantità maggiore $(2L)^2$, che verrà così ripetuta come fattore $\left[\frac{n(n-1)}{2} - 1\right]$ volte, deduciamo:

$$\text{mod}\Delta < [\text{mod}(\alpha_j - \alpha_i)]^2 \cdot [(2L)^2]^{\frac{n(n-1)}{2}-1}$$

d' onde appunto:

$$\text{mod}(\alpha_j - \alpha_i) > \frac{\sqrt{\text{mod}\Delta}}{(2L)^{\frac{n(n-1)}{2}-1}}. \tag{7}$$

942. Corollario. — *Se* A *è il massimo modulo dei coefficienti dell' equazione:*

$$x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

si ha, detto Δ *il valore del discriminante, per due radici qualunque* α_i *ed* α_j:

$$mod(\alpha_j - \alpha_i) > \frac{\sqrt{mod\Delta}}{[2(1+A)]^{\frac{n(n-1)}{2}-1}}. \tag{8}$$

A questa formola si riduce infatti la formola (7) quando si prende per L il limite superiore dei moduli delle radici determinati secondo l' art. 915.

943. *Se una funzione razionale delle* n *variabili* $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ *radici dell' equazione:*

$$x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_{n-1} x + p_n = 0$$

non può prendere, per tutte le permutazioni fra le variabili, che due soli valori distinti, essa si può sempre esprimere sotto la forma:

$$\varphi_1(p_1, p_2, \ldots, p_n) + \sqrt{\Delta} \cdot \varphi_2(p_1, p_2, \ldots, p_n)$$

essendo Δ *il discriminante dell'equazione e* φ_1, φ_2 *funzioni razionali dei suoi coefficienti.*

Può infatti, per quanto già sappiamo (art. 539), la funzione in parola rappresentarsi con

$$\psi_1(\alpha, \beta, \ldots, \lambda) + \sqrt{\Delta} \cdot \psi_2(\alpha, \beta, \ldots, \lambda) \qquad (9)$$

dove ψ_1 e ψ_2 sono funzioni razionali simmetriche delle $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$; le quali potranno, per conseguenza, surrogarsi con delle funzioni razionali dei coefficienti $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

È importante di notare che i due valori ammessi dalla funzione risultano dall'unica espressione (9) dando a $\sqrt{\Delta}$ i due significati di cui è suscettibile.

Note ed Esercizi.

1. Per l' equazione del 4° grado:

$$x^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = 0$$

si trova il discriminante (cfr. Cap. XIV, § 6°, Note):

$$\Delta = 16\{(e - 4bd + 3c^2)^3 - 27(ce + 2bcd - d^2 - eb^2 - c^3)^2\}.$$

2. Riconoscere che l' equazione:

$$x^3 - 3x^2 + 4 = 0$$

ha due radici eguali.

3. Si dimostri che il discriminante dell'equazione $f(x) = 0$ si può esprimere mediante il prodotto $f'(\alpha)f'(\beta) \ldots f'(\lambda)$, essendo $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ le radici di $f(x) = 0$; ovvero anche mediante il prodotto $f(\alpha_1)f(\beta_1) \ldots f(\rho_1)$, essendo $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \rho_1$ le radici di $f'(x) = 0$.

4. Come si può utilizzare quest' ultima proprietà per il calcolo del discriminante dell'equazione trinomia $x^m + qx^n + r = 0$?

5. Il secondo membro dell'eguaglianza (7) si può assumere evidentemente per quel numero positivo δ (di cui si è parlato all' art. 760) più piccolo della differenza delle due radici reali, di $f(x) = 0$, che più sono vicine fra loro. In particolare si potrà prendere per δ il secondo membro della (8), essendo ora modΔ il valore assoluto del discriminante (che sarà un numero reale) ed A il massimo fra i valori assoluti dei coefficienti, supposti reali, dell'equazione.

Se poi l'equazione abbia i coefficienti razionali e sia stata ridotta, come è sempre possibile (cfr. Cap. XIV, § 3°) ad avere tutti i coefficienti interi ed il primo coefficiente uguale all'unità, si potrà anche prendere in luogo

del 2° membro della (7), più semplicemente:

$$\delta = \frac{1}{(2L)^{\frac{n(n-1)}{2}-1}}$$

poichè il discriminante Δ sarà pure un numero intero e avrà quindi un valore eguale o superiore ad 1 (escludendosi il caso di $\Delta = 0$, cioè il caso di radici multiple).

In questo modo si semplificherà notevolmente il calcolo di δ; si otterrà però per δ un limite in generale molto più piccolo e quindi meno vantaggioso per lo scopo che si aveva in mira all'art. 760.

Per avere un valore di δ ancora più conveniente di quello dato dal secondo membro della (8) (cfr. il Cap. XIV, § 7°, Note).

6. Sylvester ha dato le espressioni effettive delle n funzioni di Sturm, (cfr.art. 742) relative all'equazione generale $f(x) = 0$, del grado n, sotto forma di funzioni simmetriche delle sue radici $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$. Supposto, per semplicità, che il coefficiente di x^n in $f(x)$ sia preso eguale all'unità e indicando per brevità con $\Delta(a, b, \ldots, k)$ il prodotto dei quadrati delle differenze delle quantità $a, b, \ldots, k$ combinate due a due, cosicchè p. es.:

$$\Delta(\alpha, \beta) = (\alpha - \beta)^2 \;, \; \Delta(\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha - \beta)^2(\alpha - \gamma)^2(\beta - \gamma)^2, \ldots,$$

si hanno per le n funzioni di Sturm $f(x), f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ le formole seguenti:

$$\left.\begin{aligned}
f(x) &= (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)\ldots(x-\lambda) \\
f_1(x) &= \sum_{\alpha}(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)\ldots(x-\lambda) \\
f_2(x) &= \frac{1}{\lambda^2}\sum_{\alpha,\beta}\Delta(\alpha,\beta)\cdot(x-\gamma)(x-\delta)\ldots(x-\lambda) \\
f_3(x) &= \frac{1}{\lambda^3}\sum_{\alpha,\beta,\gamma}\Delta(\alpha,\beta,\gamma)\cdot(x-\delta)\ldots(x-\lambda) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
f_n(x) &= \frac{1}{\lambda_n}\Delta(\alpha,\beta,\gamma,\ldots,\lambda),
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

dove:

$$\left.\begin{aligned}
\lambda_2 &= p_1^2 & p_1 &= n \\
\lambda_3 &= \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2 & p_2 &= \sum\Delta(\alpha,\beta) \\
&\qquad\text{essendo} \\
\lambda_4 &= \left(\frac{p_1 p_3}{p_2}\right)^2 & p_3 &= \sum\Delta(\alpha,\beta,\gamma) \\
\lambda_5 &= \left(\frac{p_2 p_4}{p_1 p_3}\right)^2 & p_4 &= \sum\Delta(\alpha,\beta,\gamma,\delta) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Omettiamo, perchè alquanto lunga, la dimostrazione di queste formole, che può leggersi nel *Serret — Cours d'Algèbre Supérieure* (*Section* II, *Chap.* IV).

L'ultima costante $p_n = \Delta(\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda)$ non è altro che il discriminante (art. 935) dell'equazione $f(x) = 0$.

Fatta astrazione dai coefficienti $\frac{1}{\lambda_2}$, $\frac{1}{\lambda_3}$, ... che sono tutti positivi, perchè quadrati di quantità reali, i coefficienti delle più alte potenze di x nelle $f, f_1, f_2 \ldots$ coincidono, come si vede dalle (2), con:

$$1, p_1, p_2, \ldots, p_n. \tag{4}$$

Affinchè l'equazione $f(x) = 0$ *abbia tutte le radici reali e distinte, è dunque necessario e sufficiente* (art. 746) *che le costanti* (4) *siano tutte positive e diverse da zero.*

5. In modo affatto simile a quello tenuto all'art. 937 per il calcolo del discriminante, tutte le costanti:

$$p_2 = \sum_{\alpha,\beta} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix}^2, \quad p_3 = \sum \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \end{vmatrix}^2, \ldots$$

si potranno esprimere con le somme semplici:

$$S_i = \alpha^i + \beta^i + \gamma^i + \ldots + \lambda^i$$

applicando la regola del prodotto di due matrici analoga a quella pel prodotto di due determinanti.

Si troverà così che:

$$p_2 = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 \\ S_1 & S_2 \end{vmatrix}, \quad p_3 = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 \\ S_2 & S_3 & S_4 \end{vmatrix}, \quad p_4 = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & S_2 & S_3 \\ S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\ S_2 & S_3 & S_4 & S_5 \\ S_3 & S_4 & S_5 & S_6 \end{vmatrix}, \ldots$$

§ 7.° — Decomposizione delle funzioni intere a coefficienti reali in fattori, a coefficienti reali, di primo e di secondo grado.

944. Sia:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n \tag{1}$$

una funzione intera qualsivoglia a coefficienti reali.

Prendendo per x un valore complesso $a + bi$ si avrà:

$$f(a + bi) = a_0(a + bi)^n + a_1(a + bi)^{n-1} + \ldots + a_n \tag{2}$$

che è in generale un numero complesso. Per avere il numero complesso conjugato basterà cambiare dappertutto i in $-i$.

Poichè ora, per supposto, i coefficienti $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sono reali, è chiaro che la i si trova solamente nelle potenze $(a+bi)^n$, $(a + bi)^{n-1}$, ... Quindi il numero complesso conjugato di $f(a + bi)$ altro non è che:

$$a_0(a - bi)^n + a_1(a - bi)^{n-1} + \ldots + a_n,$$

cioè $f(a-bi)$; cioè: *se* f(x) *è una funzione intera a coefficienti reali, e si sostituiscono per* x *due numeri complessi conjugati* a+bi *ed* a—bi, *i due risultati che si ottengono* f(a+bi) *ed* f(a—bi) *sono del pari due numeri complessi conjugati.*

Ciò non è più vero se la $f(x)$ abbia dei coefficienti complessi, poichè in tal caso per passare dal secondo membro della (2) al suo valore conjugato converrebbe altresì porre in luogo di $a_0, a_1 \ldots$ i loro valori conjugati, onde il risultato non sarebbe più in generale uguale ad $f(a-bi)$.

945. Ciò premesso, se $x = \alpha + \alpha' i$ è una radice imaginaria dell' equazione a coefficienti reali:

$$f(x) = 0,$$

si avrà:

$$f(\alpha + \alpha' i) = 0.$$

Ma, essendo nullo il numero $f(\alpha + \alpha' i)$, dovrà essere nullo, come sappiamo, anche il suo conjugato, che ha lo stesso modulo; e, poichè questo è appunto per l'art. prec. uguale ad $f(\alpha - \alpha' i)$, così è chiaro che dovrà essere anche:

$$f(\alpha - \alpha' i) = 0.$$

Vediamo dunque che *se un'equazione a coefficienti reali ammette una radice imaginaria, essa ammette anche un'altra radice imaginaria ad essa conjugata.*

946. Dividendo il primo membro $f(x)$ dell'equazione per il prodotto delle due funzioni lineari:

$$[x - (\alpha + \alpha' i)][x - (\alpha - \alpha' i)]$$

corrispondenti a queste radici, cioè per la funzione:

$$x^2 - [(\alpha + \alpha' i) + (\alpha - \alpha' i)]x + (\alpha + \alpha' i)(\alpha - \alpha' i),$$

ossia per

$$x^2 - 2\alpha x + (\alpha^2 + \alpha'^2)$$

che è una funzione di 2° grado a coefficienti reali, si otterrà identicamente:

$$f(x) = [x^2 - 2\alpha x + (\alpha^2 + \alpha'^2)] \cdot f_1(x)$$

dove $f_1(x)$ è una funzione di grado $n-2$, i cui coefficienti saranno parimenti reali, poichè $f_1(x)$ si ottiene appunto come quoziente di due funzioni a coefficienti reali.

Se ora l'equazione $f_1(x)=0$ abbia una radice imaginaria $\beta + \beta' i$, essa avrà anche, per l'art. prec., la radice $\beta - \beta' i$, onde si potrà similmente scrivere identicamente:

$$f_1(x) = [x^2 - 2\beta x + (\beta^2 + \beta'^2)] \cdot f_2(x)$$

dove $f_2(x)$ sarà una funzione intera di x del grado $n-4$ a coefficienti tutti reali. Così procedendo si potranno separare da $f(x)$ tanti fattori di 2° grado in x corrispondenti ad altrettante coppie

di radici conjugate dell'equazione $f(x) = 0$, finchè si siano esaurite tutte le radici imaginarie. Restando allora le sole radici reali, che indicheremo con $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_\mu$, si avrà poi in ultima analisi la identità:

$$f(x)=a_0[x^2-2\alpha x+(\alpha^2+\alpha'^2)]\ldots[x^2-2\delta x+(\delta^2+\delta'^2]\times(x-\theta_1)(x-\theta_2)\ldots(x-\theta_\mu).$$

Concludiamo dunque che *ogni funzione intera di* x *a coefficienti reali si può sempre decomporre in un prodotto di funzioni intere, di primo o secondo grado in* x, *a coefficienti reali.*

947. *Questa decomposizione di* f(x) *in funzioni a coefficienti reali, irreducibili, di primo o di secondo grado si può soltanto effettuare in un unico modo.*

Ciò si renderà facilmente manifesto ove si rifletta che due funzioni a coefficienti reali, di secondo grado, irreducibili hanno le loro radici imaginarie e che, se due siffatte funzioni abbiano una radice in comune, avranno in comune anche l'imaginaria conjugata, epperò coincideranno fra loro.

948. Da quanto si è visto all'art. 945 segue evidentemente che *il numero delle radici imaginarie di un' equazione a coefficienti reali è sempre pari.*

Per conseguenza se il grado di un'equazione a coefficienti reali è dispari, oltre alle radici imaginarie, il cui numero è pari, resterà un numero dispari di radici reali, e quindi almeno una radice reale. Ritroviamo così per altra via il teorema da noi già dimostrato (art. 718) che *un'equazione di grado dispari a coefficienti reali ha sempre almeno una radice reale.*

949. Come applicazione importante di quanto si è stabilito all'art. 945 dimostreremo ancora che: *il discriminante di un' equazione a coefficienti reali (priva di radici multiple) è positivo o negativo a seconda che è pari o dispari il numero delle coppie di radici imaginarie conjugate dell'equazione.*

Invero i quadrati $(a-b)^2$ delle differenze di due radici qualunque a e b, dei quali il discriminante Δ è il prodotto, si possono distinguere in quattro gruppi a seconda che si verifichi l'uno o l'altro dei seguenti quattro casi:

1°) a e b sono entrambi reali;
2°) a è reale e b imaginaria;
3°) a e b sono imaginarie, ma non conjugate.
4°) a e b sono imaginarie conjugate.

Ora nel primo caso il quadrato $(a-b)^2$ è evidentemente reale e positivo. Nel secondo caso ad ogni quadrato $(a-b)^2$ corrisponde un quadrato $(a-b')^2$ in cui b' è il conjugato di b, cosicchè il loro prodotto sarà del pari reale e positivo. Nel terzo caso ad ogni quadrato $(a-b)^2$ corrisponde un altro quadrato $(a'-b')^2$ in cui a' è il conjugato di a e b' è il conjugato di b, e il prodotto dei due quadrati sarà quindi ancora reale e positivo.

Si vede dunque che il segno di Δ coincide col segno del prodotto dei quadrati del 4° tipo. Ma per ciascuno di questi $a-b$ è un imaginario puro, cosicchè $(a-b)^2$ è un numero negativo. Il

segno di Δ è dunque positivo o negativo secondochè è pari o dispari il numero dei quadrati del 4° tipo, cioè appunto il numero delle coppie di radici imaginarie conjugate; c. d. d.

Esercizi.

1. Notare che se un'equazione a coefficienti reali ha una radice imaginaria multipla di ordine μ, anche la radice imaginaria conjugata sarà multipla dello stesso ordine μ.

2. Dimostrare che, se $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$ sono tutte le radici eguali o distinte comuni a due equazioni a coefficienti reali, il prodotto $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_l)$ è sempre una funzione intera di x a coefficienti tutti reali.

3. Dimostrare che un'equazione a coefficienti reali di grado dispari ha sempre almeno una radice reale semplice ovvero multipla di ordine dispari.

4. Decomponendo la funzione $1+x^4$ in fattori irreducibili a coefficienti reali si trova:

$$1+x^4=(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1).$$

5. Decomporre in fattori irreducibili a coefficienti reali le funzioni $1+x^6, 1+x^8, \ldots$.

§ 8.° — Espressioni radicali. — Eliminazione dei radicali dalle equazioni algebriche.

950. Si chiameranno espressioni *radico-razionali* o, più brevemente, *radicali* quelle espressioni che si ottengono operando sopra certe quantità, *che si considerano come già date*, con le quattro operazioni fondamentali e con l'estrazione di radice ad indice intero e positivo.

Fra queste le più semplici sono quelle nelle quali l'estrazione di radice viene eseguita *una sola volta*. Il tipo più generale di quest'ultime espressioni è evidentemente il seguente:

$$\frac{a_0\left(\sqrt[m]{A}\right)^h+a_1\left(\sqrt[m]{A}\right)^{h-1}+\ldots+a_{h-1}\left(\sqrt[m]{A}\right)+a_h}{b_0\left(\sqrt[m]{A}\right)^k+b_1\left(\sqrt[m]{A}\right)^{k-1}+\ldots+b_{k-1}\left(\sqrt[m]{A}\right)+b_k} \qquad (1)$$

dove le $A, a_0, a_1, \ldots, b_0, b_1, \ldots$ s'intendono dedotte dalle quantità già date mediante le sole prime quattro operazioni fondamentali, e dove il simbolo radicale $\sqrt[m]{A}$, che sarebbe per sè stesso suscettibile di m interpretazioni diverse (art. 823), deve essere interpretato nello stesso modo, ossia deve rappresentare lo stesso valore numerico, in ogni parte dell'espressione. È importante di notare che, pur contenendo la espressione (1) *più volte il segno di* radicale, ciò nondimeno deve dirsi, nel senso ora spiegato, che essa contiene *una sola volta l'operazione* di estrazione di radice o, meglio, che essa contiene *un solo radicale*.

Nella espressione (1) i numeri h e k si suppongono naturalmente interi e *positivi*, essendo ciò evidentemente sempre lecito. Perciò l'espressione stessa si presenta come il quoto di due espressioni radicali che si possono chiamare *intere* rispetto all'unico radicale che contengono.

951. *Senza mutare il valore ed il significato preciso dell'espressione* (1), *si può sempre trasformarla in un'altra espressione consimile, che sia però intera rispetto al radicale* $\sqrt[m]{A}$, *e di grado non superiore ad* m − 1.

È questa una conseguenza del teorema dimostrato al § 5° (articolo 931), anzi si può dire che è quello stesso teorema enunciato per il caso in cui l'equazione fondamentale sia semplicemente l'equazione binomia:

$$x^m - A = 0. \tag{2}$$

Siano infatti $T, T_1, T_2, \ldots, T_{m-1}$ le m radici di questa equazione, indicando con T quel valore di $\sqrt[m]{A}$ che si vuol considerare nella espressione (1). Poichè:

$$x^m - A = x^m - T^m = (x - T)(x^{m-1} + Tx^{m-2} + \ldots + T^{m-1}),$$

le $T_1, T_2, \ldots, T_{m-1}$ sono nel nostro caso le radici dell'equazione:

$$x^{m-1}+Tx^{m-2}+T^2x^{m-3}+ \ldots +T^{m-2}x+T^{m-1}=0. \tag{3}$$

Se dunque poniamo per brevità:

$$\varphi(x) \equiv a_0x^h + a_1x^{h-1} + \ldots + a_{h-1}x + a_h$$
$$\psi(x) \equiv b_0x^k + b_1x^{k-1} + \ldots + b_{k-1}x + b_k,$$

il valore, che designeremo con X, dell'espressione (1), si può rappresentare come segue:

$$X = \frac{\varphi(T)}{\psi(T)} = \frac{\varphi(T)\,\psi(T_1)\,\psi(T_2)\ldots\psi(T_{m-1})}{\psi(T)\,\psi(T_1)\,\psi(T_2)\ldots\psi(T_{m-1})} \tag{4}$$

dove il prodotto $\psi(T_1)\,\psi(T_2)\ldots\psi(T_{m-1})$, essendo una funzione simmetrica intera delle radici di (3), si esprimerà (art. 922) con una funzione razionale intera di T e dei coefficienti $b_0, b_1, \ldots, b_k$, nel mentre che il denominatore, che è una funzione simmetrica intera di tutte le radici della (2), si esprimerà con una funzione intera di A e delle $b_0, b_1, \ldots, b_k$. La nuova espressione di X riuscirà dunque evidentemente intera rispetto a T. Il suo grado si potrà poi sempre abbassare ad $m-1$, poichè dalle (2) si ha:

$$T^m = A\ ,\ T^{m+1} = AT\ ,\ T^{m+2} = AT^2, \ldots. \tag{5}$$

952. Il metodo generale esposto al § 5° per il calcolo delle funzioni simmetriche delle radici di un'equazione subisce nel caso attuale delle notevoli semplificazioni. Posto infatti:

$$S_\lambda = T^\lambda + T_1{}^\lambda + T_2{}^\lambda + \ldots + T^\lambda{}_{m-1}, \tag{6}$$

le formole di Newton (art. 919) applicate all'equazione (2) ci danno evidentemente:

$$S_1 = 0\ ,\ S_2 = 0\ ,\ \ldots\ ,\ S_{m-1} = 0\ ,\ S_m = mA.$$

Dalla (2) si ha poi:

$$T_i^{m+\lambda} = AT_i^{\lambda}$$

e quindi:

$$\sum_i T_i^{m+\lambda} = A \sum_i T_i^{\lambda}$$

cioè:

$$S_{m+\lambda} = AS_\lambda$$

d'onde emerge chiaramente che S_μ *è uguale a zero tutte le volte che* μ *non sia un multiplo di* m; *e se* $\mu = mm'$, *si ha* $S_\mu = mA^{m'}$.

Corrispondentemente a ciò si avrà per le somme multiple $S_{p,q}$, $S_{p,q,r}$, ..., nell'ipotesi che gli indici p, q, r, ... siano tutti inferiori ad m (cfr. art. 525 e 526):

$$\begin{aligned} S_{p,q} &= -S_{p+q} \\ S_{p,q,r} &= -S_{p+r,q} - S_{p,q+r} \end{aligned} \tag{7}$$

ecc.

953. Supponiamo p. es. $m = 3$; cosicchè potremo prendere X sotto la forma:

$$X = \frac{a_0\left(\sqrt[3]{A}\right)^2 + a_1\left(\sqrt[3]{A}\right) + a_2}{b_0\left(\sqrt[3]{A}\right)^2 + b_1\left(\sqrt[3]{A}\right) + b_2} = \frac{\varphi(T)}{\psi(T)}\ ,\quad T = \sqrt[3]{A}\ , \tag{8}$$

poichè se i gradi di h, k fossero superiori a 2, si ridurrebbero facilmente al valore 2 mediante le (5).

Per il denominatore della nuova espressione di X si trova con breve riflessione:

$$\begin{aligned} \psi(T)\psi(T_1)\psi(T_2) &= b_0^3[TT_1T_2]^2 + b_0b_2^2[T^2T_1^2 + \ldots] \\ &+ b_0^2b_1[TT_1 + \ldots]TT_1T_2 + b_0b_1b_2[T^2T_1 + \ldots] \\ &+ b_0b_1^2[T+\ldots]TT_1T_2 + b_0b_2^2[T^2+\ldots] + b_1^3TT_1T_2 + b_1^2b_2[TT_1+\ldots]. \\ &+ b_1b_2^2[T + \ldots] + b_2^3. \end{aligned}$$

Ma si ha immediatamente dalla forma della (2):

$$T+T_1+T_2=0\ ,\ TT_1+TT_2+T_1T_2=0\ ,\ T_1T_2T_3=A\ ,\ S_2=0.$$

Quindi:

$$\psi(T)\psi(T_1)\psi(T_2) = b_0^3A^2 + \frac{1}{2}b_0^2b_2S_{2,2} + b_0b_1b_2S_{2,1} + b_1^3A + b_2^3\ ,$$

cioè per le (7):

$$\begin{aligned} \psi(T)\psi(T_1)\psi(T_2) &= b_0^3A^2 - \frac{1}{2}b_0^2b_2S_4 - b_0b_1b_2S_3 + b_1^3A + b_2^3 \\ &= b_0^3A^2 - 3b_0b_1b_2A + b_1^3A + b_2^3. \end{aligned}$$

Si ha poi:

$$\psi(T_1)\psi(T_2)=b_0^2[T_1T_2]^2+b_0b_1[T_1+T_2]T_1T_2+b_0b_2[T_1^2+T_2^2]$$
$$+b_1^2T_1T_2+b_1b_2+[T_1+T_2]+b_2^2,$$

onde, essendo T_1, T_2 le radici di

$$x^2+Tx+T^2=0,$$

si ha subito:

$$\psi(T_1)\psi(T_2)=b_0^2T^4-b_0b_1T^3-b_0b_2T^2+b_1^2T^2-b_1b_2T+b_2^2$$
$$=b_0^2AT-b_0b_1A-b_0b_2T^2+b_1^2T^2-b_1b_2T+b_2^2.$$

La nuova espressione di X è dunque:

$$X=\frac{[a_0T^2+a_1T+a_2][(b_1^2-b_0b_2)T^2+(b_0^2A-b_1b_2)T+b_2^2-b_0b_1A]}{b_0^3A^2-3b_0b_1b_2A+b_1^3A+b_2^3}.$$

Posto per brevità:

$$b_1^2-b_0b_2=c_0\,,\; b_0^2A-b_1b_2=c_1\,,\; b_2^2-b_0b_1A=c_2$$

e riducendo ulteriormente il numeratore, mediante la relazione $T^3=A$, fino ad abbassarne il grado al disotto di 3, si trova finalmente:

$$X=\frac{[c_0a_2+c_1a_1+c_2a_0]A^{\frac{2}{3}}+[c_0a_0+c_1a_2+c_2a_1]A^{\frac{1}{3}}+c_2a_2+(c_0a_1+c_1a_0)A}{b_0^3A^2-3b_0b_1b_2A+b_1^3A+b_2^3}.$$

954. Supponiamo ora che l'espressione radico-razionale X contenga un numero qualunque, λ, di radicali distinti, *o che si vogliano considerare come tali.* Cioè si potranno considerare come distinti due radicali aventi egual valore, quando si presentino sotto forme differenti che non siano manifestamente equivalenti. Come anche si potrebbero considerare come distinti due radicali perfettamente identici nella loro espressione algoritmica, ma per i quali sia convenuta una diversa interpretazione del loro valore. Così, ad esempio, il radicale $\sqrt[3]{A}$, in cui A è un numero reale, potrebbe avere in una parte dell'espressione il significato di un numero reale I (radice cubica aritmetica di A) ed in un'altra parte il significato di: $\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)I$. In tal caso lo stesso algoritmo $\sqrt[3]{A}$ ci darà due radicali distinti, a meno che non si preferisca di lasciare in quella prima parte dell' espressione $\sqrt[3]{A}$ e di sostituire nella seconda in luogo di $\sqrt[3]{A}$ il prodotto: $\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\sqrt[3]{A}$. In tal modo $\sqrt[3]{A}$ rappresenterà dappertutto un unico radicale; si sarà però introdotto il nuovo radicale $\sqrt{3}$, quando quest'ultimo non esistesse già in qualche parte dell'espressione.

Ciò premesso, è importante distinguere i diversi radicali che si

presentano nella stessa espressione X in radicali *interiori* e radicali *esteriori* (o *esterni*). Si chiameranno interiori quelli che, o dappertutto, o anche soltanto in qualche parte dell'espressione si trovino sottoposti ad altro segno radicale, esteriori i rimanenti. Così ad esempio, nell'espressione:

$$\sqrt{b}+\sqrt[3]{a+\sqrt{b}} \tag{9}$$

contenente i due radicali *distinti* $\sqrt{b}$ e $\sqrt[3]{a+\sqrt{b}}$ soltanto il secondo si dirà esteriore. Soltanto nel caso in cui $\sqrt{b}$ avesse differente significato nella prima e nella seconda parte della formola (o nel caso in cui potesse giovare *per semplice convenzione* di considerare lo stesso simbolo $\sqrt{b}$ come rappresentante due radicali distinti, benchè il significato dovesse esserne il medesimo) il radicale $\sqrt{b}$ rappresenterà nelle due parti della formola due radicali diversi, dei quali il primo sarà esteriore ed il secondo interiore. Cioè in tale supposto (*che non si verifica però nei casi ordinari*) l'espressione (9) conterrebbe tre radicali distinti dei quali due esterni ed uno interno.

955. Qualunque sia il numero λ dei radicali contenuti in X, è manifesto che *almeno uno* di essi sarà esteriore. Sia $T \equiv \sqrt[m]{A}$ uno qualunque di tali radicali esteriori. È evidente che la X sarà semplicemente razionale rispetto a T, cioè si potrà sempre porre sotto la stessa forma (1) considerata in principio, dove ora però la A e le $a_0, a_1, \ldots, b_0, b_1, \ldots$ sono espressioni radicali che, nel loro insieme, possono contenere ancora $\lambda-1$ radicali distinti, i $\lambda-1$ radicali che restano dei radicali contenuti in X, quando se ne escluda il radicale T. Operando sulla (1) precisamente nel modo indicato all'art. 951, si giungerà dunque a dare ad X la seguente espressione:

$$X = A_1\left(\sqrt[m]{A}\right)^{m-1} + A_2\left(\sqrt[m]{A}\right)^{m-2} + \ldots + A_m \tag{10}$$

dove le $A, A_1, A_2, \ldots, A_{m-1}$ sono espressioni radicali contenenti soltanto $\lambda-1$ radicali, cioè gli stessi altri $\lambda-1$ radicali $T_1, T_2, \ldots, T_{\lambda-1}$ contenuti in X.

Anche qui è manifesto che *almeno uno* dei radicali $T_1, T_2, \ldots, T_{\lambda-1}$ sarà *simultaneamente* esteriore in tutte le espressioni $A, A_1, A_2, \ldots, A_{m-1}$ che lo contengono. Sia questo p. es. $T_1 = \sqrt[n]{B}$. Ragionando su ciascuna delle espressioni $A, A_1, \ldots$ (che contenga effettivamente T_1) rispetto a T_1 come si è ragionato su X rispetto a T, si otterranno delle espressioni della forma:

$$\begin{aligned} A &= B_1\left(\sqrt[n]{B}\right)^{n-1} + B_2\left(\sqrt[n]{B}\right)^{n-2} + \ldots + B_n \\ A_1 &= B'_1\left(\sqrt[n]{B}\right)^{n-1} + B'_2\left(\sqrt[n]{B}\right)^{n-2} + \ldots + B'_n \end{aligned} \tag{11}$$

in cui tutte le $B, B', \ldots$ sono espressioni radico-razionali che contengono soltanto i $\lambda - 2$ radicali $T_2, T_3, \ldots, T_{\lambda-1}$.

Si osserverà ora che fra questi ultimi radicali ne esisterà almeno uno, p. es. T_2, che sarà esteriore simultaneamente in tutte quelle $B, B', \ldots$ che lo contengono; onde si potrà procedere come sopra ad esprimere ciascuna $B, B', \ldots$ in modo intero rispetto a T_2, e così via.

Seguitando in questo modo è chiaro che mediante le relazioni (10), (11) e le successive analoghe *si perverrà a dare all' espressione radico-razionale* X *una forma tale che nessuno dei* λ *radicali in essa contenuti si trovi mai sottoposto ad alcun segno di divisione,* o, come diremo brevemente, una forma intera rispetto a tutti i radicali (*radicale intera*).

956. Vediamo ora come da ogni equazione della forma: $X = 0$, in cui X è un'espressione radicale qualunque, si possano sempre eliminare tutti i segni radicali. Detto, come all'art. prec., $T = \sqrt[m]{A}$ uno qualunque dei radicali esteriori contenuti in X, si potrà primieramente porre l' equazione sotto la forma:

$$A_1\left(\sqrt[m]{A}\right)^{m-1} + A_2\left(\sqrt[m]{A}\right)^{m-2} + \ldots + A_m \equiv \varphi(T) = 0 \qquad (12)$$

essendo φ una funzione intera del grado $m - 1$, di T, i cui coefficienti sono delle espressioni radicali contenenti soltanto gli altri $\lambda - 1$ radicali $T_1, T_2, \ldots, T_{\lambda-1}$ che entravano in X.

Se ora $T, T', T'', \ldots, T^{(m-1)}$ sono tutte le m radici della equazione $x^m - A = 0$, cioè tutte le diverse possibili interpretazioni di $\sqrt[m]{A}$, si potrà all'equazione (12) sostituire la seguente:

$$\varphi(T)\varphi(T')\varphi(T'') \ldots \varphi(T^{(m-1)}) = 0. \qquad (13)$$

Ma il primo membro di quest'equazione, essendo intero e simmetrico rispetto alle radici della equazione $x^m - A = 0$, si esprimerà evidentemente come una funzione intera di A e dei coefficienti di φ, cioè delle $A_1, A_2, \ldots, A_m$. L' equazione (12) verrà così sostituita con un' equazione:

$$X' = 0$$

in cui X' è un'espressione radicale contenente soltanto gli altri $\lambda - 1$ radicali $T_1, T_2, \ldots, T_{\lambda-1}$, e si procederà allo stesso modo finchè siano eliminati tutti i radicali.

957. Se al momento di dover eliminare un certo radicale esteriore $T = \sqrt[m]{A}$ dall'equazione $\varphi(T) = 0$ già ridotta intera rispetto a T, accada che quest'equazione abbia la *forma binomia*:

$$A_1\left(\sqrt[m]{A}\right)^h - A_2\left(\sqrt[m]{A}\right)^k = 0,$$

l'eliminazione del radicale si farà immediatamente portando il secondo termine dell' equazione al secondo membro ed elevando

quindi i due membri alla potenza m. Riportando poi tutto al primo membro si otterrà così l'equazione:

$$A_1^m A^h - A_2^m A^k = 0$$

da cui è sparito il radicale T.

Ove i radicali da eliminarsi siano tutti quadratici, è chiaro che l'equazione (12) e tutte le analoghe consecutive si presenteranno appunto sotto la forma binomia.

958. L'eliminazione del radicale dall'equazione (12), o da una qualunque delle equazioni analoghe che si incontreranno nello svolgimento del calcolo, si può anche fare, senza alcun calcolo di funzioni simmetriche, col procedimento più semplice, e di indole parimenti generale, che qui esponiamo.

Supposto, per fissare le idee, $m = 3$, sia:

$$A_1T^2 + A_2T + A_3 = 0 \qquad (\alpha)$$

l'equazione da cui deve eliminarsi il radicale $T = \sqrt[3]{A}$. Moltiplicando quest'equazione prima per T e poi per T^2, se ne deducono le altre due:

$$A_1T^3 + A_2T^2 + A_3T = 0 \quad , \quad A_1T^4 + A_2T^3 + A_3T^2 = 0$$

le quali, per essere $T^3 = A$, possono anche scriversi:

$$A_1A + A_2T^2 + A_3T = 0 \quad , \quad A_1AT + A_2A + A_3T^2 = 0.$$

Queste due equazioni, unitamente alla (α), ci danno il sistema:

$$\begin{aligned} A_1T^2 + A_2T + A_3 &= 0 \\ A_2T^2 + A_3T + A_1A &= 0 \\ A_3T^2 + A_1AT + A_2A &= 0 \end{aligned}$$

lineare ed omogeneo rispetto alle tre quantità T^2, T, T^0, delle quali l'ultima è certamente diversa da zero. Dev'essere dunque (art. 432):

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ A_2 & A_3 & A_1A \\ A_3 & A_1A & A_2A \end{vmatrix} = 0 \qquad (\beta)$$

che è appunto l'equazione cercata.

959. Esempio. — All'equazione:

$$\sqrt[2]{a + \sqrt[3]{b}} + \sqrt[3]{b} = 0,$$

portando il secondo termine nel secondo membro ed elevando al quadrato, si sostituirà dapprima (art. 957) l'equazione:

$$\left(\sqrt[3]{b}\right)^2 - \sqrt[3]{b} - a = 0.$$

Eliminando poi il radicale $\sqrt[3]{b}$ col procedimento dell'art. prec. si troverà (essendo qui: $A_1 = 1$, $A_2 = -1$, $A_3 = -a$, $A = b$):

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -a \\ -1 & -a & b \\ -a & b & -b \end{vmatrix} = 0,$$

cioè sviluppando:

$$a^3 + 3ab - b^2 + b = 0.$$

960. Posto:

$$A_1T^2 + A_2T + A_3 = \varphi(T)$$

dove $T = \sqrt[3]{A}$, ripetendo lo stesso calcolo eseguito nella prima parte dell' art. 953, si sarebbe trovato:

$$\varphi(T)\varphi(T')\varphi(T'') = -\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ A_2 & A_3 & A_1A \\ A_3 & A_1A & A_2A \end{vmatrix} \qquad (\gamma)$$

d'onde appare che il risultato ottenuto col procedimento dell' articolo 958 è precisamente, come del resto è naturale, quello stesso cui si sarebbe giunti col calcolo delle funzioni simmetriche di T, T', T''.

Non ci tratterremo qui a dimostrare come la formola (γ) si estenda al caso di un radicale di indice qualunque, poichè avremo in seguito occasione (cfr. Cap. XIV, § 7°) d'incontrare la formola in questione come caso particolare di un'altra ancor più generale.

961. Sia:

$$x = \varphi(a, b, c, \ldots, e) \qquad (14)$$

un' espressione ottenuta operando sopra i numeri $a, b, c, \ldots, e$ colle quattro operazioni fondamentali e coll' estrazione di radice ad indice intero. Potremo considerare l' equazione:

$$X = x - \varphi(a, b, c, \ldots, e) = 0$$

ed eliminare successivamente, col metodo precedentemente esposto, tutti i radicali contenuti in X, cioè tutti i radicali contenuti in φ. Otterremo in tal modo evidentemente un risultato finale della forma:

$$\Phi(x, a, b, c, \ldots, e) = 0$$

dove Φ è simbolo di funzione razionale intera.

Il legame fra x e le $a, b, c, \ldots, e$, espresso dalla relazione (14) contenente dei radicali, può dunque sempre sostituirsi con una semplice equazione algebrica razionale intera fra le $x, a, b, c, \ldots, e$; cioè la (14) definisce sempre *x come una funzione algebrica delle* a, b, c, ..., e. Resta così dimostrato quanto si era asserito nella *Introduzione* (art. 8).

Note ed Esercizi.

1. Verificare che:

$$\frac{1+2\sqrt{2}}{1-2\sqrt{2}}=\frac{11+\sqrt{2}}{17},\quad \sqrt{\frac{}{-1+\sqrt{-3}}}=\frac{1+\sqrt{-3}}{\sqrt{2}}.$$

2. Ridurre sotto forma intera rispetto ai radicali l'espressione:

$$a+\sqrt[3]{a+\sqrt{a+b}}:a-\sqrt[3]{a-\sqrt{a+b}}.$$

3. Giustificare l'eguaglianza:

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

4. Eliminare i radicali dall'equazione:

$$\sqrt[3]{x+\frac{1}{\sqrt{x+y}}}+\sqrt[3]{x-\frac{1}{\sqrt{x+y}}}=1.$$

5. Dimostrare che per l'equazione binomia di grado primo:

$$x^n-\mathrm{A}=0 \qquad (a)$$

le $S_r, S_{r,r}, S_{r,r,r}, \ldots,$ sono tutte uguali a zero per r primo con n ad eccezione dell'ultima (la S con n indici uguali).

6. Per quali valori di k sussiste l'identità:

$$x^m-\mathrm{A}^k=(x-\omega^k{}_1)(x-\omega^k{}_2)\ldots(x-\omega^k{}_m)$$

essendo $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ le radici di $x^m-\mathrm{A}=0$?

7. Verificare che l'equazione di 5° grado:

$$16x^5-20x^3+5x-\alpha=0$$

è risoluta dalla formola:

$$2x=\sqrt[5]{\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}}+\sqrt[5]{\alpha-\sqrt{\alpha^2-1}}$$

in cui i valori dei due radicali di indice 5 sono da scegliersi in modo che il loro prodotto sia uguale ad 1.

8. Dimostrare che $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ non è un numero razionale.

§ 9.° — Sviluppo delle funzioni razionali in serie procedenti secondo le potenze della variabile. — Modulo minimo delle radici di un' equazione.

962. Sia $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ una funzione razionale qualsivoglia di x, già espressa come quoziente di funzioni intere:

$$f(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_{m-1}x^{m-1} + b_mx^m \tag{1}$$

$$\varphi(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n. \tag{2}$$

Se $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \ldots, \frac{1}{\gamma}$ sono le n radici, uguali o distinte, dell'equazione $\varphi(x) = 0$, si ha identicamente (art. 907):

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f(x)}{a_n\left(x - \frac{1}{\alpha}\right)\left(x - \frac{1}{\beta}\right)\ldots\left(x - \frac{1}{\lambda}\right)}$$

e, poichè (art. 916):

$$a_n = (-1)^n a_0 \alpha\beta \ldots \lambda,$$

si può anche scrivere:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f(x)}{a_0(1 - \alpha x)(1 - \beta x) \ldots (1 - \lambda x)}. \tag{3}$$

Se ora R è il modulo minimo delle radici di $\varphi(x) = 0$, cioè il più piccolo fra i numeri positivi $\operatorname{mod}\frac{1}{\alpha}$, $\operatorname{mod}\frac{1}{\beta}, \ldots, \operatorname{mod}\frac{1}{\lambda}$, affinchè si abbiano (art. 886) gli sviluppi convergenti:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - \alpha x} &= 1 + \alpha x + \alpha^2x^2 + \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{1}{1 - \lambda x} &= 1 + \lambda x + \lambda^2x^2 + \ldots, \end{aligned} \tag{4}$$

è necessario e sufficiente che sia:

$$\operatorname{mod}(\alpha x) < 1, \ \operatorname{mod}(\beta x) < 1, \ldots,$$

o, che è la stessa cosa:

$$\operatorname{mod} x < \frac{1}{\operatorname{mod}\alpha}, \quad \operatorname{mod} x < \frac{1}{\operatorname{mod}\beta}, \ldots,$$

cioè è necessario e sufficiente che sia $\operatorname{mod} x < R$.

Anzi, per $\operatorname{mod} x < R$, gli sviluppi (4) saranno tutti assolutamente convergenti, cosicchè al loro prodotto si potrà sostituire (art. 838) un'unica serie, del pari assolutamente convergente e procedente secondo le potenze intere e positive di x. Si avrà dunque, per

la (3), moltiplicando poi ulteriormente la serie così ottenuta pel polinomio finito $f(x)$, lo sviluppo in serie:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \dots \qquad (5)$$

dove il secondo membro è una serie convergente per mod$x <$ R. Pertanto:

Ogni funzione razionale di x *si può sempre sviluppare in una serie convergente, procedente secondo le potenze intere e positive di* x, *e tale sviluppo è valido per quei valori di* x *il cui modulo non superi il minimo fra i moduli delle radici dell'equazione che si ottiene uguagliando a zero il denominatore della funzione razionale ridotta alla sua più semplice espressione.*

963. È importante di aggiungere che *il cerchio di convergenza* (art. 889) *dello sviluppo* (5) *ha per raggio precisamente il minimo modulo* R *delle radici di* $\varphi(x) = 0$, *semprechè la frazione* f(x) : φ(x) *sia già ridotta alla più semplice espressione.* Ammesso infatti, se è possibile, che il raggio di convergenza di (5) fosse superiore ad R, e detta ω una radice, di modulo uguale ad R, dell'equazione $\varphi(x) = 0$, lo sviluppo $p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \dots$ rappresenterebbe (Cap. IX, § 13°, Nota 11) una funzione finita e continua per $x = \omega$. Ma si è già dimostrato che il valore di questo sviluppo coincide, *nell'interno* del cerchio di raggio R, col valore della frazione $f(x) : \varphi(x)$. Dovrà dunque la frazione $f(x) : \varphi(x)$ tendere ad un limite finito, quando il punto x si avvicini indefinitamente ad ω senza uscire dall'interno del cerchio. Ciò richiede che sia anche $f(\omega)=0$, poichè altrimenti, essendo per supposto $\varphi(x)=0$, la frazione $f(x) : \varphi(x)$ tenderebbe invece all'infinito. Le due funzioni $f(x)$ e $\varphi(x)$ avrebbero dunque la radice ω in comune, onde sarebbero entrambe divisibili per $x - \omega$, e la frazione si potrebbe semplificare, contro il supposto.

964. Effettuando, come si è detto, il prodotto degli sviluppi (4), si trova evidentemente:

$$\frac{1}{(1-\alpha x)(1-\beta x)\dots(1-\lambda x)} = 1 + V_1 x + V_2 x^2 + V_3 x^3 + \dots \qquad (6)$$

dove:

$$V_i = \sum_{q+r+\dots+t=i} \alpha^q \beta^r \dots \lambda^t \qquad (7)$$

è la così detta *funzione simmetrica completa di ordine* i, delle $\alpha, \beta, \dots, \lambda$.

Moltiplicando i due membri di (6) per $\frac{1}{a_0}(b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m)$ e confrontando con (3), si ha dunque, per determinare i coefficienti $p_0, p_1, p_2, \dots$ dello sviluppo (5), l'identità:

$$\frac{1}{a_0}\Big[b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_m x^m\Big]\Big[1 + V_1 x + V_2 x^2 + \dots\Big] = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \dots.$$

Eguagliando infatti i coefficienti di x^i nei due membri si trova:

$$a_0 p_i = b_0 V_i + b_1 V_{i-1} + \ldots + b_m V_{i-m} \quad , \quad \text{per } i \geqq m$$

ed (8)

$$a_0 p_i = b_0 V_i + b_1 V_{i-1} + \ldots + b_i V_0 \quad , \quad \text{per } i \leqq m.$$

965. Del resto, i coefficienti p_0, p_1, ... si possono determinare più direttamente, senza calcoli di funzioni simmetriche, osservando che la (5), quando si sostituiscano in essa per $f(x)$ e $\varphi(x)$ le loro espressioni (1) e (2), ci fornisce l'identità:

$$b_0+b_1x+\ldots+b_mx^m=(a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n)(p_0+p_1x+p_2x^2+\ldots).$$

Sviluppando il prodotto nel secondo membro ed uguagliando quindi i coefficienti delle stesse potenze di x nei due membri, si hanno infatti le infinite equazioni:

$$\begin{aligned} b_0 &= a_0 p_0 \\ b_1 &= a_1 p_0 + a_0 p_1 \\ b_2 &= a_2 p_0 + a_1 p_1 + a_0 p_2 \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

dalle quali si potranno calcolare *successivamente* i valori di p_0, p_1, p_2, ... È chiaro che per i abbastanza grande tutte queste equazioni sono rappresentate da

$$a_0 p_i + a_1 p_{i-1} + a_2 p_{i-2} + \ldots + a_n p_{i-n} = 0 \tag{9}$$

È questa una relazione lineare omogenea con coefficienti *fissi* (a_0, a_1, ..., a_n) che lega $n+1$ valori consecutivi della successione infinita: p_0, p_1, p_2, ..., a partire da un certo punto in poi. Ogni relazione di questo genere si dice *ricorrente* (*di ordine* n), e si dice *serie ricorrente* ogni serie $p_0 + p_1x + p_2x^2 + \ldots$ i cui coefficienti soddisfino, da un certo valore dell'indice i in poi, ad una relazione della forma (9) (*). Vediamo dunque che *ogni funzione razionale di* x *sviluppata secondo le potenze crescenti di* x *dà origine ad una serie ricorrente.*

966. Reciprocamente, è facile riconoscere che: *se la serie* $p_0 + p_1x + p_2x^2 + \ldots$ *è ricorrente, essa rappresenta, per tutti i valori di* x *compresi nel suo cerchio di convergenza, il valore di una certa funzione razionale di* x.

Infatti, se (9) sia la relazione ricorrente, coi coefficienti costanti a_0, a_1, ..., a_n, ed m sia il valore di i a cominciare dal quale essa è sempre soddisfatta, è chiaro che prendendo:

$$\begin{aligned} b_0 &= a_0 p_0 \\ b_1 &= a_1 p_0 + a_0 p_1 \\ &\ldots\ldots\ldots \\ b_m &= \ldots + a_1 p_{m-1} + a_0 p_m , \end{aligned}$$

(*) Tale relazione si suole chiamare la *scala di relazione* della serie ricorrente.

la funzione razionale $\frac{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_mx^m}{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n}$ sviluppata come all'art. prec. darà luogo precisamente alla serie data:

$$p_0 + p_1x + p_2x^2 + \ldots .$$

967. Se la funzione $f(x)$ non ha alcun divisore comune con $\varphi(x)$, lo sviluppo (5) avrà per raggio di convergenza R (art. 963) precisamente il modulo minimo delle radici dell'equazione $\varphi(x) = 0$. Ciò accadrà certamente se si prende p. es. $f(x) = 1$. Paragonando dunque questa determinazione di R con quella già data all'art. 891, si giunge al teorema seguente, che potrebbe anche servire al calcolo del modulo minimo delle radici di una data equazione.

Essendo data l'equazione di grado n:

$$\mathrm{a}_0 + \mathrm{a}_1\mathrm{x} + \mathrm{a}_2\mathrm{x}^2 + \ldots + \mathrm{a}_n\mathrm{x}^n = 0, \qquad (\alpha)$$

si determinino successivamente gli infiniti numeri $\mathrm{p}_0, \mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \ldots$ *mediante le relazioni*:

$$\mathrm{a}_0\mathrm{p}_0 = 1$$

$$\mathrm{a}_1\mathrm{p}_0 + \mathrm{a}_0\mathrm{p}_1 = 0$$

$$\mathrm{a}_2\mathrm{p}_0 + \mathrm{a}_1\mathrm{p}_1 + \mathrm{a}_0\mathrm{p}_2 = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

e la relazione ricorrente:

$$\mathrm{a}_0\mathrm{p}_i + \mathrm{a}_1\mathrm{p}_{i-1} + \mathrm{a}_2\mathrm{p}_{i-2} + \ldots + \mathrm{a}_n\mathrm{p}_{i-n} = 0.$$

Se col crescere indefinitamente di i *il rapporto* $\frac{\mathrm{mod}\,\mathrm{p}_i}{\mathrm{mod}\,\mathrm{p}_{i+1}}$ *tende al limite finito e determinato* R, *sarà* R *precisamente il modulo minimo delle radici dell'equazione* α.

968. *Se gl'infiniti numeri* $\mathrm{p}_0, \mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \ldots$ *sono legati da una relazione ricorrente*:

$$\mathrm{a}_0\mathrm{p}_i + \mathrm{a}_1\mathrm{p}_{i-1} + \mathrm{a}_2\mathrm{p}_{i-2} + \ldots + \mathrm{a}_n\mathrm{p}_{i-n} = 0 \qquad (\mathrm{A})$$

e tali che, col crescere di i *all'infinito, il rapporto* $\mathrm{p}_i : \mathrm{p}_{i+1}$ *tenda ad un limite finito* α, *sarà in ogni caso* α *una radice dell'equazione*:

$$\mathrm{a}_0 + \mathrm{a}_1\mathrm{x} + \mathrm{a}_2\mathrm{x}^2 + \ldots + \mathrm{a}_n\mathrm{x}^n = 0. \qquad (\mathrm{B})$$

Infatti, poichè:

$$\lim_{i=\infty} \frac{p_i}{p_{i+1}} = \alpha,$$

sarà anche evidentemente:

$$\lim_{i=\infty} \frac{p_i}{p_{i+2}} = \lim_{i=\infty} \left[\frac{p_i}{p_{i+1}} \cdot \frac{p_{i+1}}{p_{i+2}}\right] = \lim_{i=\infty} \frac{p_i}{p_{i+1}} \cdot \lim_{i=\infty} \frac{p_{i+1}}{p_{i+2}} = \alpha^2$$

e similmente in generale:

$$\lim_{i=\infty} \frac{p_i}{p_{i+t}} = \alpha^t.$$

Se dunque dividiamo la (A) per p_i e passiamo quindi al limite per $i = \infty$, otteniamo:

$$a_1 + a_0\alpha + a_2\alpha^2 + \ldots + a_n\alpha^n = 0,$$

c. d. d.

969. Confrontando questi risultati col teorema dell' art. 967 si può evidentemente aggiungere che *il numero α così determinato sarà una radice di modulo minimo dell'equazione* (B).

Esercizi.

1. Verificare lo sviluppo:

$$\frac{1}{1 - 3x + 2x^2} = 1 + 3x + (2^3 - 1)x^2 + (2^4 - 1)x^3 + \ldots.$$

2. Trovare la relazione ricorrente e la funzione razionale di x che danno origine allo sviluppo:

$$1 + (2^3 - 3)x + (2^4 - 4)x^2 + (2^5 - 5)x^3 + \ldots.$$

8. Applicare il teorema dell'art. 967 alla risoluzione dell'equazione:

$$2x^3 - 5x^2 + 4x - 1 = 0.$$

4. Supposto che siano ricorrenti le serie: $p_0 + p_1x + p_2x^2 + \ldots$, $q_0 + q_1x + q_2x^2 + \ldots$, dimostrare che sono tali anche le serie:

$$(p_0 + q_0) + (p_1 + q_1)x + (p_2 + q_2)x^2 + \ldots$$

$$p_0q_0 + (p_0q_1 + p_1q_0)x + (p_0q_2 + p_1q_1 + p_2q_0)x^2 + \ldots$$

e costruirne le scale di relazione mediante quelle delle due serie.

5. *Nello stesso supposto è anche convergente la serie:*

$$p_0q_0 + p_1q_1 + p_2q_2x^2 + p_3q_3x^3 + \ldots$$

(Cfr. *D'Ocagne: Mémoire sur les suites récurrentes.* Journal de l'École Polytechnique LXIV; dove il lettore potrà trovare molti altri ragguagli sull'argomento delle serie ricorrenti).

1. Studiare la frazione continua $\cfrac{1}{h + \cfrac{1}{h + \ldots}}$ in base alle relazioni ricorrenti $P_i = hP_{i-1} + P_{i-2}$ e $Q_i = hQ_{i-1} + Q_{i-2}$, che legano i numeratori e i denominatori delle successive ridotte $\frac{P_i}{Q_i}$.

§ 10.° — Le funzioni simmetriche complete. Teoremi sul modulo massimo delle radici di un' equazione.

970. Dalla formola (6) del § prec. risulta che *essendo* $\alpha , \beta , \gamma , \ldots , \lambda$ *le* n *radici dell'equazione*:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0, \qquad (1)$$

si ha l'identità:

$$\frac{a_0}{a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n}=1+V_1x+V_2x^2+\ldots \qquad (2)$$

dove:

$$V_i = \sum_{q+r+\ldots+t=i} \alpha^q\beta^r \ldots \lambda^t = [\alpha , \beta , \ldots , \lambda]^{(i)} \qquad (3)$$

è la funzione simmetrica completa, di ordine i, *delle* n *variabili* $\alpha , \beta , \ldots , \lambda$.

Considerando in luogo della (2) l' identità equivalente:

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n)(1 + V_1x + V_2x^2 + \ldots) = a_0$$

ed uguagliando i coefficienti delle potenze omonime di x nei due membri, si ottengono dunque le formole:

$$\begin{aligned} &a_0V_1 + a_1 = 0 \\ &a_0V_2 + a_1V_1 + a_2 = 0 \\ &a_0V_3 + a_1V_2 + a_2V_1 + a_3 = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_0V_n + a_1V_{n-1} + \ldots + a_{n-1}V_1 + a_n = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \qquad (4)$$

somigliantissime alle *formole di Newton* (art. 918-920), che permettono di calcolare successivamente le funzioni simmetriche complete $V_1 , V_2 , \ldots$ delle radici di un'equazione, di cui siano dati i coefficienti, colla stessa facilità con cui le formole di Newton permettono di calcolarne le funzioni simmetriche semplici $S_1 , S_2 , \ldots$.

971. Se si pone per brevità $\frac{a_1}{a_0} = p_1 , \frac{a_2}{a_0} = p_2 \ldots$, le (4) prendono la forma più semplice:

$$\begin{aligned} &V_1 + p_1 = 0 \\ &V_2 + p_1V_1 + p_2 = 0 \\ &V_3 + p_1V_2 + p_2V_1 + p_3 = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \qquad (5)$$

che è perfettamente simmetrica rispetto alle V e alle p, cosicchè *le* $p_1, p_2, p_3, \ldots$ *sono a loro volta le funzioni simmetriche complete delle radici dell'equazione*:

$$x^n + V_1 x^{n-1} + V_2 x^{n-2} + \ldots + V_n = 0.$$

Risolvendo le (5) rispetto alle $p_1, p_2, p_3, \ldots$ o rispetto alle $V_1, V_2, V_3, \ldots$, si trova:

$V_1=-p_1$	$p_1=-V_1$
$V_2=p_1^2-p_2$	$p_2=V_1^2-V_2$
$V_3=-p_1^3+2p_1p_2-p_3$	$p_3=-V_1^3+2V_1V_2-V_3$
$V_4=p_1^4-3p_1^2p_2+2p_1p_3+p_2^2-p_4$	$p_4=V_1^4-3V_1^2V_2+2V_1V_3+V_2^2-V_4$.

Come si vede, le funzioni simmetriche *complete* hanno sulle funzioni simmetriche *semplici* il vantaggio che i coefficienti p_1, $p_2, p_3, \ldots$ si esprimono con funzioni intere, *a coefficienti numerici interi*, delle $V_1, V_2, V_3, \ldots$.

972. Poichè V_i è la somma di tutti quei prodotti delle variabili $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ che sono della dimensione i, è chiaro che *il simbolo* $[\alpha, \beta, \ldots, \lambda]^{(i)}$ *rappresenta l' ordinario sviluppo* (art. 224) *della potenza polinomiale* $(\alpha+\gamma+\ldots+\lambda)^i$, *nel quale però tutti i coefficienti polinomiali siano stati soppressi e sostituiti con l'unità.*

Dalla definizione di V_i segue poi con pari evidenza che:

$$\begin{aligned}[\alpha, \ldots, \lambda, x, \ldots, z]^{(i)} = [\alpha, \ldots, \lambda]^{(i)} + [\alpha, \ldots, \lambda]^{(i-1)}[x, \ldots, z] \\ + [\alpha, \ldots, \lambda]^{(i-2)}[x, \ldots, z]^{(2)} + \ldots + [x, \ldots, z]^{(i)}.\end{aligned} \quad \text{(A)}$$

973. Sono anche da notarsi, come specialmente utili nel calcolo delle funzioni simmetriche complete, le due formole seguenti:

$$[x, y, z, \ldots, t]^i = [y, z, \ldots, t]^{(i)} + x[x, y, z, \ldots, t]^{(i-1)} \quad \text{(B)}$$

ed

$$[x, z, \ldots, t]^i - [y, z, \ldots, t]^i = (x-y)[x, y, z, \ldots, t]^{(i-1)}. \quad \text{(C)}$$

Di queste due formole la prima è pressochè evidente.

Quanto alla seconda, essa si deduce dalla prima sottraendo dalla (B) la stessa (B) in cui si sia fatto preventivamente lo scambio di x e di y.

974. *Se i numeri* r, s, ..., u *hanno i loro moduli inferiori all'unità, si ha*:

$$\lim_{i=\infty}[1, r, s, \ldots, u]^{(i)} = \frac{1}{(1-r)(1-s)\ldots(1-u)}. \quad \text{(D)}$$

Infatti la formola (6) dell'art. 964 ci dà:

$$\frac{1}{(1-\alpha x)(1-\beta x)\ldots(1-\lambda x)} = \lim_{i=\infty}\{1+[\alpha x, \ldots, \lambda x]+\ldots+[\alpha x, \ldots, \lambda x]^{(i)}\}$$

per tutti i valori di x soddisfacenti alle disuguaglianze:

$$\mathrm{mod}(\alpha x) < 1\,,\ \mathrm{mod}(\beta x) < 1\,,\ \ldots,\ \mathrm{mod}(\lambda x) < 1,$$

ossia, che è la stessa cosa (art. 972):

$$\frac{1}{(1-\alpha x)(1-\beta x)\ldots(1-\lambda x)}=\lim_{i=\infty}[1\,,\ \alpha x\,,\ \beta x\,,\ \ldots\,,\ \lambda x]^{(i)}$$

il che appunto dimostra l'asserto.

975. *Se la successione* $p_0\,, p_1\,, p_2\,, \ldots$ *soddisfa alla relazione ricorrente di ordine* n:

$$a_0p_i+a_1p_{i-1}+a_2p_{i-2}+\ldots+a_np_{i-n}=0\quad,\quad(i=n\,,\,n+1\,,\ldots)\tag{5}$$

senza però soddisfare ad una relazione ricorrente di ordine inferiore, e se l'equazione:

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0\tag{6}$$

ha una sola radice α *(semplice o multipla) di modulo massimo, il rapporto* $p_{i+1}:p_i$ *tenderà precisamente al limite* α*, quando si faccia crescere l'indice* i *all'infinito.*

Cominciamo dall'osservare che, *posto*:

$$\begin{aligned}A_0&=a_0p_0\\ A_1&=a_0p_1+a_1p_0\\ A_2&=a_0p_2+a_1p_1+a_2p_0\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ A_{n-1}&=a_0p_{n-1}+a_1p_{n-2}+\ldots+a_{n-1}p_0\end{aligned}\tag{7}$$

dire che la successione $p_0\,, p_1\,, p_2 \ldots$ *non soddisfa ad alcuna relazione ricorrente di ordine inferiore ad* n*, equivale a dire che la frazione razionale* (cfr. art. 965):

$$\frac{A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots+A_{n-1}x^{n-1}}{a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n}=p_0+p_1x+p_2x^2+\ldots\tag{8}$$

è irriducibile. Infatti, se i numeri $p_0\,, p_1\,, p_2 \ldots$ soddisfacessero, da un certo punto in poi, ad una relazione ricorrente di ordine $n-1$:

$$a'_0p_i+a'_1p_{i-1}+\ldots+a'_{n-1}p_{i-n+1}=0\,,$$

si avrebbe (art. 966) per certi valori dei numeri $b_0\,, b_1\,, \ldots\,, b_m$;

$$\frac{b_0+b_1x+\ldots+b_mx^m}{a'_0+a'_1x+\ldots+a'_{n-1}x^{n-1}}=p_0+p_1x+p_2x^2+\ldots,$$

sicchè la frazione (8) sarebbe evidentemente riducibile. Reciprocamente, se la frazione (8) fosse riducibile, i coefficienti del suo sviluppo in serie, che non può farsi (art. 895) che in un sol modo, soddisferebbero (art. 965) ad una relazione ricorrente di ordine inferiore ad n.

Ciò premesso, se $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda$ sono le n radici della (8), si ha (art. 964):

$a_0 p_i = A_0[\alpha, \beta, \dots, \lambda]^{(i)} + A_1[\alpha, \beta, \dots, \lambda]^{(i-1)} + \dots + A_{n-1}[\alpha, \beta, \dots, \lambda]^{(i-n+1)}$, (9)

d'onde segue:

$$\frac{p_{i-1}}{p_i} = \alpha \cdot \frac{A_0\left[1, \frac{\beta}{\alpha}, \dots, \frac{\lambda}{\alpha}\right]^{(i-1)} + A_1\alpha^{-1}\left[1, \frac{\beta}{\alpha}, \dots, \frac{\lambda}{\alpha}\right]^{(i-2)} + \dots}{A_0\left[1, \frac{\beta}{\alpha}, \dots, \frac{\lambda}{\alpha}\right]^{(i)} + A_1\alpha^{-1}\left[1, \frac{\beta}{\alpha}, \dots, \frac{\lambda}{\alpha}\right]^{(i-1)} + \dots} \qquad (10)$$

dove ci è lecito ritenere che α sia l'unica radice di modulo massimo, e quindi anche che i rapporti $\frac{\beta}{\alpha}, \dots, \frac{\lambda}{\alpha}$ abbiano i loro moduli inferiori all'unità, *semprechè α sia radice semplice.*

Passando ora al limite per $i = \infty$, la (10) ci dà appunto, come si doveva dimostrare:

$$\lim_{i=\infty} \frac{p_{i-1}}{p_i} = \alpha,$$

poichè il numeratore ed il denominatore della frazione che sta nel secondo membro, tendono (art. 974), per $i = \infty$, allo stesso limite:

$$\frac{A_0 + A_1\alpha^{-1} + A_2\alpha^{-2} + \dots + A_{n-1}\alpha^{-(n-1)}}{\left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right)\left(1 - \frac{\gamma}{\alpha}\right)\dots\left(1 - \frac{\lambda}{\alpha}\right)}.$$

Potrebbe fare eccezione soltanto il caso in cui questo limite comune fosse uguale a zero. Ma allora α^{-1} sarebbe radice comune al denominatore e al numeratore della frazione generatrice (8), la quale sarebbe per conseguenza riducibile, contro il supposto (*).

Note.

1. I valori delle funzioni simmetriche semplici:

$$S_i = \alpha^i + \beta^i + \dots + \lambda^i$$

delle n radici dell'equazione:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

si possono dedurre da quelli delle funzioni simmetriche complete:

$$V_i = [\alpha, \beta, \dots, \lambda]^{(i)}$$

(*) La dimostrazione qui data cade in difetto quando α sia radice multipla. Il teorema seguita però a sussistere anche in questo caso (cfr. *Rendiconto della R. Acc. delle Scienze di Napoli*, Luglio 1895).

mediante le relazioni:

$$a_0S_1 = na_0V_1 + (n-1)a_1$$

$$a_0S_2 = na_0V_2 + (n-1)a_1V_1 + (n-2)a_2$$

. . . .

$$a_0S_i = na_0V_i + (n-1)a_1V_{i-1} + (n-2)a_2V_{i-2} + \dots + a_{n-1}V_{i-n+1}$$

. . . .

(Cfr. *Crocchi: Giornale di Battaglini*, Vol. XVIII, 1880).

2. Se l'equazione $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0$ ha tutte le radici reali e positive, il rapporto $p_{i+1} : p_i$, definito all'art. 975, tenderà per $i = \infty$, *sempre per eccesso*, alla massima radice positiva (Cfr. *Rend. Acc. Scienze Napoli*, *l. c.*).

CAPITOLO XIII.

TEORIA GENERALE DELLA DIVISIBILITÀ E DELL' ELIMINAZIONE.

§ 1.° — Quoziente e resto di due funzioni intere. Nozione di campo di razionalità.

976. Le cose dette all'art. 541 circa il quoziente ed il resto di due funzioni intere $f(x)$ e $\varphi(x)$ a coefficienti razionali sussistono del tutto inalterate se i coefficienti di $f(x)$ e $\varphi(x)$ siano anche numeri irrazionali od imaginarii. Cioè: *se* $\mathrm{f(x)}$ *e* $\varphi(\mathrm{x})$ *sono due funzioni intere di* x *a coefficienti complessi, risp. dei gradi* m *ed* n $(\mathrm{m} \geqq \mathrm{n})$, *esistono due funzioni intere* $\mathrm{Q(x)}$ *ed* $\mathrm{R(x)}$, *la prima del grado* $\mathrm{m - n}$, *la seconda di grado inferiore ad* n, *tali da aversi identicamente* :

$$\mathrm{f(x) = Q(x)f(x) + R(x).}$$

Tali funzioni $\mathrm{Q(x)}$ *ed* $\mathrm{R(x)}$ *si possono determinare soltanto in un unico modo e si chiamano risp. il quoziente ed il resto della divisione di* $\mathrm{f(x)}$ *per* $\varphi(\mathrm{x})$.

È però importante di notare che i coefficienti di $Q(x)$ ed $R(x)$ si ottengono in ogni caso, come è manifesto dalla dimostrazione stessa dell' art. 541, operando sui coefficienti di $f(x)$ e $\varphi(x)$ colle sole quattro operazioni fondamentali di moltiplicazione, addizione, sottrazione e divisione. Per conseguenza :

1°) Se i coefficienti di f e φ sono tutti numeri razionali, anche i coefficienti di Q ed R saranno numeri razionali.

2°) Se i coefficienti di f e φ sono numeri reali (razionali od irrazionali), anche i coefficienti di Q ed R saranno numeri reali.

3°) I coefficienti di Q ed R soltanto allora potranno essere affetti da imaginarietà, quando lo siano i coefficienti di f e φ.

Queste proprietà si possono però riassumere in unico enunciato anche più generale mediante la nozione, che ora passiamo ad introdurre, di *campo di razionalità*.

977. Se un aggregato di infiniti numeri gode della proprietà che il prodotto, la somma, la differenza, il quoto di due qualunque fra essi sia sempre un numero appartenente allo stesso aggregato, si suol dire che questo aggregato costituisce un *campo di razionalità*.

Così, ad esempio, l'insieme di tutti i numeri razionali, che d'ora innanzi chiameremo di preferenza a scanso di equivoco numeri commensurabili (cfr. art. 313), costituisce un campo di razionalità, poichè il prodotto, la somma, ecc. di due numeri commensurabili

è pure evidentemente un numero commensurabile. Lo stesso dicasi dell' insieme di tutti i numeri reali e dell' insieme di tutti i numeri complessi. Invece, l'insieme dei soli numeri incommensurabili non costituisce un campo di razionalità, poichè il prodotto di due numeri incommensurabili, come p. es. $(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})$, può anche essere commensurabile.

Come altro esempio di campo di razionalità possiamo citare l'insieme di tutti i numeri della forma:

$$a + b\sqrt{2}$$

ove a, b sono numeri commensurabili. Il lettore riconoscerà infatti facilmente come il prodotto, la somma, ecc. di due numeri di questa forma si possa sempre ridurre a questa stessa forma.

978. *Se* C *è un campo di razionalità, esso conterrà necessariamente fra i suoi elementi i numeri* 1 *e* 0.

Infatti, se α è un numero qualunque di C, dovrà il campo C contenere, per la sua stessa definizione, il quoto $\frac{\alpha}{\alpha}$ e la differenza $\alpha - \alpha$, cioè appunto i numeri 1 e 0.

979. Più generalmente: *ogni campo di razionalità contiene entro di sè l'intiero campo di razionalità formato dall'insieme di tutti i numeri commensurabili (positivi e negativi).*

Invero, poichè C contiene i numeri 1 e 0, conterrà anche i numeri $1+1$, $1+1+1$, ... ed i numeri $0-1$, $0-1-1$, $0-1-1-1$, ..., cioè tutti i numeri interi positivi o negativi. E per conseguenza, se α e β sono due interi qualunque, conterrà anche il loro quoto $\frac{\alpha}{\beta}$ cioè appunto ogni numero commensurabile.

980. Se un certo insieme H di numeri non costituisce un campo di razionalità, l'insieme di tutti i numeri che si possono ottenere operando fra i numeri di H colle quattro operazioni fondamentali, formerà però evidentemente un campo di razionalità che indicheremo con [H] e chiameremo per brevità il *campo di razionalità definito dai numeri di* H.

Così ad esempio il simbolo [1] potrà rappresentare il campo di razionalità dei numeri commensurabili; giacchè ogni numero commensurabile si può dedurre dal numero 1 (cfr. art. 978 e 979) mediante le quattro operazioni fondamentali. Il simbolo $[1, \sqrt{2}]$ rappresenterà, al pari del simbolo equivalente più semplice $[\sqrt{2}]$, il campo di razionalità formato (cfr. art. 977) dall'insieme di tutti i numeri della forma:

$$a + b\sqrt{2}$$

con a, b commensurabili.

Dopo queste poche nozioni sui campi di razionalità è senz'altro manifesto che tutte le osservazioni da noi fatte all'art. 976 si trovano assorbite nel seguente enunciato generale: *i coefficienti del quoziente e del resto della divisione fra due funzioni intere* f(x)

e $\varphi(\mathrm{x})$ *appartengono al campo di razionalità definito dai coefficienti di* $\mathrm{f}(\mathrm{x})$ *e* $\varphi(\mathrm{x})$.

Note ed Esercizi.

1. Se H è un certo insieme di numeri, il campo di razionalità [H] è contenuto in ogni campo di razionalità che contenga tutti i numeri di H.

2. Dimostrare che il campo di razionalità $[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$ è costituito da tutti e soli i numeri della forma:

$$a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6}$$

essendo a, b, c, d, numeri commensurabili.

3. Dimostrare che il campo $\left[\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}\right]$ è rappresentato dal tipo generico:

$$a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} + \sqrt{2}\left(\alpha + \beta\sqrt[3]{2} + \gamma\sqrt[3]{4}\right).$$

essendo a, b, c, α, β, γ numeri commensurabili.

4. Dimostrare che il campo di razionalità $[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$ non contiene $\sqrt[3]{2}$, nè $\sqrt[2]{3}$.

§ 2.° — Divisibilità delle funzioni intere rispetto ad un dato campo di razionalità.

981. Essendo $\mathrm{F}(x)$ e $\Phi(x)$ due funzioni intere a coefficienti qualisivogliano, razionali, reali o complessi, si dirà, precisamente come nel caso di coefficienti razionali, che $\Phi(x)$ è un ***divisore*** di $\mathrm{F}(x)$, se esiste una funzione intera $\mathrm{Q}(x)$ tale da aversi identicamente:

$$\mathrm{F}(x) = \mathrm{Q}(x)\Phi(x).$$

Si dirà poi che due funzioni intere sono ***prime*** o ***non-prime*** fra loro, secondochè esse non ammettano od ammettano qualche divisore comune ***variabile*** (cioè almeno di 1° grado). Si è detto ***variabile*** perchè ogni funzione costante (cioè di grado zero) si può considerare anche qui (cfr. art. 543) come divisore di qualsiasi funzione intera.

982. Ciò premesso, date due funzioni intere $f(x)$ ed $f_1(x)$, per riconoscere se esse siano o non siano prime fra loro, si procederà precisamente come all'art. 545, cioè si costruirà la successione di funzioni intere:

$$f(x)\,,\ f_1(x)\,,\ f_2(x)\,,\ \ldots,\ f_{r+1}(x)\,,\ f_{r+2}(x) = \mathrm{Cost.^e} = \mathrm{C} \qquad (1)$$

ognuna delle quali è il resto della divisione dell'antiprecedente per la precedente, e l'ultima, $f_{r+2}(x)$, è una semplice costante. E si avrà anche qui che: *se la costante* C *è diversa da zero, le due funzioni* f *e* φ *sono prime fra loro; se sia invece* C=0, *esse hanno certamente qualche divisore comune variabile*, *e precisamente a-*

vranno a divisori comuni la funzione $f_{r+1}(x)$, *nonchè ogni divisore della* $f_{r+1}(x)$.

983. Quando $C=0$, la funzione $f_{r+1}(x)$ si chiama il *massimo comun divisore* di $f(x)$ ed $f_1(x)$. Dalla costruzione stessa delle (1) segue pertanto (cfr. art. 980) che *il massimo comun divisore di* $f(x)$ *ed* $f_1(x)$ *ha i suoi coefficienti appartenenti al campo di razionalità definito dai coefficienti di* $f(x)$ *ed* $f_1(x)$.

Di quì il corollario: *se due funzioni* $f(x)$ *ed* $f_1(x)$ *hanno un divisore comune con coefficienti estranei al campo di razionalità definito dai loro propri coefficienti, esse hanno anche un divisore comune variabile con coefficienti appartenenti al campo stesso definito dai loro coefficienti.* Quindi in particolare:

a) *Se due funzioni intere di* x *a coefficienti commensurabili non hanno alcun divisore comune a coefficienti commensurabili, esse non hanno neanche alcun divisore comune a coefficienti reali o complessi.*

b) *Se due funzioni intere di* x *a coefficienti reali non hanno alcun divisore comune a coefficienti reali, esse non possono neanche avere un divisore comune a coefficienti complessi.*

984. *Se una funzione intera è un divisore del prodotto di due funzioni intere ed è prima con l'una di esse, dovrà essere un divisore dell'altra.*

La dimostrazione è identica a quella dell' art. 546 per il caso di funzioni a coefficienti commensurabili.

985. Dalle cose dette all'art. 983 risultava che *se due funzioni intere sono prime fra loro nel campo di razionalità definito dai loro coefficienti, esse resteranno sempre prime fra loro comunque si estenda il campo di razionalità.*

Questa osservazione è importante, poichè essa ci mette in evidenza che *la proprietà che possono avere due funzioni intere di essere prime (o non-prime) fra loro è indipendente dal campo di razionalità nel quale s'intendono scelti i coefficienti dei loro possibili divisori.* Egli è per tal ragione che si è stimato inutile parlare di funzioni prime fra loro *rispetto ad un dato campo di razionalità* e si è invece parlato soltanto di funzioni prime fra loro in senso assoluto, cioè rispetto al campo più generale di numeri, quello dei numeri complessi.

986. La cosa è però ben diversa per quanto riguarda il concetto di funzione *prima in sè stessa,* poichè una stessa funzione potrà non avere alcun divisore nel campo di razionalità definito dai propri coefficienti, ma potrà averne qualcuno in un campo di razionalità più esteso.

Così, ad esempio, la funzione intera x^2-3, che è prima, cioè non ha alcun divisore, nel campo dei numeri commensurabili, ammette invece dei divisori a coefficienti reali, poichè si ha identicamente:

$$x^2-3=(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3}).$$

Similmente la funzione x^2+3 che è prima anche nel campo dei

numeri reali, cessa di essere tale nel campo dei numeri complessi, poichè in questo campo si ha identicamente:

$$x^2+3=(x+i\sqrt{3})(x-i\sqrt{3}).$$

Noi diremo pertanto che una funzione intera è *prima rispetto ad un certo campo di razionalità* C, se essa non ha alcun divisore con coefficienti appartenenti al campo C.

Avvertiamo però, una volta per sempre, che noi non ci occuperemo che di campi di razionalità i quali contengano già tutti i coefficienti della funzione di cui si tratta.

È senz'altro chiaro che le funzioni di 1° grado, il cui tipo più generale è $ax+b$, sono prime in qualsivoglia campo di razionalità.

987. *Nel campo di razionalità dei numeri complessi non esistono funzioni prime all'infuori delle funzioni di* 1.° *grado.*

Sappiamo infatti (art. 908) che una funzione intera di grado superiore al primo si può sempre spezzare nel prodotto di funzioni intere di 1° grado a coefficienti complessi.

988. *Nel campo dei numeri reali le sole funzioni prime sono le funzioni di* 1° *grado e le funzioni di* 2° *grado a radici imaginarie.*

Infatti, ogni funzione a coefficienti reali si può sempre decomporre (art. 946) in un prodotto di funzioni intere a coefficienti reali di 1° o di 2° grado. D'altra parte una funzione di 2° grado ax^2+bx+c con entrambe le radici α e β reali darebbe luogo all'identità:

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta),$$

epperò non sarebbe prima nel campo dei numeri reali.

989. Nel campo dei numeri commensurabili esistono invece funzioni prime di gradi quanto si voglia elevati.

Così, ad esempio, se p è un numero primo grande quanto si voglia, la funzione:

$$x^p+x^{p-1}+x^{p+2}+\ldots+x+1$$

è prima nel campo dei numeri commensurabili; poichè è stato dimostrato che essa non si può spezzare identicamente nel prodotto di funzioni, di grado inferiore, a coefficienti del pari commensurabili.

990. *Se una funzione f, prima nel campo di razionalità* C, *divide il prodotto* FΦ *di due funzioni con coefficienti appartenenti a* C, *dovrà essere un divisore di* F *o di* Φ.

Infatti, se f non è divisore di F, sarà prima con F, giacchè il massimo comun divisore di f ed F, avendo i suoi coefficienti nel campo C, non potrebbe essere un divisore di f che è prima in C. Ma se f è prima con F, dovrà dividere Φ (art. 984), poichè divide il prodotto FΦ.

991. *Se una funzione prima nel campo di razionalità* C *divide il*

prodotto di più funzioni prime nello stesso campo C, *dovrà coincidere con una di esse a meno di un fattore costante.*

Infatti, se f non coincide, a meno di un fattore costante, colla prima delle funzioni che compongono il prodotto, non potrà neanche dividerla, e quindi, per il teorema precedente, dividerà il prodotto delle altre, ecc.

992. Una funzione che non sia prima in un certo campo C, ammette come divisore almeno una funzione prima, che sarà uno fra quelli dei suoi divisori variabili che ha il più piccolo grado. Per tal guisa si concepisce che una funzione non prima potrà sempre decomporsi in un prodotto di funzioni prime.

Infatti, se una funzione F non è prima, ammetterà almeno un divisore primo. Se il quoziente di F per questo divisore non è primo, ammetterà esso pure almeno un divisore primo, e così via. Ma i gradi dei quozienti vanno successivamente diminuendo; quindi si perverrà ad una funzione prima e la funzione F si troverà così decomposta in un prodotto di funzioni prime.

993. *Tale decomposizione, non tenendo conto dei fattori costanti, non può farsi che in un unico modo.* Suppongasi infatti, se è possibile, che si sia riusciti a decomporre una stessa funzione F una volta nel prodotto:

$$G \cdot H \cdot I \ldots$$

di funzioni prime, e un'altra volta nel prodotto:

$$G' \cdot H' \cdot I' \ldots$$

di funzioni pure prime, dove le funzioni $G, H, I, \ldots$ possono essere uguali fra loro in tutto od in parte, e così le $G', H', I', \ldots$. Allora la funzione G, dividendo il prodotto $G \cdot H \cdot I \ldots$, dividerà anche il prodotto $G' \cdot H' \cdot I' \ldots$ che forma la stessa funzione F. Ma la funzione G è prima; quindi dev' essere uguale, (art. 991) ad una delle $G', H', I', \ldots$, per esempio alla G'. Allora i prodotti $H \cdot I \ldots$ ed $H' \cdot I' \ldots$ formano una stessa funzione, e quindi, come prima, la funzione H dev'essere uguale ad una delle funzioni H', $I', \ldots$, p. es. alla H', e così via. Dunque i prodotti $G \cdot H \cdot I \ldots$ e $G' \cdot H' \cdot I' \ldots$ debbono essere composti cogli stessi fattori primi.

994. Converrà però, a scanso di equivoco, enunciare il risultato dell'art. prec. come segue: *fissato un certo campo di razionalità* C, *ogni funzione intera data di* x *si può decomporre in un unico modo in un prodotto di funzioni intere che godano delle due proprietà:* 1°) *di avere per coefficienti dei numeri appartenenti al campo* C; 2°) *di essere prime rispetto a questo campo di razionalità.*

Variando il campo di razionalità, può variare, come si è già notato (art. 986) la decomposizione della funzione data in funzioni prime; cosicchè, a maggiore schiarimento di quanto si è enunciato agli articoli 985 e 993, si può aggiungere quanto segue: *se in luogo del campo di razionalità* C *al quale appartengono i coeffi-*

cienti di due funzioni intere $f(x)$ *ed* $f_1(x)$, *si voglia considerare un campo di razionalità più esteso* C′ (*che comprenda però entro di sè il campo* C) *ciascuna delle funzioni* $f(x)$ *ed* $f_1(x)$ *potrà acquistare dei divisori primi che non aveva nel campo* C. *Però il loro massimo comun divisore resterà inalterato.*

995. Notiamo ancora che alcune volte in luogo della locuzione *funzione prima* si usa la locuzione *funzione irreduttibile.* Quando si dice, senz'aggiungere altri schiarimenti o restrizioni, che una funzione intera è *irreduttibile,* si intende dire che essa è *prima* nel campo di razionalità definito dai suoi coefficienti.

996. Prima di chiudere questo § osserveremo che la ricerca del massimo comun divisore di due funzioni intere $F(x)$ ed $F_1(x)$ è indispensabile per ridurre alla sua più semplice espressione una funzione razionale $R(x)$ data e già ridotta alla forma (cfr. articolo 407):

$$R(x) = \frac{F_1(x)}{F(x)}.$$

Invero se $D(x)$ sia il massimo comun divisore di $F_1(x)$ ed $F(x)$, si potrà scrivere identicamente:

$$F_1(x) = D(x)\cdot f_1(x) \quad , \quad F(x) = D(x)\cdot f(x),$$

essendo ora $f_1(x)$ ed $f_2(x)$ prime fra loro, e quindi:

$$R(x) = \frac{f_1(x)}{f(x)}. \qquad (\alpha)$$

997. È questa l'espressione più semplice di $R(x)$, poichè *se*

$$R(x) = \frac{\Phi_1(x)}{\Phi(x)} \qquad (\beta)$$

è una qualunque delle espressioni di $R(x)$ *sotto forma di quoto di funzioni intere, dovrà essere identicamente*:

$$\Phi_1(x) = Q(x)f_1(x) \quad , \quad \Phi(x) = Q(x)f(x),$$

essendo $Q(x)$ *una certa funzione intera di* x.

Dalle (α) e (β) segue infatti:

$$f_1(x)\Phi(x) = f(x)\Phi_1(x). \qquad (\gamma)$$

Quest' identità ci dice che $f_1(x)$ divide il prodotto $f(x)\Phi_1(x)$. Ma essa è prima con $f(x)$; onde dovrà dividere (art. 984) il fattore $\Phi_1(x)$. Sarà dunque appunto:

$$\Phi_1(x) = Q(x)f_1(x)$$

e quindi poi anche, come si vede dalla sostituzione di questa espressione di $\Phi_1(x)$ in (γ):

$$\Phi(x) = Q(x)f(x),$$

c. d. d.

Note ed Esercizi.

1. Dimostrare che se una funzione intera di x a coefficienti commensurabili è divisibile per $x+\sqrt{7}$, essa è anche divisibile per $x-\sqrt{7}$.

2. Si è già notato, come del resto dimostreremo in seguito (cfr. Capitolo XV, § 2°, Note) che la funzione intera $x^{p-1}+x^{p-2}+\ldots+x+1$ (ove p è un numero primo) non ammette alcun divisore a coefficienti commensurabili.

Sapendo ciò, decomporre la funzione x^p-1 nei suoi fattori primi a coefficienti commensurabili. E dimostrare similmente che, decomponendo la funzione $x^{2p}-1$ nei suoi fattori primi a coefficienti commensurabili, si trova come risultato:

$$x^{2p}-1=(x+1)(x-1)(x^{p-1}+x^{p-2}+x^{p-3}+\ldots+x+1)$$
$$\times(x^{p-1}-x^{p-2}+x^{p-3}-x^{p-4}+\ldots+1).$$

3. Aggiungeremo qui alcune osservazioni assai importanti per riconoscere se una data equazione $f(x)=0$ a coefficienti commensurabili sia o no irreduttibile nel campo dei numeri commensurabili, cioè se $f(x)$ sia o no prima nel campo di questi numeri. Eseguendo sull'equazione la trasformazione $x=ky$ ove k è un numero commensurabile convenientemente scelto, si può sempre fare in modo (cfr. Cap. XIV, § 3°) che il primo coefficiente in $f(x)$ abbia il valore 1 e gli altri coefficienti riescano numeri interi; ed è chiaro che, se l'equazione $f(x)=0$ è riduttibile, lo sarà anche la trasformata e reciprocamente. Possiamo dunque ritenere:

$$f(x)=x^{\mu}+a_1x^{\mu-1}+a_2x^{\mu-2}+\ldots+a_{\mu},$$

essendo $a_1, a_2, \ldots, a_{\mu}$ numeri interi; e se $f(x)$ sia riduttibile, cioè, se si abbia p. es.:

$$f(x)=\varphi(x)\cdot\psi(x), \tag{1}$$

essendo $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ due funzioni intere di gradi inferiori m ed n potremo ritenere che anche il primo coefficiente di $\varphi(x)$ abbia il valore 1; poichè se avesse il valore α, basterebbe dividere per α tutti i coefficienti di $\varphi(x)$ e moltiplicare per α tutti quelli di $\psi(x)$. Allora però anche il primo coefficiente di $\psi(x)$ avrà il valore 1, come si riconosce uguagliando in (1) i coefficienti di x^{μ} nei due membri.

Si ha ora il seguente importante teorema dovuto a *Gauss* (*): *se una funzione intera di* x *a coefficienti interi e col primo coefficiente uguale all'unità è identicamente uguale al prodotto di due funzioni intere di* x *a coefficienti razionali e col primo coefficiente uguale all'unità, anche gli altri coefficienti di quest'ultime funzioni saranno numeri interi.*

In virtù di questo teorema basterà dunque ricercare se sia possibile soddisfare alla identità (1) prendendo per coefficienti di φ e ψ dei numeri interi; e ciò si potrà sempre accertare, come non è difficile riconoscere, mediante un numero limitato, *assegnabile,* di tentativi.

4. Per dimostrare il teorema ora citato di Gauss, giova premettere il lemma seguente.

Se $\varphi(x)$ *e* $\psi(x)$ *sono due funzioni intere di* x *con coefficienti interi e se il prodotto* $\varphi(x).\psi(x)$, *sviluppato ed ordinato secondo le potenze di* x, *ha tutti i suoi coefficienti divisibili per un certo numero primo* p, *l'una o l'altra delle due funzioni* $\varphi(x)$, $\psi(x)$ *avrà tutti i suoi coefficienti divisibili per* p.

(*) *Disquisitiones arithmeticae*, art. 42.

Siano infatti:

$$\varphi(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$$
$$\psi(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m$$

le due funzioni, e, supponendo, sè è possibile, il contrario di quanto si è enunciato, siano a_{n-i} e b_{m-k} i primi coefficienti di $f(x)$ e $\varphi(x)$ non divisibili per p, a contare dall'ultimo, cosicchè a_{n-i+1}, $a_{n-i+2}, \ldots, b_{m-k+1}$, $b_{m-k+2}, \ldots$ saranno tutti divisibili per p. Il coefficiente di x^{i+k} nello sviluppo di $\varphi(x).\psi(x)$ essendo dato da:

$$a_{n-i}b_{m-k} + a_{n-i+1}b_{m-k-1} + a_{n-i+2}b_{m-k-2} + \ldots$$
$$+ a_{n-i-1}b_{m-k+1} + a_{n-i-2}b_{m-k+2} + \ldots,$$

dove tutti i termini dal secondo in poi contengono già un fattore divisibile per p, e dovendo per il dato del teorema essere divisibile per p, è chiaro che anche il primo termine $a_{n-i}b_{m+k}$ dovrà essere divisibile per p. Quindi l'uno o l'altro dei due coefficienti dovrebbe essere divisibile per p contro il supposto. Il lemma resta così dimostrato.

5. Ci è ora facile dedurre il teorema di Gauss. Sia $f(x) = \varphi(x)\psi(x)$, dove $f(x)$ ha il primo coefficiente uguale ad 1 e gli altri numeri interi. Siano poi

$$\varphi(x) = x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m$$
$$\psi(x) = x^n + c_1x^{n-1} + \ldots + c_n,$$

essendo le b e c numeri razionali. Indicando con B il massimo comun denominatore delle b e con C quello delle c, si potrà anche scrivere:

$$\varphi(x) = \frac{1}{B}\left\{b'_0x^m + b'_1x^{m-1} + \ldots + b'_m\right\}$$

$$\psi(x) = \frac{1}{C}\left\{c'_0x^n + c'_1x^{n-1} + \ldots + c'_n\right\},$$

dove ora le b' e c' sono numeri interi. Si ha così l'identità:

$$B \cdot C \cdot f(x) = (b''_0x^m + b''_1x^{m-1} + \ldots) \cdot (c''_0x^n + c''_1x^{n-1} + \ldots)$$

dalla quale apparisce, per il lemma sopra dimostrato, che uno qualunque dei fattori primi del prodotto B.C dovrà dividere o tutti i numeri $b'_0, b'_1, \ldots$ o tutti i numeri $c'_0, c'_1, \ldots$. Dividendo quindi per questo fattore primo, l'identità precedente si cambierà in un'altra affatto simile che si potrà di nuovo semplificare successivamente finchè dal primo membro sia sparito completamente il fattore B.C. Resterà allora:

$$f(x) = (b''_0x^m + b''_1x^{m-1} + \ldots)(c''_0x^n + c''_1x^{n-1} + \ldots),$$

dove le b'' e c'' sono ancora numeri interi. Inoltre, poichè il primo coefficiente di $f(x) = 0$ è 1, dovrà essere $b''_0.c''_0 = 1$ e quindi in valore assoluto $b''_0 = c''_0 = 1$. Si potrà dunque scrivere:

$$f(x) = (x^m + b''_1x^{m-1} + \ldots)(x^n + c''_1x^{n-1} + \ldots)$$

con che il teorema di Gauss resta dimostrato, essendo le b'' e c'' numeri interi.

6. Per le funzioni intere di più variabili x, y, z, ... si hanno dei teoremi affatto analoghi a quelli stabiliti in questo §. Una funzione intera $f(x, y, z, \ldots)$ si dice divisibile per un'altra funzione intera $\varphi(x, y, z, \ldots)$ quando

sia identicamente:

$$f(x, y, z, \dots) = \varphi(x, y, z, \dots)\psi(x, y, z, \dots)$$

essendo ψ del pari funzione intera. Fissato un certo campo di razionalità, la decomposizione di una funzione intera $f(x, y, z, \dots)$ in funzioni *prime* (cioè non divisibili) si può sempre fare *ed in un modo unico*. Date due funzioni intere qualunque, esiste sempre un massimo comun divisore, che è indipendente dalla scelta del campo di razionalità, ecc. Per non dilungarci di troppo omettiamo le dimostrazioni di questi teoremi che si possono trovare nell'opera già citata di *Capelli* e *Garbieri:* Corso di Analisi Algebrica, Teorie introduttorie, pg. 456 e segg.

§ 3.° — Abbassamento del grado delle equazioni dotate di radici multiple.

998. Data una certa equazione $f(x) = 0$, dove:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n, \tag{1}$$

si costruisca la derivata:

$$f'(x) = na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \dots + a_{n-1} \tag{2}$$

e si determini, col metodo dei resti successivi (cfr. il § 2°) il massimo comun divisore $D(x)$ di $f(x)$ e di $f'(x)$.

Se la funzione $D(x)$ non è di grado zero, essa è il prodotto (art. 911) di funzioni di 1° grado:

$$D(x) = (x-\alpha)^\mu(x-\beta)^\nu \dots (x-\delta)^\nu. \tag{3}$$

Allora, poichè $(x-\alpha)^\mu$ divide $D(x)$ e $D(x)$ è divisore comune di $f(x)$ ed $f'(x)$, è chiaro che ciascuna delle due funzioni $f(x)$ ed $f'(x)$ sarà divisibile per $(x-\alpha)^\mu$.

Di quì segue che α è radice multipla almeno di grado μ dell'equazione $f'(x) = 0$, quindi (art. 913) almeno di grado $\mu + 1$ dell'equazione proposta $f(x) = 0$. Anzi essa sarà precisamente radice multipla di questo grado, giacchè, se $f(x)$ fosse divisibile per una potenza di $x - \alpha$ superiore a $\mu + 1$, dovrebbe $f'(x)$ essere divisibile (art. 913) per una potenza di $x - \alpha$ superiore a μ, onde $f(x)$ ed $f'(x)$ avrebbero il divisore comune $(x-\alpha)^{\mu+1}$ che dovrebbe poi essere divisore di $D(x)$, contro il supposto.

Dunque: *il massimo comun divisore* D(x) *delle due funzioni* f(x) *ed* f'(x) *eguagliato a zero ha per radici le radici multiple di* f(x)=0 *diminuite di un'unità nel loro ordine di multiplicità.*

999. Di quì segue che la funzione $f(x)$ decomposta nei suoi fattori di 1° grado sarà:

$$f(x)=a_0(x-\alpha)^{\mu+1}(x-\beta)^{\nu+1} \dots (x-\delta)^{\rho+1}(x-c_1) \dots (x-c_r) \tag{4}$$

dove $c_1, c_2, \dots, c_r$ sono le radici *semplici* di $f(x) = 0$.

Se ora indichiamo con $Q(x)$ il quoziente della divisione di $f(x)$ per $D(x)$, si avrà identicamente:

$$Q(x)=a_0(x-\alpha)(x-\beta) \dots (x-\delta)\cdot(x-c_1)(x-c_2) \dots (x-c_r). \tag{5}$$

Se inoltre indichiamo con $D_1(x)$ il massimo comun divisore, che si determinerà col metodo dei resti, delle funzioni $Q(x)$ e $D(x)$, si ha, confrontando la (3) con la (5):

$$D_1(x) = (x-\alpha)(x-\beta)\dots(x-\delta), \tag{6}$$

e finalmente, indicando con $Q_1(x)$ il quoziente di $Q(x)$ per $D_1(x)$, si ha:

$$Q_1(x) = a_0(x-c_1)(x-c_2)\dots(x-c_r). \tag{7}$$

Pertanto: *data un'equazione qualunque* $f(x)=0$, *si può sempre costruire, con semplici operazioni di divisione, un'equazione* $Q_1(x)=0$ *che ha per radici le sole radici semplici dell' equazione* $f(x)=0$, *ed un' altra equazione* $D_1(x)=0$ *le cui radici sono tutte semplici e coincidono con le radici multiple di* $f(x)=0$.

1000. Partendo ora dall' equazione $D(x)=0$, che ha per radici le radici multiple di $f(x)=0$ col grado di multiplicità diminuito di un'unità, si potrà costruire nello stesso modo una nuova equazione che abbia per radici le sole radici semplici di $D(x)=0$, cioè le radici doppie di $f(x)=0$. Procedendo poi sempre allo stesso modo si costruirà una terza equazione a radici tutte semplici che coincideranno con le radici doppie di $D(x)=0$, cioè con le radici triple di $f(x)=0$. Si conclude dunque che: *se un'equazione* $f(x)=0$, *di grado* n, *ha* p_1 *radici semplici*, p_2 *radici doppie*, p_3 *radici triple, ecc., cosicchè sarà*:

$$p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \dots = n,$$

la sua risoluzione si può far dipendere da quella di equazioni di grado inferiore, cioè da un'equazione di grado p_1 *che darà le sole radici semplici, da un'equazione di grado* p_2 *che darà le sole radici doppie, da una di grado* p_3 *che darà le sole radici triple e così via.* I coefficienti di tutte queste equazioni si calcoleranno in ogni caso con semplici operazioni di divisibilità senza che sia necessario avere alcuna conoscenza dei valori e dei gradi di multiplicità delle radici dell'equazione proposta.

Esercizi.

1. Risolvere l' equazione di sesto grado:

$$2x^6 - 5x^4 - 24x^2 + 63 = 0$$

che si farà dipendere col metodo spiegato da sole equazioni di secondo grado.

2. Dimostrare che, se un'equazione a coefficienti commensurabili ha una sola radice doppia, questa sarà necessariamente commensurabile.

3. Dimostrare similmente che, se un'equazione a coefficienti reali ha una sola radice doppia, essa sarà certamente reale.

4. Dimostrare più generalmente che, se un'equazione ha una sola radice multipla di un certo ordine μ, e le altre multiple di ordini diversi da μ, essa apparterrà al campo di razionalità definito dai coefficienti dell'equazione data.

§ 4.° — Decomposizione di una funzione razionale in frazioni parziali.

1001. Data una funzione razionale qualunque di x, essa si può sempre ridurre alla forma $\frac{\varphi(x)}{F(x)}$, essendo $\varphi(x)$ ed $F(x)$ funzioni intere di x. Ciò posto, se il grado m di $\varphi(x)$ è uguale o maggiore del grado n di $F(x)$, eseguendo la divisione di $\varphi(x)$ per $F(x)$ si potrà sempre avere identicamente (art. 976):

$$\frac{\varphi(x)}{F(x)} = Q(x) + \frac{f(x)}{F(x)}$$

dove $f(x)$ è al più del grado $n-1$ in x. Noi partiremo dunque dalla espressione ridotta $\frac{f(x)}{F(x)}$ per la quale dimostreremo il teorema che segue.

1002. *Sieno* $a, b, c, \ldots$ *le radici dell'equazione, di grado* n, $F(x)=0$, *e sieno* $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ *i loro rispettivi gradi di multiplicità. Essendo* $f(x)$ *una funzione intera qualunque, di grado inferiore ad* n, *si avrà identicamente:*

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{F(x)} &= \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} \\ &+ \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \ldots + \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned} \tag{1}$$

dove le $A_1, A_2, \ldots, B_1, B_2, \ldots$ *sono delle costanti da determinarsi opportunamente.*

Poniamo infatti per brevità $(x-b)^\beta(x-c)^\gamma \ldots = \psi(x)$, e sia A una costante indeterminata; si ha:

$$\frac{f(x)}{F(x)} - \frac{A}{(x-a)^\alpha} = \frac{f(x)}{(x-a)^\alpha\psi(x)} - \frac{A}{(x-a)^\alpha} = \frac{f(x) - A\psi(x)}{(x-a)^\alpha\cdot\psi(x)}.$$

Ora si può sempre fare in modo che il numeratore di questa espressione sia divisibile per $x-a$. A tale oggetto basterà determinare la costante A in modo che sia:

$$f(a) - A\psi(a) = 0 \tag{2}$$

il che è sempre possibile, poichè pel supposto $\psi(x)$ non si annulla per $x=a$. Detto A_α il valore di A così determinato, si avrà:

$$f(x) - A_\alpha\psi(x) = (x-a)f_1(x),$$

essendo $f_1(x)$ una funzione intera di x di grado inferiore ad $n-1$.

Scriveremo dunque:

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}+\frac{f_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1}\psi(x)}.$$

Poichè il numeratore dell'ultima frazione è di grado inferiore a quello del corrispondente denominatore, si troverà similmente:

$$\frac{f_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1}\psi(x)}=\frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)^{\alpha-1}}+\frac{f_2(x)}{(x-a)^{\alpha-2}\psi(x)},$$

onde:

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}+\frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)^{\alpha-1}}+\frac{f_2(x)}{(x-a)^{\alpha-2}\psi(x)},$$

essendo anche qui $f_2(x)$ di grado inferiore a quello di $(x-a)^{\alpha-2}\psi(x)$. Così procedendo si troverà:

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}+\ldots+\frac{A_1}{(x-a)}+\frac{f_\alpha(x)}{\psi(x)}.$$

Sia ora $\psi(x)=(x-b)^\beta\cdot\chi(x)$. Si troverà similmente:

$$\frac{f_\alpha(x)}{\psi(x)}=\frac{B_\beta}{(x-b)^\beta}+\ldots+\frac{B_1}{(x-b)}+\frac{f_{\alpha+\beta}(x)}{\chi(x)},$$

e così di seguito. Si giungerà così evidentemente a porre la frazione $\frac{f(x)}{F(x)}$ sotto la forma (1) data nell'enunciato del teorema.

1003. Ci proponiamo ora di dare un metodo pratico per la determinazione delle costanti $A_\alpha, \ldots, A_1, B_\beta, \ldots, B_1, \ldots$, p. es. delle $A_\alpha, \ldots, A_1 \ldots$.

Ponendo $x-a=z$, poichè $F(x)$ è divisibile precisamente per $(x-a)^\alpha$, si ha:

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{f(a+z)}{z^\alpha\cdot F_1(z)}$$

dove $F_1(z)$ è una funzione intera di z che non si annulla per $z=0$. Si potrà dunque sviluppare nel modo indicato all'art. 965 la funzione razionale $\frac{f(a+z)}{F_1(z)}$ secondo le potenze intere e positive crescenti di z. Supponiamo che si trovi:

$$\frac{f(a+z)}{F_1(z)}=A'_\alpha+A'_{\alpha-1}z+A'_{\alpha-2}z^2+\ldots+A'_1z^{\alpha-1}+\ldots.$$

Paragonando questo sviluppo colla espressione che si ottiene dalla (1) ponendo $x=a+z$ e moltiplicando entrambi i membri per z^α, cioè:

$$\begin{aligned}\frac{f(a+z)}{F_1(z)}&=A_\alpha+A_{\alpha-1}z+\ldots+A_1z^{\alpha-1}\\&+\frac{B_1z^\alpha}{(a-b+z)}+\frac{B_2z^\alpha}{(a-b+z)^2}+\ldots\\&+\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

si vede subito che per l'identità dei secondi membri dev'essere:

$$A_\alpha + A'_\alpha, \; A_{\alpha-1} = A'_{\alpha-1}, \ldots, A_1 = A'_1.$$

Infatti per $z = 0$ essi prendono i valori A'_α ed A_α, onde questi due coefficienti devono essere uguali. Sopprimendo nelle due espressioni i due termini eguali A'_α ed A_α, dividendo per z e ponendo quindi di nuovo $z = 0$, si dedurrà $A'_{\alpha-1} = A_{\alpha-1}$. Sopprimendo quindi le parti $A'_\alpha + A'_{\alpha-1}z$ ed $A_\alpha + A_{\alpha-1}z$ che sono eguali, dividendo per z^2 e ponendo ancora $z=0$, si avrà $A'_{\alpha-2}=A_{\alpha-2}$, e così di seguito.

Da questa dimostrazione risulta al tempo stesso che *le costanti* $A_1, A_2, \ldots, B_1, B_2, \ldots$ *nello sviluppo* (1) *non si possono determinare che in un unico modo.* Infatti esse devono coincidere in ogni caso colle costanti $A'_1, A'_2, \ldots, B'_1, B'_2, \ldots$ determinate nel modo spiegato.

1004. *Se* a *è radice semplice di* F(x)=0, *la costante* A *nello sviluppo* $\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{(x-a)} + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \ldots$ *è data da* $\frac{f(a)}{F'(a)}$.

Posto infatti, come all'art. 1002, $F(x)=(x-a)\psi(x)$, l'equazione (2) ci dà appunto:

$$A = \frac{f(a)}{\psi(a)} = \frac{f(a)}{F'(a)},$$

poichè (art. 690):

$$F'(x) = (x-a)\psi'(x) + \psi(x).$$

1005. Chiuderemo con una osservazione importante relativa al caso in cui le due funzioni $f(x)$ ed $F(x)$ abbiano i loro coefficienti reali. In tal caso, se a è una radice immaginaria di multiplicità α dell'equazione $F(x) = 0$, quest'ultima equazione avrà (art. 945) un'altra radice immaginaria conjugata ad a, che sia p. es. b, dotata dello stesso grado di multiplicità. È quindi chiaro che le due costanti A_i e B_i nei due termini:

$$\frac{A_i}{(x-a)^i} + \frac{B_i}{(x-b)^i} \tag{3}$$

riusciranno del pari due numeri conjugati; poichè lo sviluppo (1), non potendo effettuarsi che in un unico modo, deve ricadere in sè stesso se si cambia dappertutto i in $-i$, con che a si cambia in b, nel mentre che A_i, B_i si cangiano nei numeri complessi ad essi conjugati. Allora in luogo della somma (3) si potrà scrivere, riducendo tale somma al comun denominatore, l'espressione:

$$\frac{\psi_i(x)}{(x^2 + px + q)^i}, \tag{3$'$}$$

dove p e q sono numeri reali e $\psi_i(x)$ è una funzione intera di x del grado i. Si ha infatti:

$$x^2 + px + q = x^2 - (a+b)x + ab$$

e

$$\psi_i(x) = A_i(x-b)^i + B_i(x-a)^i$$

ed è chiaro che i coefficienti delle potenze di x nei secondi membri sono tutti numeri reali.

L'intera funzione razionale $\frac{f(x)}{F(x)}$ *si può dunque rappresentare, per quanto riguarda le radici complesse di* $F(x) = 0$, *come una somma di frazioni del tipo* (3)'.

Note ed Esercizi.

1. Decomporre in frazioni parziali le funzioni:

$$\frac{2x^2 - 3x + 1}{(x-3)^2(x-1)}, \quad \frac{x^2 - bx + 1}{(x-1)(x-2)(x-3)}, \quad \frac{2x + 1}{(x-2)^3(x-1)^2}.$$

2. Se l'equazione $F(x) = 0$ ha le n radici semplici $a, b, c, \ldots, g$, si ha identicamente, per $p < n$:

$$\frac{x^p}{F(x)} = \frac{a^p}{F'(a)(x-a)} + \frac{b^p}{F'(b)(x-b)} + \ldots + \frac{g^p}{F'(g)(x-g)}.$$

Dedurre di qui che, per $p < n-1$, si ha sempre:

$$\frac{a^p}{F'(a)} + \frac{b^p}{F'(b)} + \ldots + \frac{g^p}{F'(g)} = 0.$$

ed inoltre si ha:

$$\frac{a^{n-1}}{F'(a)} + \frac{b^{n-1}}{F'(b)} + \ldots + \frac{g^{n-1}}{F'(g)} = 1.$$

3. Le costanti $A_1, A_2, \ldots, B_1, B_2, \ldots$ nello sviluppo (1) enunciato all'art. 1002 si potrebbero anche determinare identificando $f(x)$ col numeratore del secondo membro di (1) ridotto ad unica frazione. Si otterrebbero così, per le incognite $A_1, A_2, \ldots, B_1, B_2, \ldots$, precisamente tante equazioni di 1° grado quanto è il loro numero.

Risolvendo tali equazioni si ricaveranno i valori cercati delle costanti. Questo metodo si chiama delle *costanti indeterminate*.

4. Nell'ipotesi che $F(x) = 0$ abbia solo radici semplici, si esprima il determinante di quest'ultimo sistema di equazioni lineari mediante il determinante delle differenze (discriminante di $F(x)$) formato colle n radici di $F(x) = 0$.

5. Se a è radice doppia di $F(x) = 0$, le due costanti A, A', relative alla radice a, nello sviluppo:

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{(x-a)^2} + \frac{B}{(x-a)} + \ldots \qquad (\alpha)$$

hanno i valori:

$$A = \frac{2f(a)}{F''(a)}, \quad B = \frac{2}{F''(a)}\left[f'(a) - \frac{1}{3}f(a)\frac{F'''(a)}{F''(a)}\right].$$

Il lettore giungerà facilmente a queste espressioni moltiplicando i due membri di (α) per $(x-a)^2.F(x)$, derivando quindi membro a membro l'identità così ottenuta tre volte di seguito rispetto ad x, e sostituendo final-

mente nelle due ultime identità in luogo di x il valore a, pel quale si ha $F(a) = F'(a) = 0$.

6. Alle formole della Nota 2ª si riconnette un principio algebrico introdotto con grande vantaggio dal *Chelini* nello studio di alcune questioni di geometria analitica. (Si veggano le *Ricerche di geometria analitica del Beltrami*, nelle memorie dell'Accademia di Bologna, 1879).

§ 5.º — Della Risultante di due equazioni.

1006. Il problema di decidere se due funzioni date $f(x)$ e $\varphi(x)$ siano o no prime fra loro, cioè se abbiano oppur no un divisore comune almeno di primo grado nella x, coincide con quello di decidere se le due equazioni corrispondenti:

$$f(x) = 0 \ , \ \varphi(x) = 0 \tag{1}$$

abbiano oppur no almeno una *radice comune*.

Infatti, se esiste una radice α comune a queste due equazioni, entrambe le funzioni $f(x)$ e $\varphi(x)$ saranno divisibili per $(x - \alpha)$; onde esse avranno almeno questo divisore comune di primo grado.

Reciprocamente, se $f(x)$ e $\varphi(x)$ hanno un divisore comune $D(x)$ di grado eguale o maggiore di 1, detta α una radice dell'equazione $D(x)=0$, la funzione $D(x)$ sarà divisibile per $(x-\alpha)$ e quindi lo saranno anche le $f(x)$ e $\varphi(x)$ di cui $D(x)$ è per supposto divisore comune, cioè le due equazioni (1) avranno in comune questa radice α.

Ci proponiamo pertanto di ricercare a quali condizioni debbano soddisfare i coefficienti delle due funzioni date:

$$f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m$$

e

$$\varphi(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_n \tag{2}$$

affinchè le due equazioni (1) abbiano una radice comune. Noi vedremo che la condizione necessaria e sufficiente affinchè ciò accada è data dall'annullarsi di una certa funzione intera $R(a_0, a_1, \ldots, b_0\, b_1 \ldots)$ dei coefficienti delle due equazioni; e vedremo come si costruisca effettivamente questa funzione, che si chiama la *risultante* delle due funzioni date $f(x)$ e $\varphi(x)$.

1007. Supponiamo, a tale oggetto, che le due equazioni (2) abbiano una radice comune α; cosicchè sarà, scrivendo i termini delle equazioni in ordine rovesciato:

$$a_m + a_{m-1}\alpha + a_{m-2}\alpha^2 + \ldots + a_1\alpha^{m-1} + a_0\alpha^m = 0$$

e

$$b_n + b_{n-1}\alpha + b_{n-2}\alpha^2 + \ldots + b_1\alpha^{n-1} + b_0\alpha^n = 0,$$

Moltiplicando la prima di queste due uguaglianze successivamente per $\alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1}$ e la seconda per $\alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{m-1}$, si ottengono le seguenti $m + n$ eguaglianze (che noi scriveremo

per maggiore chiarezza per il caso di $m = 4$, $n = 3$):

$$\begin{array}{l}
a_4 + a_3\alpha + a_2\alpha^2 + a_1\alpha^3 + a_0\alpha^4 = 0 \\
\quad a_4\alpha + a_3\alpha^2 + a_2\alpha^3 + a_1\alpha^4 + a_0\alpha^5 = 0 \\
\qquad a_4\alpha^2 + a_3\alpha^3 + a_2\alpha^4 + a_1\alpha^5 + a^0\alpha^6 = 0 \\
\hline
b_3 + b_2\alpha + b_1\alpha^2 + b_0\alpha^3 = 0 \\
\quad b_3\alpha + b_2\alpha^2 + b_1\alpha^3 + b_0\alpha^4 = 0 \\
\qquad b_3\alpha^2 + b_2\alpha^3 + b_1\alpha^4 + b_0\alpha^5 = 0 \\
\qquad\quad b_3\alpha^3 + b_2\alpha^4 + b_1\alpha^5 + b_0\alpha^6 = 0
\end{array}$$

che si possono considerare come un sistema di $m + n$ equazioni lineari omogenee fra $m + n$ incognite, il quale resta soddisfatto prendendo per le incognite i valori:

$$1\ ,\ \alpha\ ,\ \alpha^2\ ,\ \alpha^3\ , \ldots ,\ \alpha^{m+n-1}.$$

Poichè questi valori non sono tutti nulli, giacchè almeno il primo è certo diverso da zero, così dovrà essere nullo il determinante dei coefficienti (art. 432) cioè:

$$\begin{vmatrix}
a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 \\
0 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\
0 & 0 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\
b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & b_3 & b_2 & b_1 & b_0
\end{vmatrix} = 0.$$

Rovesciando nel determinante del primo membro, come è sempre lecito, l'ordine di successione delle orizzontali e di poi l'ordine di successione delle verticali, si può anche scrivere questa condizione sotto la forma:

$$\begin{vmatrix}
b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 & 0 \\
0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 \\
0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\
0 & 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\
a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 & 0 \\
0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 \\
0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4
\end{vmatrix} = 0.$$

1008. Noi chiameremo pertanto *risultante* delle due funzioni $\varphi(x)$ ed $f(x)$ definite dalle (2) la funzione razionale intera $R(a_0, a_1, \ldots, b_0, b_1, \ldots)$ dei loro coefficienti data dal determi-

nante ora trovato, cioè la funzione (*):

$$R = \begin{vmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \ldots\ldots b_n & 0 \ldots 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 \ldots \ldots b_n \ldots 0 \\ . & . & . & . \ . \ . \ . \ . \ . \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots b_0 b_1 \ldots b_n \\ a_0 & a_1 & a_2 \ldots\ldots a_m & 0 \ldots 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \ldots\ldots a_m \ldots 0 \\ . & . & . & . \ . \ . \ . \ . \ . \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots a_0 a_1 \ldots a_m \end{vmatrix} \qquad (3)$$

Finora abbiamo soltanto dimostrato che *la condizione* $R = 0$ *è necessaria affinchè le due equazioni date* (2) *abbiano almeno una radice comune.* Ci resta ad accertare che questa condizione è altresì *sufficiente*, ciò che, *reciprocamente se si ha* $R=0$, *le due equazioni* (2) *avranno almeno una radice comune.*

1009. Consideriamo a tale oggetto il determinante seguente di ordine $m+n+1$

$$\begin{vmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \ldots b_n \ldots\ldots\ldots 0 & x^{m-1}\varphi(x) \\ 0 & b_0 & b_1 \ldots \ldots b_n \ldots\ldots 0 & x^{m-2}\varphi(x) \\ . & . & . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . & . \\ 0 & 0 & 0 \ldots b_0 \ b_1 \ldots b_n & x^0\varphi(x) \\ a_0 & a_1 & a_2 \ldots a_m \ldots\ldots\ldots 0 & x^{n-1}f(x) \\ 0 & a_0 & a_1 \ldots \ldots a_m \ldots 0 & x^{n-2}f(x) \\ . & . & . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . & . \\ 0 & 0 & 0 \ldots a_0 \ a_1 \ldots a_m & x^0 f(x) \\ p_0 & p_1 & p_2 \ldots\ldots\ldots p_{m+n-1} & F(x) \end{vmatrix} \qquad (4)$$

che si ottiene dal determinante (3) aggiungendovi una nuova ultima verticale ed una nuova ultima orizzontale. Quanto all'ultima verticale, si supporrà che $F(x)$ sia una funzione intera qualsivoglia, del grado $m+n-1$, della x e che $p_0, p_1, \ldots, p_{m+n-1}$ siano i suoi coefficienti. Poichè si ha:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_n \\ f(x) &= a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m \\ F(x) &= p_0x^{m+n-1} + p_1x^{m+n-2} + \ldots + p_{m+n-1}, \end{aligned} \qquad (5)$$

è facile riconoscere che, se dall'ultima colonna del determinante (4) si sottragga la prima colonna moltiplicata per x^{m+n-1}, quindi

(*) Il metodo tenuto per giungere a questa risultante si suol chiamare metodo *dialitico di Sylvester*.

la seconda colonna moltiplicata per x^{m+n-2} e così di seguito fino a sottrarne la penultima colonna, gli elementi dell'ultima colonna si riducono tutti allo zero. Si vede dunque che *il determinante* (4) *è identicamente uguale a zero, qualunque sia il valore di* x. Se dunque indichiamo risp. con

$$P_0, P_1, P_2, \ldots, P_{m-1}, Q_0, Q_1, \ldots, Q_{n-1}, R$$

gli aggiunti degli elementi dell'ultima colonna, l'ultimo dei quali ha evidentemente il valore R dato dalla (3), i quali sono delle *costanti* formate colle $a_0, a_1, \ldots, b_0, b_1, \ldots, p_0, p_1, \ldots$, si avrà l'identità:

$$(P_0x^{m-1}+P_1x^{m-2}+\ldots+P_{m-1})\varphi(x)+(Q_0x^{n-1}+Q_1x^{n-2}+\ldots$$
$$+Q_{n-1})f(x)+RF(x)=0.$$

Ponendo per brevità:

$$\left.\begin{aligned} -(P_0x^{m-1}+P_1x^{m-2}+\ldots+P_{m-1}) &= f_1(x) \\ -(Q_0x^{n-1}+Q_1x^{n-2}+\ldots+Q_{n-1}) &= \varphi(x) \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

si ha dunque il seguente:

Teorema. — *Se* f(x) *e* φ(x) *sono due funzioni intere date* (5) *risp. dei gradi* m *ed* n, R *la loro risultante definita dalla* (3), F(x) *una funzione intera qualsivoglia di grado* m + n − 1, *esistono sempre due funzioni intere* $f_1(x)$ *di grado* m − 1, *e* $\varphi_1(x)$ *di grado* n − 1, *per le quali si ha identicamente*:

$$R\cdot F(x) = f(x)\varphi_1(x) + \varphi(x)f_1(x), \qquad (7)$$

le espressioni effettive delle f_1 *e* φ_1 *essendo date dalle* (6).

1010. Supponiamo ora che la R sia eguale a zero. Si avrà allora, in luogo della (7), l'identità:

$$f(x)\varphi_1(x) + \varphi(x)f_1(x) = 0$$

d'onde:

$$f(x)\cdot\varphi_1(x) = -\varphi(x)\cdot f_1(x).$$

Di qui emerge che la funzione $f(x)$ divide esattamente il prodotto $\varphi(x)\cdot f_1(x)$, ond'essa non può essere prima con $\varphi(x)$. Infatti, se $f(x)$ fosse prima con $\varphi(x)$, poichè essa dividerebbe il prodotto $\varphi(x)\cdot f_1(x)$ e sarebbe prima col fattore $\varphi(x)$, dovrebbe dividere esattamente (art. 984) l'altro fattore $f_1(x)$. Ora ciò è assurdo; poichè, essendo $f(x)$ del grado m, non può dividere $f_1(x)$ che è soltanto di grado $m-1$. Dunque le due funzioni $f(x)$ e $\varphi(x)$ avranno in comune almeno un divisore di primo grado in x, c. d. d.

1011. Imaginando sviluppato il determinante (3) che dà l'espressione di R, si avranno dei termini contenenti il fattore zero e quindi nulli; tutti gli altri termini poi conterranno evidentemente m fattori b appartenenti alle prime m orizzontali ed n fattori a appartenenti alle altre n orizzontali. Dunque *la risultante* R *delle due funzioni* (2) *è una funzione omogenea e di grado* n *nei coef-*

ficienti della funzione f(x) *del grado* m, *ed omogenea e di grado* m *nei coefficienti dell'altra funzione* φ(x) *del grado* n.

1012. *In ogni termine* $b_0^{\beta_0} b_1^{\beta_1} \dots b_n^{\beta_n} a_0^{\alpha_0} a_1^{\alpha_1} \dots a_m^{\alpha_m}$ *dello sviluppo di* R, *la somma degli indici di tutti i singoli fattori* a_0, $a_1, \dots, b_0, b_1, \dots$

$$0 \cdot \beta_0 + 1 \cdot \beta_1 + 2 \cdot \beta_2 + \dots + n\beta_n + 0 \cdot \alpha_0 + 1 \cdot \alpha_1 + \dots + m \cdot \alpha_m$$

(*che si chiama il* PESO *del termine stesso*) *è la stessa in tutti i termini ed è uguale ad* mn.

Infatti, se gli elementi che compongono un termine qualunque (non identicamente nullo) del determinante (3), si scrivono secondo l'ordine naturale delle orizzontali, il termine ottenuto è della forma:

$$b_{h_1-1}\, b_{h_2-2} \dots b_{h_m-m}\, a_{k_1-1}\, a_{k_2-2} \dots a_{k_n-n}$$

essendo $h_1, h_2, \dots, h_m, k_1, k_2, \dots, k_n$ i numeri che indicano l'ordine delle corrispondenti verticali; cosicchè $h_1, \dots, h_m, k_1, \dots, k_n$ non sono che i numeri $1, 2, \dots, m+n$ scritti in un certo ordine e per conseguenza:

$$h_1+h_2+\dots+h_m+k_1+k_2+\dots+k_n=1+2+\dots+(m+n)=\frac{(m+n)(m+n+1)}{2}.$$

La somma degli indici di tutti i singoli fattori del termine è dunque:

$$(h_1-1)+(h_2-2)+\dots+(h_m-m)+(k_1-1)(k_2-2)\dots(k_n-n)$$

ossia, per l'uguaglianza precedente:

$$\frac{(m+n)(m+n+1)}{2}-\frac{m(m+1)}{2}-\frac{n(n+1)}{2},$$

che è appunto mn; c. d. d.

1013. Il determinante (3) si può ridurre sotto forma di un determinante di ordine uguale al maggiore dei due numeri m ed n, facendo uso delle note trasformazioni che non alterano il valore di un determinante (*). Si può però anche giungere direttamente a questa nuova forma della risultante col metodo seguente dovuto a *Bézout*.

Sia m il maggiore dei due numeri m, n, qualora essi non fossero eguali; e riguardiamo f e φ come funzioni dello stesso grado m:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m \\ \varphi(x) &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_mx^m. \end{aligned} \tag{8}$$

Se x è una radice comune alle due equazioni $f(x)=0$ e $\varphi(x)=0$,

(*) Cfr. Baltzer: Theorie un Anwendung der Determinanten. § 11, articolo 12. (Ediz. 1875).

si ha evidentemente:

$$\begin{vmatrix} f(x) & a_{r+1} + a_{r+2}x + \ldots + a_m x^{m-r-1} \\ \varphi(x) & b_{r+1} + b_{r+2}x + \ldots + b_m x^{m-r-1} \end{vmatrix} = 0,$$

comunque si scelga l' indice r da 0 fino ad $m-1$. Si ha quindi anche, sottraendo dalla prima colonna la seconda moltiplicata per x^{r+1}:

$$\begin{vmatrix} a_0+a_1x+ \ldots +a_rx^r & a_{r+1}+a_{r+2}x+ \ldots +a_m x^{m-r-1} \\ b_0+b_1x+ \ldots +b_rx^r & b_{r+1}+b_{r+2}x+ \ldots +b_m x^{m-r-1} \end{vmatrix} = 0 \qquad (9)$$

che è un'equazione in x del grado $m-1$, che scriveremo:

$$c_{r0} + c_{r1}x + c_{r2}x^2 + \ldots + c_{r,m-1}x^{m-1} = 0. \qquad (9)'$$

Applicando al determinante (9) il teorema (art. 418) sulla decomposizione di un determinante in cui gli elementi di una colonna sono somma di un egual numero di parti, e ponendo per brevità:

$$d_{ik} = a_i b_k - a_k b_i, \qquad (10)$$

si trova subito che:

$$c_{rs} = d_{0,r+s+1} + d_{1,r+s} + d_{2,r+s-1} + \ldots + d_{s,r+1} \qquad (11)$$

d' onde segue facilmente che:

$$c_{rs} = c_{sr}. \qquad (12)$$

Eliminando ora dalle m equazioni (9)' le m quantità $1, x, x^2, \ldots, x^{m-1}$ analogamente a quanto si è fatto all' art. 1007, si trova la condizione:

$$\begin{vmatrix} c_{00} & c_{01} & \ldots c_{0,m-1} \\ c_{10} & c_{11} & \ldots c_{1,m-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{m-1,0} & c_{m-1,1} & \ldots c_{m-1,m-1} \end{vmatrix} = 0. \qquad (13)$$

Si ha così nel determinante $\sum \pm c_{00}c_{11} \ldots c_{m-1,m-1}$ una nuova espressione della risultante già definita mediante il determinante (3). I due determinanti (3) e (13) non differiscono che per un fattore numerico.

1014. Si voglia, ad esempio, la risultante delle due equazioni di secondo grado:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 = 0 \ , \ b_0 + b_1x + b_2x^2 = 0. \qquad (14)$$

Si ha in tal caso:

$$c_{00} = d_{01} = a_0b_1 - a_1b_0,$$

$$c_{11} = d_{02} + d_{12} = a_1b_2 - a_2b_1$$

$$c_{01} = c_{10} = d_{02} = a_0b_2 - a_2b_0.$$

La condizione necessaria e sufficiente affinchè le (14) abbiano una radice comune, è dunque data da:

$$\begin{vmatrix} c_{00} & c_{01} \\ c_{10} & c_{11} \end{vmatrix} = (a_0b_1 - a_1b_0)(a_1b_2 - a_2b_1) - (a_0b_2 - a_2b_0)^2 = 0. \qquad (15)$$

Il primo membro della (15) moltiplicato per 4 si può anche porre sotto la forma:

$$(a_1^2 - 4a_0a_2)(b_1^2 - 4b_0b_2) - [2a_0b_2 + 2b_0a_2 - a_1b_1]^2 \qquad (15)'$$

che ci dà una nuova espressione della stessa risultante delle (12).

1015. Il discriminante dell' equazione:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0, \qquad (16)$$

uguagliato a zero, esprime (art. 934) la condizione necessaria e sufficiente affinchè quest'equazione abbia una radice multipla. Esso può dunque anche ottenersi (cfr. art. 913) come risultante dell'equazione (16) e della sua derivata:

$$f'(x) = na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + (n-2)a_2x^{n-3} + \ldots + a_{n-1} = 0 \qquad (17)$$

o, meglio, come risultante dell'equazione (17) e dell'equazione:

$$nf(x) - xf'(x) = 0$$

cioè:

$$a_1x^{n-1} + 2a_2x^{n-2} + 3a_3x^{n-3} + \ldots + (n-1)a_{n-1}x + na_n = 0. \qquad (17)'$$

1016. Così, ad esempio, il discriminante Δ dell' equazione del terzo grado:

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$$

si può ottenere come la risultante delle due equazioni:

$$3a_0x^2 + 2a_1x + a_2 = 0 \ , \ a_1x^2 + 2a_2x + 3a_3 = 0.$$

Pertanto, applicando la formola (15), si trova:

$$\Delta = (2a_2^2 - 6a_1a_3)(2a_1^2 - 6a_0a_2) - (a_1a_2 - 9a_0a_3)^2$$
$$= 3[a_1^2a_2^2 - 4a_1^3a_3 - 4a_0a_2^3 + 18a_0a_1a_2a_3 - 27a_0^2a_3^2].$$

Note ed Esercizi.

1. Dalla seconda espressione (15)', trovata all'art. 1014, per la risultante di due equazioni quadratiche $f = 0$, $\varphi = 0$, riconoscere che questa risultante è il discriminante di una terza equazione quadratica le cui radici separano *armonicamente* tanto le radici di $f = 0$ come quelle di $p = 0$.

Si noti, a questo proposito, che la condizione:

$$2a_0b_2 + 2b_0a_2 - a_1b_1 = 0$$

è necessaria e sufficiente perchè le due coppie di radici delle (14) si separino armonicamente.

2. Calcolare la risultante delle due equazioni:

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0 \quad \text{e} \quad b_0x^2 + b_1x + b_2 = 0.$$

Si troverà il risultato seguente:

$$a_0^2b_2^3+a_3^2b_0^3-a_0a_4b_1b_2^2-a_2a_3b_0^2b_1+a_1^2b_0^2b_2^2+a_2^2b_0^2b_2-a_1a_2b_0b_1b_2$$
$$+(a_0a_2b_2+a_1a_3b_0)(b_1^2-2b_0b_2)-a_0a_3(b_1^3-3b_0b_1b_2).$$

3. La condizione affinchè le due equazioni $f(x)=0$ e $\varphi(x)=0$ ammettano una radice comune, si può trovare anche così. Siano $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ e radici di $\varphi(x)=0$. Ponendo:

$$R = f(\alpha)\, f(\beta)\, f(\gamma) \ldots f(\lambda),$$

si ha una funzione *simmetrica* delle $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$. Si potranno quindi eliminare queste radici incognite e si otterrà per R una funzione dei soli coefficienti di f e φ. È evidente che $R=0$ è la condizione necessaria e sufficiente cercata. Questo metodo di costruire la risultante dicesi *delle funzioni simmetriche*. Più tardi (Cap. XIV, § 7.°) avremo occasione di riconoscere l'identità della espressione così ottenuta colla (3).

4. Oppure si può procedere anche come segue: se

$$a_0x^m+a_1x^{m-1}+ \ldots +a_m=0 \quad \text{e} \quad b_0x^m+b_1x^{m-1}+ \ldots +b_m=0$$

sono le due equazioni che devono essere soddisfatte da uno stesso valore di x, si sottraggano l'una dall'altra dopo averle moltiplicate risp. per b_m e per a_m, ovvero dopo averle moltiplicate per b_0 ed a_0. Si otterranno così due equazioni in x del grado $m-1$. Applicando a queste lo stesso procedimento, se ne dedurranno altre due del grado $m-2$ e così di seguito, finchè si giunga a due equazioni di primo grado:

$$c_0x + c_1 = 0 \qquad d_0x + d_1 = 0.$$

È chiaro che $c_0d_1 - c_1d_0 = 0$ sarà allora la condizione cercata.

Questo metodo dicesi di *Eulero*.

5. Accenneremo finalmente ad un altro metodo (tenuto anche dal *Weierstrass* nelle sue lezioni) che risolve, più generalmente, il problema di trovare le condizioni necessarie e sufficienti affinchè le due funzioni:

$$f(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m \quad \text{e} \quad \varphi(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_n$$

abbiano un divisore comune di grado i nella x.

Partendo dalla decomposizione di queste funzioni nei loro fattori di 1° grado, si riconosce subito che *affinchè ciò accada è necessario e sufficiente che esistano due funzioni intere* φ_{n-i} *ed* f_{m-i}, *risp. dei gradi* $n-i$ *ed* $m-i$, *per le quali si abbia identicamente*:

$$f \cdot \varphi_{n-i} + \varphi \cdot f_{m-i} = 0.$$

Ora, eguagliando a zero i coefficienti delle singole potenze di x nel 1° membro, si ottiene fra gli $m+n+2i+2$ coefficienti indeterminati di φ_{n-i} ed f_{m-i} un sistema di $m+n-i+1$ equazioni lineari omogenee. Per avere le condizioni cercate basterà dunque esprimere che tali equazioni possono coesistere per valori non tutti nulli delle incognite. A tale oggetto si dovranno porre uguali a zero certi determinanti contenuti nella matrice del sistema, secondochè si è visto al Cap. V (art. 445). Per $i=1$ il sistema si compone di $m+n$ equazioni fra $m+n$ incognite, e la matrice del sistema è la stessa matrice (3) ottenuta col metodo di Sylvester. Per la coesistenza delle equazioni dovendo annullarsi (art. 432) il determinante di questa matrice, si ritrova così, come risultante delle due equazioni, lo stesso determinante (3). L'indole stessa della dimostrazione ci dice in tal caso che

l'annullarsi di R sarà anche condizione *sufficiente* affinchè le due equazioni abbiano in comune un divisore variabile e quindi anche almeno una radice.

§ 6.° — Risoluzione di un sistema di due equazioni con due incognite.

1017. Una funzione intera di grado m delle due variabili x ed y è data da

$$f(x, y) = p_0x^m + p_1x^{m-1} + p_2x^{m-2} + \ldots + p_{m-1}x + p_m$$

dove p_0 è una costante e $p_1, p_2, \ldots, p_m$ sono altrettante funzioni intere di y del tipo:

$$p_i = a_0 + a_1y + a_2y_2 + \ldots + a_iy^i,$$

cioè in generale p_i è una funzione intera del grado i di y.

Ciò premesso, si abbiano le equazioni:

$$\left.\begin{aligned} f(x, y) &= p_0x^m + p_1x^{m-1} + p_2x^{m-2} + \ldots + p_m = 0 \\ \varphi(x, y) &= q_0x^n + q_1x^{n-1} + q_2x^{n-2} + \ldots + q_n = 0 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

e si voglia cercare ogni coppia di valori speciali di x ed y tali che le due equazioni siano per essi soddisfatte simultaneamente.

Se $x = \alpha$, $y = \beta$ è una coppia di cosiffatti valori, sostituendo nelle due equazioni (1) il valore β di y, si hanno le equazioni:

$$f(x, \beta) = 0 \quad , \quad \varphi(x, \beta) = 0 \qquad (2)$$

che saranno soddisfatte da $x = \alpha$; cioè si hanno due equazioni in x che hanno una radice comune, onde la loro risultante deve essere nulla.

In questo caso la risultante è una funzione di β, ovvero di y, onde si ha l'equazione ad una sola incognita $R(y) = 0$, che dicesi il risultato dell'*eliminazione* di x fra le due equazioni date (1). Il primo membro di questa equazione sarà lo sviluppo del determinante di cui abbiamo appreso la costruzione nel § precedente.

Si ha dunque la seguente equazione:

$$R(y) = \begin{vmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & p_3 \cdots p_m & 0 & 0..0 \\ 0 & p_0 & p_1 & p_2 \cdots & p_m & 0..0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & p_m \\ q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \cdots q_n & 0 & 0..0 \\ 0 & q_0 & q_1 & q_2 \cdots & q_n & 0..0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & q_n \end{vmatrix} = 0. \qquad (3)$$

1018. Per determinare il grado di questa equazione in y, osserviamo che, essendo ognuna delle p e q una funzione intera di y

di grado eguale al proprio indice, un termine qualunque dello sviluppo del determinante (3):

$$p_i p_j p_r \ldots q_h q_k q_s \ldots$$

sarà una funzione intera di y del grado:

$$i + j + r + \ldots + h + k + s.$$

Ma questa somma di indici è la stessa (art. 1012) per tutti i termini del determinante (3) ed ha il valore mn. Concludiamo dunque che: *l'eliminazione di* x *fra le due equazioni* $f(x, y) = 0$ *e* $\varphi(x, y) = 0$ (*la prima di grado* m, *la seconda di grado* n) *conduce ad un'equazione* $R(y) = 0$, *contenente la sola* y, *del grado* $m \times n$.

1019. Si noti che l'equazione $R(y) = 0$ sarà poi, almeno in generale, effettivamente del grado mn, cioè che il coefficiente di y^{m+n} in $R(y)$ è in generale diverso da zero.

Infatti questo coefficiente altro non è che lo stesso determinante (3) in cui le p_i e q_i rappresentino non già le funzioni p_i e q_i di y ma soltanto i primi coefficienti di tali funzioni, che sono dei numeri assegnati ad arbitrio. Ora noi già sappiamo (cfr. il § prec.) che per valori numerici arbitrarii p e q, il valore del determinante (3) è in generale diverso da zero.

1020. Dopo quanto si è trovato è ora facile di dedurre che *esistono in generale* mn *coppie distinte di valori* x , y *che soddisfano le due equazioni date* $f(x, y) = 0$ *e* $\varphi(x, y) = 0$ *la prima di grado* m, *la seconda di grado* n *nelle due variabili* x , y.

Difatti, poichè $R(y) = 0$ è un'equazione di grado mn in y, essa ammetterà in generale mn radici distinte:

$$y_1 , y_2 , y_3 , \ldots , y_{mn}. \qquad (\alpha)$$

Per una qualunque y_i di queste radici si avrà $R(y_i) = 0$, cioè sarà soddisfatta la condizione affinchè le due equazioni in x:

$$f(x , y_i) = 0 \quad , \quad \varphi(x , y_i) = 0$$

ammettano una radice comune x_i. Questa radice comune si determinerà cercando il massimo comun divisore delle due funzioni $f(x , y_i)$ e $\varphi(x , y_i)$, il quale sarà in generale una funzione di 1° grado in x che uguagliata a zero farà conoscere il valore cercato $x = x_i$. Ad ogni valore y_i corrisponde dunque *in generale* un unico valore x_i. Ma di valori y_i, ve ne sono mn; quindi si avranno in generale mn coppie di x ed y:

$$x_1 , y_1 \quad ; \quad x_2 , y_2 \quad ; \quad x_3 , y_3 \, ; \ldots ; x_{mn} , y_{mn}$$

che soddisferanno alle due equazioni proposte, c. d. d.

1021. Se invece di eliminare fra le due equazioni la x, si fosse eliminata la y, si sarebbe ottenuta un'equazione (di grado mn in x): $R_1(x) = 0$ che avrebbe appunto mn soluzioni:

$$x_1 , x_2 , \ldots , x_{mn}. \qquad (\beta)$$

A scanso di equivoco conviene però osservare che non è lecito di accoppiare uno qualunque dei valori y_i del gruppo (α) con uno qualunque dei valori y_j del gruppo (β), con che si otterrebbero non già mn ma bensì m^2n^2 sistemi di valori per x ed y. Bensì ad ogni valore (α) corrisponde, come si è notato, un unico valore (β) che sarà più semplice determinare direttamente, come si è osservato, mediante una ricerca di massimo comun divisore.

1022. Vediamo, a schiarimento del metodo esposto, come si procederà per determinare i 4 sistemi di valori di x ed y che soddisfano alle due equazioni di 2° grado:

$$\begin{aligned} Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0 \\ A_1x^2 + B_1y^2 + C_1xy + D_1x + E_1y + F_1 = 0. \end{aligned} \qquad (4)$$

Si comincerà con ordinare queste equazioni secondo le potenze di x, cioè si scriveranno come segue:

$$\begin{aligned} Ax^2 + (Cy + D)x + (By^2 + Ey + E) = 0 \\ A_1x^2 + (C_1y + D_1)x + (B_1y^2 + E_1y + F_1) = 0. \end{aligned} \qquad (5)$$

Si formerà quindi la risultante:

$$R(y) = \begin{vmatrix} A & Cy+D & By^2+Ey+F & 0 \\ 0 & A & Cy+D & By^2+Ey+F \\ A_1 & C_1y+D_1 & B_1y^2+E_1y+F_1 & 0 \\ 0 & A_1 & C_1y+D_1 & B_1y^2+E_1y+F_1 \end{vmatrix}.$$

Sviluppando questo determinante (o meglio la sua espressione più semplice corrispondente alla formola (15) dell'art. 1014) ed uguagliando a zero, si ottiene un' equazione $R(y) = 0$ del 4° grado in y, cioè:

$$\begin{aligned} &[(BC)(AC)+(AB)]^2y^4 \\ &+[(BD)(AC)+(BC)(AD)+(EC)(AC)+2(AB)(AE)]y^3 \\ &+[(AE)(CD)+(FC)(AC)+(BD)(AD)+2(AB)(AF)+(AE)^2]y^2 \\ &+[(FC)(AD)+(FD)(AC)+(ED)(AD)+2(AF)(AE)]y \\ &+[(FD)(AD)+(AF)^2]=0 \end{aligned} \qquad (6)$$

dove si è scritto per brevità (AB) in luogo di AB_1-A_1B, ecc.

Siano y_1, y_2, y_3, y_4 le sue quattro radici.

Il valore di x_i che si dovrà accoppiare con una qualunque y_i di queste radici, dovrà soddisfare alle due equazioni (5):

$$\begin{aligned} Ax^2 + (Cy_i + D)x + (By_i^2 + Ey_i + F) = 0 \\ A_1x^2 + (C_1y_i + D_1)x + (B_1y_i^2 + E_1y_i + F_1) = 0. \end{aligned} \qquad (7)$$

Sottraendo queste due equazioni l' una dall' altra dopo averle

moltiplicate risp. per A_1 ed A, si ottiene l'equazione di 1° grado in x (che determinerà il valore di x_i):

$$[A_1(Cy_i + D) - A(C_1y_i + D_1)]x + [A_1(By_i^2 + Ey_i + F) - A(B_1y_i^2 + E_1y_i + F_1)] = 0$$

dalla quale si deduce subito:

$$x_i = \frac{(AB_1 - A_1B)y_i^2 + (AE_1 - A_1E)y_i + AF_1 - A_1F}{(A_1C - AC_1)y_i + (A_1D - AD_1)}. \tag{8}$$

Note ed Esercizi.

1. Dimostrare, con ragionamento simile a quello tenuto all'art, 945, che *se le due equazioni a coefficienti reali* $f(x, y) = 0$, $\varphi(x, y) = 0$ *sono soddisfatte dalla coppia di valori* $x = a + bi$, $y = \alpha + \beta i$, *esse sono anche soddisfatte dalla coppia conjugata* $x = a - bi$, $y = \alpha - \beta i$.

2. Verificare la *compatibilità* del sistema:

$$5x^3 - 15xy^2 - 4c^3 = 0$$

$$15x^2y - 5y^3 - 3c^3 = 0$$

$$x^2 + y^2 - c = 0$$

qualunque sia il valore della costante c, o trovare le coppie di valori di x ed y che lo risolvono.

3. Quando i coefficienti delle funzioni $f(x, y)$ e $\varphi(x, y)$, che si suppongono dei gradi m ed n, hanno valori numerici *particolari,* può accadere che la risultante $R(y) = 0$ costruita nel modo indicato riesca di grado inferiore ad mn. Malgrado ciò si potrà ancora dire che il problema $f = 0$, $\varphi = 0$ ammette mn soluzioni, poichè, se il grado di $R(y) = 0$ sia diminuito di μ, ciò si può spiegare col fatto che μ delle sue soluzioni siano divenute *infinite.* Sia infatti:

$$A_0y^{mn} + A_1y^{mn-1} + \ldots + A_{mn} = 0 \tag{1}$$

l'equazione risultante generale. Se nel caso particolare il grado della (1) diminuische di μ unità, cioè se $A_0 = A_1 = \ldots = A_{\mu-1} = 0$, l'equazione a radici reciproche della (1), che sarebbe in generale:

$$A_{mn}y^{mn} + A_{mn-1}y^{mn-1} + \ldots + A_1y + A_0 = 0 \tag{2}$$

avrà il primo membro divisibile per y^μ, cioè avrà μ radici *nulle.*

Si deve quindi ritenere che la (1) abbia anche in questo caso mn radici, delle quali però μ siano divenute infinitamente grandi.

4. Interpretando geometricamente x, y come le coordinate cartesiane di un punto del piano, le due equazioni $f(x, y) = 0$, $\varphi(x, y) = 0$ ci rappresentano due *curve* generali risp. dei gradi m ed n; e le coppie di valori di x, y che le soddisfano, ci rappresentano le coordinate dei *punti d'intersezione* delle due curve.

Il teorema algebrico stabilito in questo § ha dunque per interpretazione geometrica che: *due curve algebriche piane degli ordini* m *ed* n *si incontrano in generale in* mn *punti.* Questi mn punti esistono sempre dal punto di vista algebrico, ma possono non esistere geometricamente semprechè le loro coordinate riescano numeri imaginari. Si dice per ciò che le due curve si incontrano sempre in mn punti *reali* od *imaginari*. Questi punti potranno però in parte trovarsi anche *a distanza infinita*, corrispondentemente a

quanto si è notato poco fa, che i valori di x ed y soddisfacenti al problema algebrico debbono in alcuni casi ritenersi infinitamente grandi.

5. Si dimostri che: se due coniche reali in uno stesso piano s'incontrano in punti reali, questi sono sempre in numero di due o di quattro.

6. Come illustrazione di quanto si è detto alla Nota 8ª si considerino le due equazioni:

$$\begin{aligned} &x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \\ &x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0 \end{aligned} \qquad (\alpha)$$

che si deducono dalle equazioni generali dell'art. 1022 facendo: $A=A_1=B=B_1=1$, $C=C_1=0$.

Dalla formola (6) di quello stesso articolo si vede subito che la risultante $R(y)=0$ si abbassa in questo caso al secondo grado.

Questa stessa risultante si può anche ottenere più speditamente deducendo prima dalle (α) mediante sottrazione l'equazione:

$$(D_1 - D)x + (E_1 - E)y + (F_1 - F) = 0 \qquad (\beta)$$

e sostituendo quindi in una delle (α) il valore di x ricavato da (β).

Delle quattro coppie di valori x, y che soddisfano alle (α), due si otterranno combinando (β) con una delle (α) e saranno evidentemente formate in generale da valori finiti di x ed y.

Le altre due sono quindi entrambe della forma $x=\infty$, $y=\infty$, giacchè è chiaro che anche la risultante in x si abbasserà al 2° grado, cosicchè le soluzioni infinite delle due risultanti dovranno necessariamente accoppiarsi fra loro. Il rapporto $\frac{x}{y}=\frac{\infty}{\infty}$, che apparirebbe indeterminato, ha però due valori finiti e distinti, corrispondenti risp. alle due coppie infinite.

Infatti, dividendo le (α) per y^2, esse prendono la forma:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1 + D\cdot\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{1}{y} + E\cdot\frac{1}{y} + F\cdot\left(\frac{1}{y}\right)^2 = 0$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1 + D_1\cdot\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{1}{y} + E_1\cdot\frac{1}{y} + F_1\cdot\left(\frac{1}{y}\right)^2 = 0,$$

e queste due equazioni fra le due incognite $\frac{x}{y}$ ed $\frac{1}{y}$ sono evidentemente soddisfatte prendendo:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1 = 0 \quad , \quad \frac{1}{y} = 0. \qquad (\gamma)$$

Si ha dunque per le due coppie di valori infiniti di x ed y che risolvono le (α), rispettivamente:

$$\frac{x}{y} = \frac{\infty}{\infty} = \sqrt{-1} = i \quad , \quad \frac{x}{y} = \frac{\infty}{\infty} = -\sqrt{-1} = -i. \qquad (\gamma)'$$

7. L'analisi ora fatta dà luogo ad una interpretazione geometrica molto importante, se si consideri che le (α) sono le equazioni, in coordinate cartesiane x, y, di due cerchi qualunque del piano. Si vede, che dei quattro punti di incontro di due cerchi qualunque, soltanto due cadono in generale a distanza finita, che vengono segnati sui due cerchi dalla retta (β), il così detto *asse radicale* dei due cerchi. Gli altri due punti cadono sempre a distanza infinita e sono sempre gli stessi comunque si scelgano i due cerchi, poichè le (γ) sono indipendenti dai coefficienti di (α).

Dunque: tutti i cerchi del piano passano per due punti fissi, *punti ci-*

clici all' infinito, che si possono definire come i due punti di intersezione della *retta all'infinito* colla coppia di rette:

$$x + iy = 0 \ , \ x - iy = 0.$$

§ 7.° — Teoremi di Bézout sull' eliminazione fra più equazioni con altrettante incognite.

1023. Sia ora proposto il sistema *generale* di tre equazioni con tre incognite:

$$f(x, y, z) = 0 \ , \ \varphi(x, y, z) = 0 \ , \ \psi(x, y, z) = 0 \qquad (1)$$

i cui gradi siano risp. m, n, l.

Considerando le prime due equazioni rispetto alla sola variabile z, si potrà da esse eliminare questa variabile col procedimento del § 5°. La risultante così ottenuta, che designeremo per brevità con (f, φ), sarà una funzione intera di grado mn rispetto alle x ed y. Infatti, se $f = p_0 z^m + p_1 z^{m-1} + \ldots$, $\varphi = q_0 z^n + q_1 z^{n-1} + \ldots$ sono le f, φ ordinate secondo le potenze decrescenti di z, in ogni termine della risultante (f, φ) la somma degli indici delle p, q è costante (art. 1012) ed uguale ad mn. Il grado di (f, φ) nelle x ed y non può dunque superare mn. È poi chiaro che esso non può essere inferiore ad mn, finchè le (1) abbiano coefficienti letterali generali, come supporremo d'ora innanzi, poichè se ciò accadesse in generale, a maggior ragione dovrebbe accadere nel caso speciale in cui f e φ non contenessero che x e z. In questo caso si avrebbe invece, come al § prec. una risultante in x del grado mn.

1024. Ciò premesso, per risolvere le (1), si potrà dapprima eliminare la z fra queste equazioni combinate due a due. Si otterranno così le tre equazioni:

$$(f, \varphi) = 0 \quad , \quad (f, \psi) = 0 \quad , \quad (\varphi, \psi) = 0 \qquad (2)$$

risp. dei gradi mn, ml, nl nelle sole due incognite x ed y. Si potrà dipoi eliminare la y da quest'ultime tre equazioni combinate due a due e si otterranno così tre equazioni nella sola incognita x:

$$\begin{aligned} R_1(x) &\equiv \Big((f, \varphi), (f, \psi)\Big) = 0 & & m^2.n.l \\ R_2(x) &\equiv \Big((f, \varphi), (\varphi, \psi)\Big) = 0 & \text{risp. dei gradi } & m.n^2.l \qquad (3) \\ R_3(x) &\equiv \Big((f, \psi), (\varphi, \psi)\Big) = 0. & & m.n.l^2 \end{aligned}$$

Le tre funzioni intere $R_1(x)$, $R_2(x)$, $R_3(x)$ ammetteranno in generale, cioè finchè restano del tutto indeterminati i coefficienti delle (1) come si è supposto, un massimo comun divisore $D(x)$ il cui grado in x è perfettamente determinato ed i cui coefficienti sono composti razionalmente coi coefficienti generali indeterminati

delle (1). Noi chiameremo questa funzione $D(x)$ la *risultante rispetto ad* x delle tre equazioni generali (1).

È chiaro che le equazioni (3) hanno come conseguenza necessaria l'equazione:

$$D(x) = 0, \tag{4}$$

poichè le radici comuni a più equazioni devono annullare sempre il massimo comun divisore dei loro primi membri. Dimostreremo fra poco che la funzione $D(x)$ è precisamente del grado $m.n.l$; dopodichè ci sarà agevole concludere che il sistema (1) ammette in generale $m.n.l$ terne di valori di x, y, z che lo risolvono.

1025. **Teorema I.** — *Se* $D(x)$ *è la risultante delle tre equazioni* $f(x, y, z) = 0$, $\varphi(x, y, z) = 0$, $\psi(x, y, z) = 0$, *esistono sempre delle funzioni razionali intere* f_1, φ_1, ψ_1 *delle* x, y, z *per le quali si ha identicamente*:

$$D(x) = f_1 f + \varphi_1 \varphi + \psi_1 \psi. \tag{5}$$

Invero, per il teorema dell'art. 1009, si può scrivere primieramente:

$$\begin{aligned} (f, \varphi) &= U' \cdot f + V' \cdot \varphi \\ (f, \psi) &= U' \cdot f + V'' \cdot \psi \\ (\varphi, \psi) &= U''' \cdot \varphi + V''' \cdot \psi \end{aligned} \tag{6}$$

essendo le U e V delle funzioni razionali intere delle x, y, z e dei coefficienti indeterminati che entrano nelle f, φ, ψ.

In secondo luogo, poichè le $R_1(x)$, $R_2(x)$, $R_3(x)$ si costruiscono come risultanti delle funzioni (f, φ), (f, ψ), (φ, ψ) combinate due a due, si ha anche:

$$\begin{aligned} R_1(x) &= H' \cdot (f, \varphi) + K' \cdot (f, \psi) \\ R_2(x) &= H'' \cdot (f, \varphi) + K'' \cdot (\varphi, \psi) \\ R_3(x) &= H''' \cdot (f, \psi) + K''' \cdot (\varphi, \psi), \end{aligned} \tag{7}$$

essendo anche le H, K funzioni razionali intere delle x, y, z e dei coefficienti di f, φ, ψ.

Ora è chiaro che sostituendo le espressioni (6) nelle (7) si ha un risultato della forma:

$$\begin{aligned} R_1(x) &= U_1 f + V_1 \varphi + W_1 \psi \\ R_2(x) &= U_2 f + V_2 \varphi + W_2 \psi \\ R_3(x) &= U_3 f + V_3 \varphi + W_3 \psi. \end{aligned} \tag{8}$$

Ciò premesso, per dimostrare il teorema enunciato, basterà ancora far vedere che la funzione intera $D(x)$, definita come massimo comun divisore delle $R_1(x)$, $R_2(x)$, $R_3(x)$, si può scrivere identicamente:

$$D(x) = \Omega_1(x) \cdot R_1(x) + \Omega_2(x) \cdot R_2(x) + \Omega_3(x) \cdot R_3(x), \tag{9}$$

essendo le $\Omega_i(x)$ funzioni razionali intere della sola x, poichè allora basterà sostituire in (9) le espressioni (8) per ottenere Dx sotto la forma enunciata nel teorema.

Ora in effetto l'identità (9) è una conseguenza immediata dello stesso algoritmo che serve alla ricerca del massimo comun divisore fra due o più funzioni intere. Si comincerà infatti dal cercare il massimo comun divisore $\Delta(x)$ di $R_1(x)$ ed $R_2(x)$, e dalle relazioni fra i resti successivi si otterrà appunto, eliminando i resti che precedono $\Delta(x)$, una identità della forma:

$$\Delta(x) = \theta_1(x)\cdot R_1(x) + \theta_2(x)\cdot R_2(x)$$

con θ_1 e θ_2 funzioni intere di x. Si cercherà quindi il massimo comun divisore $D(x)$ fra $\Delta(x)$ ed $R_3(x)$, e si troverà una relazione analoga:

$$D(x) = \theta(x)\cdot\Delta(x) + \theta_3(x)\cdot R_3(x)$$

che combinata con la precedente ci darà appunto $D(x)$ sotto la forma (9).

1026. Teorema II. — *La risultante* D(x) *delle tre funzioni generali* f(x , y , z) , φ(x , y , z) , ψ(x , y , z) *risp. dei gradi* m, n, l *è una funzione intera di* x *del grado* m × n × l.

Per dimostrare ciò premetteremo l' esame del caso speciale in cui f , φ , ψ siano il prodotto di funzioni di primo grado. Porremo dunque:

$$\begin{aligned} f &\equiv A_1\cdot A_2\ldots A_m \\ \varphi &\equiv B_1\cdot B_2\ldots B_n \\ \psi &\equiv C_1\cdot C_2\ldots C_l\,, \end{aligned} \tag{10}$$

essendo le A, B, C funzioni lineari affatto arbitrarie delle x, y, z.

In tale supposto si ha evidentemente:

$$\begin{aligned} (f\,,\varphi) &= (A_1\,,B_1)(A_1\,,B_2)(A_2\,,B_1)\ldots = \prod_{i,j}(A_i\,,B_j) \\ (f\,,\psi) &= (A_1\,,C_1)(A_1\,,C_2)(A_2\,,C_1)\ldots = \prod_{i,j}(A_i\,,C_j) \\ (\varphi\,,\psi) &= (B_1\,,C_1)(B_1\,,C_2)(B_2\,,C_1)\ldots = \prod_{i,j}(B_i\,,C_j). \end{aligned} \tag{11}$$

Di qui segue ora, mantenendo per le $R_1(x)$, $R_2(x)$, $R_3(x)$ le definizioni date dalle (3):

$$\begin{aligned} R_1(x) &= \Pi(A_i\,,B_j\,,C_h)\cdot\prod_{i\lesseqgtr h}\Big((A_i\,,B_j)(A_h\,,C_k)\Big) \\ R_2(x) &= \Pi(A_i\,,B_j\,,C_h)\cdot\prod_{j\gtreqless h}\Big((A_i\,,B_j)\,,(B_h\,,C_k)\Big) \\ R_3(x) &= \Pi(A_i\,,B_j\,,C_h)\cdot\prod_{j\gtreqless k}\Big((A_i\,,C_j)\,,(B_h\,,C_k)\Big) \end{aligned} \tag{12}$$

dove (A, B, C) indica la risultante rispetto ad x delle tre equazioni lineari $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, ed $\big((A, B), (L, M)\big)$ la risultante della eliminazione di y fra le due equazioni $(A, B)=0$, $(L, M)=0$ che contengono solo x ed y. Nelle (12) gli indici i, j, h, k possono prendere tutti i valori possibili, salvo, per i secondi prodotti, le restrizioni ivi indicate.

Ora si riconosce immediatamente che i fattori di uno qualunque dei tre prodotti:

$$\prod_{i \gtrless h}\big((A_i, B_j), (A_h, C_k)\big), \quad \prod_{j \gtrless h}\big((A_i, B_j), (B_h, C_k)\big)$$

$$\prod_{j \gtrless k}\big((A_i, C_j), (B_h, C_k)\big) \tag{13}$$

sono affatto distinti, in generale, dai fattori lineari che compongono gli altri due. Dalle (12) risulta dunque che il massimo comun divisore delle funzioni intere $R_1(x)$, $R_2(x)$, $R_3(x)$ è dato da

$$D(x) = \Pi(A_i, B_j, C_k), \tag{14}$$

epperò è di grado $m.n.l.$

Ciò premesso, supponiamo, se è possibile, che nel caso di equazioni a coefficienti letterali affatto generali contemplato all'art. 1023, si avesse:

$$R_1(x)=D(x)Q_1(x), \quad R_2(x)=D(x)Q_2(x), \quad R_3(x)=D(x)Q_3(x) \tag{15}$$

e che il grado del massimo comun divisore $D(x)$ superasse il prodotto $m.n.l.$ Poichè le (15) sono per supposto delle *identità*, valide qualunque sieno i coefficienti delle f, φ, ψ, è chiaro che esse dovrebbero sussistere anche quando a questi coefficienti si dessero i valori speciali corrispondenti al sistema speciale (10). Si dedurrebbe allora dalle (15) che le funzioni $R_1(x)$, $R_2(x)$, $R_3(x)$ ammetterebbero, anche nel caso del sistema speciale (10), un massimo comun divisore di grado superiore ad $m.n.l$ contrariamente a quanto si è sopra trovato. Ci è lecito dunque di asserire intanto che il massimo comun divisore $D(x)$ riuscirà in generale di grado *eguale od inferiore* ad $m.n.l.$

Ma neanche può esso riuscire in generale di grado inferiore ad $m.n.l$, chè altrimenti, specializzando i coefficienti delle f, φ, ψ in modo da ridurle alla forma (10), il massimo comun divisore generale $D(x)$ si dovrebbe specializzare in modo da essere il prodotto di una parte soltanto dei fattori lineari che compongono il prodotto $\Pi(A_i, B_j, C_h)$, il che è manifestamente assurdo presentandosi tutti questi fattori in modo affatto simmetrico riguardo ai fattori lineari $A_1, A_2, \ldots, B_1, B_2, \ldots, C_1, C_2, \ldots$ nei quali si decompongono per supposto le f, φ, ψ.

Concludiamo dunque che il massimo comun divisore generale $D(x)$ è precisamente del grado $m.n.l.$

1027. Teorema III. — *Il sistema di tre equazioni algebriche con tre incognite dei gradi* m, n, l, *ammette in generale* mnl *sistemi distinti di soluzioni.*

Questo teorema è una conseguenza quasi immediata di quanto si è sopra dimostrato. Invero, poichè ogni valore di x, che accoppiato con opportuni valori di y e z risolve le equazioni proposte (1), deve soddisfare in generale, come si è già notato, all'equazione (4) che è di grado mnl, è chiaro che per x si avranno in generale soltanto mnl valori possibili e che per conseguenza il numero dei sistemi di soluzioni del problema non può in generale superare mnl. In secondo luogo supponiamo, se è possibile, che il numero dei sistemi di soluzioni fosse in generale uguale a k e che fosse $k < mnl$. I k valori di x soddisfacenti in generale al sistema sarebbero radici di un'equazione di grado k:

$$x^k + t_1 x^{k-1} + t_2 x^{k-2} + \ldots + t_k = 0 \tag{15}$$

i cui coefficienti dovrebbero essere delle funzioni perfettamente determinate dei coefficienti delle tre equazioni fondamentali. Ora specializzando le tre equazioni secondo il sistema speciale (10), l'equazione (15) dovrebbe essere soddisfatta soltanto da k degli mnl valori di x definiti dalle mnl equazioni lineari:

$$(A_i \, , B_j \, , C_h) = 0.$$

Ma ciò è assurdo, poichè i coefficienti della (15) sono composti simmetricamente rispetto alle $A_1 , A_2 , \ldots , A_m$ e così pure simmetricamente rispetto alle $B_1 , \ldots , B_n$ e rispetto alle $C_1 , \ldots , C_l$.

1028. I teoremi ora dimostrati sono stati stabiliti da Bézout nel suo trattato fondamentale sull'eliminazione (*) con metodo assai più laborioso. La nostra dimostrazione ha il vantaggio della maggiore brevità e quello di dare al tempo stesso un metodo pratico per la costruzione effettiva della risultante $D(x)=0$ mediante semplici operazioni di divisibilità. A questo proposito dobbiamo anche notare che la specializzazione fatta nell'art. 1026 è assai istruttiva, in quanto da essa appare che le tre funzioni (13), cioè i tre quozienti:

$$\frac{R_1(x)}{D(x)} \, , \; \frac{R_2(x)}{D(x)} \, , \; \frac{R_3(x)}{D(x)}$$

sono primi fra loro due a due nel caso speciale del sistema (1) e quindi lo sono necessariamente anche in generale.

Dunque: *il massimo comun divisore delle tre funzioni* $R_1(x)$, $R_2(x)$, $R_3(x)$ *per il sistema generale* (1) *coincide col massimo comun divisore di due qualunque di esse.*

Per conseguenza: *la risultante delle tre equazioni generali* $f=0$, $\varphi=0$, $\psi=0$ *altro non è che il massimo comun divisore delle due funzioni intere di* x :

$$\Big((f \, , \varphi) \, , (f \, , \psi)\Big) \; , \; \Big((f \, , \varphi) \, , (\varphi \, , \psi)\Big) \tag{16}$$

ottenute eliminando successivamente dalle tre equazioni le altre due incognite z *ed* y.

(*) *Théorie générale des équations algébriques* (Paris, 1779).

1029. Le dimostrazioni date negli articoli precedenti sono di indole generale. Il metodo può dunque estendersi ad un numero qualunque di equazioni con altrettante incognite. Esso può tuttavia semplificarsi supponendo che si siano già date le regole per costruire la risultante di k equazioni fra k incognite e deducendone quindi quella di $k+1$ equazioni con $k+1$ incognite.

Per chiarire questo concetto ci basterà aggiungere qualche altro cenno sulla risoluzione di un sistema di quattro equazioni:

$$f_1 = 0 \ , f_2 = 0 \ , f_3 = 0 \ , f_4 = 0 \tag{17}$$

fra quattro incognite x, y, z, t. Trascurando per un momento una delle (17), p. es. la f_i, resteranno tre equazioni dalle quali si potranno eliminare col metodo già spiegato le due incognite z, t, ottenendo come risultante una sola equazione $T_i=0$ fra le due incognite x ed y. Combinando ora due a due le quattro equazioni:

$$T_1 = 0 \ , T_2 = 0 \ , T_3 = 0 \ , T_4 = 0 \tag{18}$$

così dedotte dalle (17), p. es. la $T_i = 0$ e la $T_j = 0$, ed eliminandone la y si potranno ottenere sei equazioni:

$$R_{i\,,\,j} = 0 \tag{19}$$

contenenti la sola x. Se $D(x)$ è il massimo comun divisore delle funzioni $R_{i\,,\,j}$, tutti i valori di x, che congiunti ad opportuni valori di y, z, t soddisfano il sistema (1), dovranno essere radici della risultante:

$$D(x) = 0\,, \tag{20}$$

e si dimostrerà, in modo affatto analogo a quello tenuto all'articolo 1025, che $D(x)$ si può esprimere identicamente come somma delle f_1, f_2, f_3, f_4 moltiplicate per funzioni intere delle x, y, z, t. Enuncieremo dunque senz'altro, come segue, i teoremi di Bézout sopra il sistema di un numero qualunque di equazioni con altrettante incognite:

Dato un sistema generale di n *equazioni* $f_1=0$, $f_2=0$, ..., $f_n=0$ *fra* n *incognite* x, y, ..., t *risp. dei gradi* m_1, m_2, ..., m_n:

1°) *Esistono in generale* $m_1 m_2 \dots m_n$ *sistemi di valori delle incognite che soddisfano a tutte queste equazioni.*

2°) *Esiste una funzione intera* D(x) *della sola incognita* x, *i cui coefficienti sono funzioni razionali dei coefficienti generali delle* f_1, f_2, ..., f_n, *la quale è del grado* $m_1 m_2 \dots m_n$ *in* x *ed eguagliata a zero dà per radici i valori dell'incognita* x.

3°) *Esistono* n *funzioni intere* φ_1, φ_2, ..., φ_n *delle* x, y, ..., t, *per le quali si ha identicamente*:

$$D(x) = \varphi_1 f_1 + \varphi_2 f_2 + \dots + \varphi_n f_n. \tag{21}$$

1030. Noteremo per ultimo che dalle n equazioni si dedurranno in generale $n-1$ relazioni della forma:

$$y = F_1(x)\ , z = F_2(x)\ , \dots , t = F_{n-1}(x)\,, \tag{22}$$

dove le F indicano funzioni razionali, i cui coefficienti si dedur-

ranno da quelli delle $f_1, f_2, \ldots, f_n$ con semplici operazioni di divisibilità.

Ciò si dimostra con facile estensione del ragionamento fatto all'art. 1020 per il caso di due sole equazioni con due incognite. Segue dalle (22) che, una volta risoluta l'equazione $D(x) = 0$, non sarà in generale necessario di risolvere altre equazioni, poichè, trovato un valore di x, i corrispondenti valori di $y, z, \ldots, t$ saranno dati dalle (22) che potranno divenire *illusorie*, cioè dare i valori di $y, z, \ldots, t$ sotto la forma $\frac{0}{0}$, soltanto in certi casi particolari.

Note ed Esercizi.

1. Si applichi la teoria generale al sistema speciale delle tre equazioni con tre incognite:

$$x + y + z = A \ , \ x^2 + y^2 + z^2 = B \ , \ x^3 + y^3 + z^3 = C.$$

Riconoscere come in questo caso la risultante rispetto ad una delle incognite sia un quadrato esatto.

2. La teoria generale esposta risolve anche il problema di trovare la condizione affinchè un sistema di n equazioni con sole $n-1$ incognite sia risolubile con valori finiti delle incognite. Invero questo sistema si può sempre considerare come un sistema di equazioni, degli stessi gradi m_1, $m_2, \ldots$, fra n incognite, introducendo fittiziamente una nuova incognita ξ; che entrerà però al grado zero in ogni equazione. La risultante costruita col metodo generale rispetto a quest'ultima incognita ξ si ridurrà così ad una costante che dovrà essere nulla qualora il sistema proposto sia risolubile con valori finiti delle $n-1$ incognite, come emerge dalla formola (5) dell'art. 1025.

3. Al sistema di n equazioni con $n-1$ incognite si può anche sostituire, analogamente a quanto si è fatto per i sistemi lineari, un sistema di n equazioni *omogenee* fra n incognite; ponendo cioè le incognite $x, y, z, \ldots, t$ sotto la forma $\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n}$ e moltiplicando quindi ogni equazione per x_n elevata al grado dell'equazione.

Supponiamo, per semplicità, di avere un sistema di tre equazioni *omogenee* fra le tre incognite x, y, z:

$$f(x, y, z) = 0 \ , \ \varphi(x, y, z) = 0 \ , \ \psi(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

risp. dei gradi m_1, m_2, m_3, e costruiamo il determinante:

$$I = \begin{vmatrix} f_x & f_y & f_z \\ \varphi_x & \varphi_y & \varphi_z \\ \psi_x & \psi_y & \psi_z \end{vmatrix} \tag{2}$$

che si chiama il *Jacobiano* delle tre funzioni f, φ, ψ, composto (cfr. articolo 510) colle derivate parziali delle f, φ, ψ rispetto alle tre variabili x, y, z.

Per il teorema di Eulero (art. 512) si ha identicamente:

$$\begin{aligned} x \cdot f_x + y \cdot f_y + z \cdot f_z &= m_1 f \\ x \cdot \varphi_x + y \cdot \varphi_y + z \cdot \varphi_z &= m_2 \varphi \\ x \cdot \psi_x + y \cdot \psi_y + z \cdot \psi_z &= m_3 \psi. \end{aligned} \tag{3}$$

Di qui emerge che, *se il sistema* (1) *è risolubile con valori finiti e non tutti nulli delle* x, y, z, *questi stessi valori devono anche soddisfare* (art. 432) l'equazione $I=0$ (di grado $m_1+m_2+m_3-3$ nelle x, y, z).

Designando con F_x, Φ_x, Ψ_x, ... gli aggiunti di f_x, φ_x, ψ_x ... nel determinante (2), si ha, risolvendo il sistema (3) rispetto ad x, l'identità:

$$I\cdot x = m_1 f F_x + m_2 \varphi \Phi_x + m_3 \psi \Psi_x$$

che derivata parzialmente rispetto ad x ci dà (art. 690):

$$\begin{aligned} x\cdot I_x + I = {} & m_1 f_x F_x + m_2 \varphi_x \Phi_x + m_3 \psi_x \Psi_x \\ & + m_1 f\cdot (F_x)_x + m_2 \varphi\cdot(\Phi_x)_x + m_3\psi\cdot(\Psi_x)_x \end{aligned}$$

e derivata rispetto ad y:

$$\begin{aligned} x\cdot I_y = {} & m_1 f_y F_x + m_2 \varphi_y \Phi_x + m_3 \psi_y \Psi_x \\ & + m_1 f\cdot (F_x)_y + m_2 \varphi\cdot(\Phi_x)_y + m_3\psi\cdot(\Psi_x)_y , \end{aligned}$$

onde, per il sistema di valori x, y, z che soddisfa le (1), si avrà:

$$\begin{aligned} x\cdot I_x &= m_1 f_x F_x + m_2 \varphi_x \Phi_x + m_3 \psi_x \Psi_x \\ x\cdot I_y &= m_1 f_y F_x + m_2 \varphi_y \Phi_x + m_3 \psi_y \Psi_x \\ x\cdot I_z &= m_1 f_z F_x + m_2 \varphi_z \Phi_x + m_3 \psi_z \Psi_x . \end{aligned}$$

Ma per $m_1 = m_2 = m_3$ i secondi membri di queste equazioni si annullano identicamente (art. 423-424); quindi, poichè almeno una delle x, y, z, per es. la x, ha valore diverso da zero:

$$I_x = 0 \ , \ I_y = 0 \ , \ I_z = 0. \tag{4}$$

Questo risultato si generalizza evidentemente come segue:

Le soluzioni di un sistema di più equazioni omogenee e dello stesso grado con altrettante incognite soddisfano anche alle equazioni che si ottengono eguagliando a zero le derivate parziali, rispetto a ciascheduna incognita, della Jacobiana del sistema.

4. Si suppongano le equazioni (1) di secondo grado nelle x, y, z. Si costruiscano le equazioni (4) che riusciranno pure del secondo grado. Si hanno così in tutto sei equazioni lineari omogenee fra le sei quantità: x^2, y^2, z^2, xy, yz, zx. Eguagliando a zero il determinante di queste equazioni si otterrà la condizione per la risolubilità del sistema proposto.

5. Per l'ulteriore sviluppo di quanto si è dimostrato nelle due note che precedono, cioè in ispecie per quanto riguarda la generalizzazione del metodo dialitico di Sylvester allo scopo di ottenere le risultanti di più equazioni con più incognite sotto forma di un unico determinante, rimandiamo il lettore all'eccellente trattato del *Salmon* (traduzione tedesca di *Fiedler*): *Vorlesungen über die Algebra der linearen Substitutionen.*

Rimandiamo allo stesso trattato (*) anche per quanto riguarda l'estensione a più equazioni con più incognite del metodo di eliminazione fondato sull'uso di funzioni simmetriche dei sistemi di soluzioni. Non possiamo però esimerci dal dare qui alcuni pochi teoremi fondamentali.

6. Sia dato, per fissare le idee, il sistema di tre equazioni con tre incognite:

$$f(x\,,y\,,z)=0 \ , \ \varphi(x\,,y\,,z)=0 \ , \ \psi(x\,,y\,,z)=0 \tag{5}$$

risp. dei gradi m, n, l. Sappiamo (art. 1027) che esistono in generale $\mu = mnl$

(*) Ovvero alla *Théorie de l'Élimination* di *Faà di Bruno.*

sistemi distinti di soluzioni che indicheremo con

$$x_1 , y_1 , z_1 ; x_2 , y_2 , z_2 ; \dots ; x_\mu , y_\mu , z_\mu , \qquad (6)$$

e diciamo che: *se* $\Phi(x_1 , y_1 , z_1 ; \dots : x_\mu , y_\mu , z_\mu)$ *è una funzione razionale delle* (6) *simmetrica rispetto ai* μ *gruppi* x_i , y_i , z_i (*), *essa si può sempre esprimere come una funzione razionale dei coefficienti delle* f , φ , ψ.

Invero si ha per l'art. 1030:

$$y_i = F_1(x_i) , z_i = F_2(x_i) \text{ per } i = 1 , 2 , \dots , \mu ,$$

onde si può scrivere:

$$\Phi = \Phi[x_1 , F_1(x_1) , F_2(x_1) ; \dots ; x_\mu , F_1(x_\mu) , F_2(x_\mu)] ,$$

cosicchè la Φ si può rappresentare come una funzione simmetrica delle $x_1 , x_2 , \dots , x_\mu$, cioè delle μ radici della risultante $D(x) = 0$ (art. 1024) delle tre equazioni (5).

La Φ si esprimerà dunque (art. 922) come una funzione razionale dei coefficienti di $D(x)$, e quindi anche dei coefficienti di f , φ , ψ.

7. Siano ora date fra le tre incognite x, y, z quattro equazioni:

$$f(x , y , z)=0 , \varphi(x , y , z)=0 , \psi(x , y , z)=0 , \chi(x , y , z)=0. \qquad (7)$$

La condizione necessaria e sufficiente affinchè questo sistema sia risolubile, è espressa evidentemente dall' equazione:

$$\chi(x_1 , y_1 , z_1) \cdot \chi(x_2 , y_2 , z_2) \dots \chi(x_\mu , y_\mu , z_\mu) = 0 \qquad (8)$$

che è una funzione simmetrica dei μ sistemi di valori x_i , y_i , z_i che soddisfacevano allo tre prime equazioni (5). Per l'art. prec. al primo membro di questa equazione si potrà sostituire una funzione razionale dei coefficienti delle f , φ , ψ e della χ; ed i coefficienti di χ entreranno evidentemente al grado μ. Dunque: *la risultante di* m *equazioni con* m — 1 *incognite è una funzione razionale intera dei coefficienti delle* m *equazioni, la quale rispetto ai coefficienti di una delle equazioni è di un grado eguale al prodotto dei gradi di tutte le rimanenti.*

8. Fra gli esempi di sistemi particolari di equazioni con altrettante incognite che ammettono un nnmero infinito di sistemi di soluzioni, è importante il seguente:

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2+(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)(\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta) &= 0 \\ x^2+y^2+z^2+(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)(\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta) &= 0 \\ x^2+y^2+z^2+(a_3x+b_3y+c_3z+d_3)(\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta) &= 0 \end{aligned} \qquad (9)$$

Sottraendo dalla prima equazione la seconda, ovvero la terza, si ha:

$$[(a_1-a_2)x+(b_1-b_2)y+(c_1-c_2)z+(d_1-d_2)](\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta)=0$$

$$[(a_1-a_3)x+(b_1-b_3)y+(c_1-c_3)z+(d_1-d_3)](\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta)=0$$

d' onde emerge che tutte le possibili soluzioni del sistema (9) si compongono:

1°) dei due sistemi di valori di x, y, z che soddisfano alla prima delle

(*) Cosicchè p. es.:

$$F(x_1 , y_1 , z_1 ; x_2 , y_2 , z_2 ; \dots)=F(x_2 , y_2 , z_2 ; x_1 , y_1 , z_1 ; \dots), \text{ ecc.}$$

equazioni (9) ed alle due equazioni di primo grado:

$$(a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)y + (c_1 - c_2)z + (d_1 - d_2) = 0$$

$$(a_1 - a_3)x + (b_1 - b_3)y + (c_1 - c_3)z + (d_1 - d_3) = 0\,,$$

2°) degli infiniti sistemi di valori di x, y, z che soddisfano alle due equazioni:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0 \quad , \quad \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0. \qquad (10)$$

Per $\alpha = \beta = \gamma = 0$, $\delta = 1$ le equazioni (9) sono quelle di tre sfere qualisivogliano in coordinate cartesiane ortogonali, e la seconda delle (10) rappresenta il piano all'infinito. Si vede dunque: che l'intersezione di tre sfere qualisivogliano si compone in generale di due soli punti isolati e di infiniti punti situati in un cerchio comune a tutte le sfere dello spazio (*cerchio imaginario all'infinito*), che si può definire come intersezione della sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ col piano all'infinito.

CAPITOLO XIV.

TRASFORMAZIONE DELLE EQUAZIONI. RISOLUZIONE GENERALE DELLE EQUAZIONI DEI PRIMI QUATTRO GRADI.

§ 1.° — Trasformazione lineare di una variabile. Trasformazione lineare di un'equazione ad un'incognita.

1031. Se in luogo di un qualsiasi valore della variabile x si prenda il valore $(ax+b):(cx+d)$, essendo a, b, c, d quattro numeri costanti fissati a piacere colla sola restrizione che $ad-bc$ sia diverso da zero, ed il nuovo valore così ottenuto si indichi con y, si dice che sulla variabile x si è eseguita la *trasformazione lineare*:

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}. \tag{1}$$

Quando non importi mettere in evidenza le due variabili x ed y, questa trasformazione si rappresenta anche, più semplicemente, col simbolo $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Questo simbolo si può anche considerare come un simbolo operativo da applicarsi alla variabile da trasformarsi. Pertanto in luogo di (1) si scrive qualche volta:

$$y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} x.$$

Risolvendo la (1) rispetto ad x, si ottiene l' equivalente:

$$x = \frac{-dy+b}{cy-a} = \begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix} y. \tag{1'}$$

1032. Qualunque siano i valori che si attribuiscono ad x, ovvero ad y, i secondi membri delle (1) ed (1)' prenderanno sempre un valore finito e determinato o, al più, un valore della forma $\frac{A}{0}$ con A diverso da zero, nel qual caso si dirà che a quel valore speciale dato all'una variabile corrisponde per l'altra il valore ∞. La forma indeterminata $\frac{0}{0}$ non si può avere, perchè, se p. es. per un certo valore di x si avesse simultaneamente:

$$ax+b=0 \ , \ cx+d=0,$$

se ne dedurrebbe $ad-bc=0$, contro il supposto.

1033. Supponendo nella (1) nulli od uguali ad 1 alcuni dei coefficienti a, b, c, d, si hanno i seguenti tre casi particolari di trasformazioni lineari:

$$y = \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x \quad , \quad y = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x \quad , \quad y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x,$$

cioè:

$$y = x + h \quad , \quad y = kx \quad , \quad y = \frac{1}{x}, \tag{2}$$

e, reciprocamente, è facile riconoscere che *ogni trasformazione lineare* (1) *si può ottenere come il risultato di trasformazioni di questi tre tipi speciali eseguite successivamente.*

Ciò è evidente, se $c=0$; poichè in questo caso la (1) si riduce ad

$$y = \left(\frac{a}{d}\right)x + \left(\frac{b}{d}\right), \text{ cioè alla forma: } y = kx + h.$$

Se c è diverso da zero, dividendo per c il numeratore e il denominatore della frazione (1), si può dare alla trasformazione (1) la forma:

$$y = \frac{\alpha x + \beta}{x + \gamma} = \frac{\beta - \gamma\alpha}{x + \gamma} + \alpha$$

d'onde appare che la trasformazione (1) si può ottenere eseguendo *successivamente* sopra x le seguenti quattro trasformazioni:

1°) una trasformazione $y = x + h$, per $h = \gamma$,

2°) una trasformazione $y = \dfrac{1}{x}$,

3°) una trasformazione $y = kx$, per $k = \beta - \gamma\alpha$,

4°) una trasformazione $y = x + h$, per $h = \alpha$.

1034. *Se quattro numeri* x_1, x_2, x_3, x_4 *si sottopongano ad una stessa trasformazione lineare, e siano* y_1, y_2, y_3, y_4 *i corrispondenti numeri trasformati, il rapporto anarmonico dei primi è uguale al rapporto anarmonico dei trasformati, cioè*:

$$\frac{x_1 - x_3}{x_1 - x_4} : \frac{x_2 - x_3}{x_2 - x_4} = \frac{y_1 - y_3}{y_1 - y_4} : \frac{y_2 - y_3}{y_2 - y_4}.$$

Invero ciò è senz'altro manifesto nel caso in cui la trasformazione lineare appartenga ad uno dei tre tipi elementari (2). Il teorema sarà dunque vero anche per una trasformazione ottenuta eseguendo delle trasformazioni successive di questi tre tipi, cioè appunto (art. 1033) per una qualsivoglia trasformazione lineare, c. d. d.

1035. Nei §§ che seguono, noi tratteremo successivamente di questi tre tipi elementari di trasformazioni lineari, applicandoli a quegli n valori speciali di x che sono radici di una data equazione del grado n, allo scopo di studiare le proprietà dell'equazione *trasformata*, cioè dell'equazione che ha per radici gli n valori speciali di y che corrispondono a quegli n valori speciali di x.

Note ed Esercizi.

1. Se S e T sono due trasformazioni lineari, la trasformazione lineare che nasce dall'eseguire prima la trasformazione S e poi, sul numero così ottenuto, la trasformazione T, si suol designare col prodotto TS. Verificare che:

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha a+\beta c & \alpha b+\beta d\\ \gamma a+\delta c & \gamma b+\delta d\end{pmatrix}$$

e che

$$(\alpha\delta-\beta\gamma)(ad-bc)=(\alpha a+\beta c)(\gamma b+\delta d)-(\gamma a+\delta c)(\alpha b+\beta d).$$

2. Giusta la convenzione adottata, la decomposizione fatta all'art. 1083 si può esprimere, per c diverso da zero, come segue:

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & a:c\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(bc-ad):c^2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & d:c\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

3. Verificare le uguaglianze:

$$\begin{pmatrix}1 & p:q\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & p\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}p:q & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

4. Dalle ultime due Note segue evidentemente che: *ogni trasformazione lineare a coefficienti razionali* (*cosicchè* a, b, c, d *si potranno sempre ritenere interi*) *è la risultante di trasformazioni lineari del tipo* $y=\frac{1}{x}$ *e dei tipi* $y=x+h$ *ed* $y=kx$, *ove* h *e* k *sono numeri interi.*

5. Verificare che:

$$\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

6. Se $BC-DA=1$, si può scrivere:

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Bc-Da & Bd-Db\\ Ca-Ac & Cb-Ad\end{pmatrix}.$$

7. Se a e c sono due interi primi fra loro, si possono sempre determinare (art. 656) altri due interi A, C tali da aversi $aC-cA=1$. Si potrà allora scrivere, qualunque siano b e d:

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A & a\\ C & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & ad-cb\\ 1 & Cb-Ad\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A & a\\ C & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}ad-cb & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & Cb-Ad\end{pmatrix}.$$

8. Se a e c non sono primi fra loro, ma sia δ il loro massimo comun divisore e sia $a=\alpha\delta$, $c=\gamma\delta$, si potrà scrivere:

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\delta & b\\ \gamma\delta & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha & b\\ \gamma & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

e quindi anche, determinando come nella Nota prec. A e C in modo da aversi $\alpha C-\gamma A=1$:

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A & \alpha\\ C & \gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \alpha d-\gamma b\\ 1 & Cb-Ad\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

9. Le trasformazioni $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ per le quali a, b, c, d sono numeri interi, sono di grande importanza in molte questioni. Il numero intero $n=ad-bc$ si chiama in tal caso l'*ordine* della trasformazione. Dalle due Note che precedono discende evidentemente che *se* $n = \pm p_1 p_2 \ldots p_k$ *è l'ordine della trasformazione decomposto nei suoi fattori primi* $p_1, p_2, \ldots, p_k$, *essa si può sempre considerare come la risultante delle* k *trasformazioni :*

$$\begin{pmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} p_k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(ciascuna da eseguirsi una sol volta) combinate con trasformazioni di ordine uguale a ± 1.

10. La trasformazione lineare $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ si può anche rappresentare mediante la sostituzione lineare omogenea a due variabili (cfr. art. 472) :

$$y_1 = ax_1 + bx_2 \; , \; y_2 = cx_1 + dx_2 \; ,$$

purché si ponga $y_1 : y_2 = y$, $x_1 : x_2 = x$.

Considerando le cose da questo punto di vista il lettore potrà dedurre facilmente il teorema della Nota che precede come caso particolare di quanto si è già dimostrato (pag. 215, Note 11 e 12), per le sostituzioni, a coefficienti interi, con n variabili.

11. Dalle dimostrazioni già fatte (pag. 215, Note 12 e 13) si dedurrà poi, pel caso particolare in cui il modulo della sostituzione sia ± 1, che *ogni trasformazione lineare, a coefficienti interi, di ordine* ± 1, *si può ottenere mediante le tre trasformazioni :*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

12. Osservando che :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

si riconoscerà facilmente come al teorema ora enunciato si possa anche dare la forma seguente: *ogni trasformazione lineare, a coefficienti interi, di ordine* ± 1 *si può ottenere mediante le tre trasformazioni:*

$$y = x + 1 \quad , \quad y = -x \quad , \quad y = \frac{1}{x}.$$

§ 2.° — Trasformazione a radici aumentate.

1036. Detta x una qualunque delle n radici dell' equazione :

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0 \; , \qquad (1)$$

ci proponiamo di costruire un'altra equazione dello stesso grado le cui radici, che chiameremo y, siano legate alle radici di x della (1) da una relazione della forma :

$$y = x + k \qquad (2)$$

dove k è una costante fissata a piacere.

In altri termini, se $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ sono le n radici di (1), si vuol

costruire un'altra equazione le cui radici siano $\alpha+k, \beta+k, \ldots, \lambda+k$, cioè siano eguali alle radici di (1) *aumentate* di una stessa quantità data k.

Potendo però k essere un numero qualunque, la trasformazione (2) non differisce sostanzialmente dalla trasformazione: $y=x-h$, che risoluta rispetto ad x dà:

$$x = y + h. \tag{3}$$

Ora, posto per brevità:

$$f(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n, \tag{4}$$

sostituendo in (1) in luogo di x la sua espressione (3), si ha:

$$f(y+h) = 0,$$

cioè (art. 503):

$$f(h) + \frac{f'(h)}{\lfloor 1} y + \frac{f''(h)}{\lfloor 2} y^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(h)}{\lfloor n} y^n = 0. \tag{5}$$

È questa un' equazione di grado n nell' incognita y; ed è appunto la trasformata richiesta (a radici *diminuite* di h) dell'equazione $f(x) = 0$.

1037. La determinazione pratica dei coefficienti della equazione trasformata importa, come si vede, di calcolare, data la funzione $f(x)$ ed un certo numero h, i valori dei quozienti:

$$f(h), \frac{f'(h)}{\lfloor 1}, \frac{f''(h)}{\lfloor 2}, \ldots, \frac{f^{(n)}(h)}{\lfloor n}. \tag{6}$$

Questo calcolo si fa nel modo più vantaggioso mediante il seguente procedimento dovuto ad *Horner*.

Si costruisca il quadro:

$$\begin{array}{c|lllllll}
h & a_0 & a_1 & a_2 \ldots a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\
\hline
 & a_0 & b_1 & b_2 \ldots b_{n-3} & b_{n-2} & b_{n-1} & b_n \\
 & a_0 & c_1 & c_2 \ldots c_{n-3} & c_{n-2} & c_{n-1} & \\
 & a_0 & d_1 & d_2 \ldots d_{n-3} & d_{n-2} & & \\
 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & a_0 & e_1 & & & & \\
 & a_0 & & & & &
\end{array} \tag{7}$$

cominciando collo scrivere nella prima orizzontale i coefficienti $a_0, a_1, \ldots, a_n$ *della funzione proposta* $f(x)$. *Dopo ciò si formi la seconda orizzontale scrivendo per primo termine* a_0 *e calcolando i successivi termini* $b_1, b_2, \ldots, b_n$ *colla regola che un termine qualunque si ottiene moltiplicando il precedente per* h *ed aggiungendo al risultato il termine della prima orizzontale che si trova*

al disopra del termine cercato. Si formino colla stessa regola le altre orizzontali (cosicchè p. es. per la quarta linea orizzontale si avrà: $d_i = d_{i-1}h + c_i$*) coll'avvertenza che il numero dei termini da calcolarsi per ogni orizzontale va diminuito ogni volta di un'unità. Fatto ciò, gli ultimi termini delle successive orizzontali, a cominciare dalla seconda, saranno appunto i valori cercati, cioè:*

$$f(h) = b_n \, , \; f'(h) = c_{n-1} \, , \; \frac{f''(h)}{\lfloor 2} = d_{n-2} \, , \ldots , \; \frac{f^{(n)}(h)}{\lfloor n} = a_0.$$

Così, ad esempio, se sia data la funzione:

$$f(x) = 3x^4 + 4x^2 - 5x + 6$$

e si vogliano calcolare i valori di $f(-2)$, $f'(-2)$, . . . , si verrà a costruire il quadro seguente:

−2	3	0	4	−5	6
	3	−6	16	−37	80
	3	−12	40	−117	
	3	−18	76		
	3	−24			
	3				

onde si concluderà:

$$f(-2)=80 \; , \; f'(-2)=-117 \; , \; \frac{f''(-2)}{\lfloor 2}=76 \; , \; \frac{f'''(-2)}{\lfloor 3}=-24.$$

1038. È facile dar la ragione di questa regola. Partendo infatti dall' identità (art. 505):

$$f(x) = f(h) + (x-h)\frac{f'(h)}{\lfloor 1} + (x-h)^2\frac{f''(h)}{\lfloor 2} + \ldots ,$$

si vede che $f(h)$ è il resto della divisione di $f(x)$ per $x-h$, e che il quoziente di tale divisione è

$$\frac{f'(h)}{\lfloor 1} + (x-h)\frac{f''(h)}{\lfloor 2} + (x-h)^2\frac{f'''(h)}{\lfloor 3} + \ldots .$$

Se questo quoziente si divide ancora per $x - h$, si vede che il resto sarà $\frac{f'(h)}{\lfloor 1}$ e che il quoziente sarà:

$$\frac{f''(h)}{\lfloor 2} + (x-h)\frac{f'''(h)}{\lfloor 3} + (x-h)^2\frac{f^{IV}(h)}{\lfloor 4} + \ldots$$

il quale diviso per $x - h$ darà a sua volta il resto $\frac{f''(h)}{\lfloor 1}$, e così via. I numeri cercati $f(h)$, $\frac{f'(h)}{\lfloor 1}$, $\frac{f''(h)}{\lfloor 2}$, ... si possono dunque trovare come resti successivi della divisione ripetuta di $f(x)$ per

$x-h$. Ora ciò si fa appunto col quadro (7), il quale non è altro che il risultato dell' applicazione ripetuta della regola di Ruffini (art. 491 e 492) per calcolare i coefficienti del quoziente ed il resto della divisione di una funzione intera per $x-h$.

Così si vede che $a_0, b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ sono appunto i coefficienti del primo quoziente e che b_n è il primo resto. Similmente si vede che dividendo il primo quoziente per $x-h$ si otterrà un secondo quoziente che avrà appunto per coefficienti i numeri $a_0, c_1, c_2, \ldots, c_{n-2}$ e per resto il numero c_{n-1} dati dalla terza orizzontale del quadro. Sarà dunque $c_{n-1}=f'(h)$, e così di seguito.

1039. Nella trasformata dell' equazione $f(x)=0$ data dalla formola (5) il coefficiente della potenza y^{n-i} della nuova incognita y è $\frac{1}{|\underline{n-i}}f^{(n-i)}(h)$, cioè una funzione intera di h del grado i. Si potrà dunque fare in modo che l' equazione trasformata manchi del termine contenente una data potenza y^{n-i}, determinando la costante h in modo da soddisfare all' equazione:

$$f^{(n-i)}(h)=0.$$

Essendo questa un'equazione di grado i in h, è chiaro che tale determinazione si potrà fare in generale in i modi distinti.

1040. In particolare per far sparire nella trasformata il termine in y^{n-1}, basterà risolvere un'equazione di 1° grado, che si otterrà immediatamente ponendo nella (1) $x=y+h$ e ordinandone lo sviluppo secondo le potenze di y. Si trova così:

$$a_0(y+h)^n+a_1(y+h)^{n-1}+\ldots+a_n=a_0y^n+(na_0h+a_1)y^{n-1}+\ldots=0.$$

Basterà dunque prendere $h=-\frac{a_1}{na_0}$, perchè l'equazione (1) si trasformi in un'altra mancante del secondo termine.

Esercizi.

1. Trasformare l'equazione $4x^3-6x^2+8x+5=0$ in un' altra mancante del secondo termine.

2. Risolvere l' equazione del secondo grado riducendola alla forma binomia mediante la trasformazione a radici aumentate.

3. *Se* $f(x)=0$ *è un' equazione la cui prima derivata ha tutte le sue radici eguali, il primo membro* $f(x)$ *è necessariamente della forma*:

$$f(x)=(ax+b)^n+c.$$

Si dimostri ciò facendo vedere che, nell'ipotesi fatta, l'equazione $f(x)=0$ si può ridurre alla forma binomia mediante una trasformazione a radici aumentate.

4. Trovare la condizione cui debbono soddisfare i coefficienti dell'equazione di quarto grado $a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4=0$, affinchè, mediante una trasformazione a radici aumentate, essa prenda la forma: $\alpha x^4+\beta x^2+\gamma=0$, equivalente ad un'equazione di secondo grado.

§ 3.° — Trasformazione a radici multiple. — Determinazione delle radici razionali di un' equazione a coefficienti razionali.

1041. Si voglia ora costruire un'equazione che abbia per radici le radici x dell' equazione data:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0 \tag{1}$$

moltiplicate per uno stesso numero costante k dato; cosicchè, se si indichi con y una radice dell'equazione cercata, si dovrà avere la relazione:

$$y = kx. \tag{2}$$

Di quì si deduce $x = \frac{y}{k}$; onde, sostituendo ciò in (1), si ha:

$$a_0\left(\frac{y}{k}\right)^n + a_1\left(\frac{y}{k}\right)^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\left(\frac{y}{k}\right) + a_n = 0$$

e moltiplicando per k^n:

$$a_0y^n + ka_1y^{n-1} + k^2a_2y^{n-2} + \ldots + k^{n-1}a_{n-1}y + k^na_n = 0. \tag{3}$$

È questa appunto l'equazione trasformata cercata. Gli n valori di y che la soddisfano, saranno eguali, in virtù della relazione (2), alle radici $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ della proposta tutte moltiplicate per k.

1042. Mediante questa trasformazione ogni equazione a coefficienti razionali si può facilmente ricondurre ad un' equazione a coefficienti interi col primo coefficiente uguale all' unità. Supponendo infatti (come è sempre lecito, potendosi moltiplicare sempre il primo membro per il massimo comun denominatore dei coefficienti) che l'equazione proposta sia stata già ridotta alla forma (1) con coefficienti tutti interi, basterà eseguire la trasformazione (2) per $k = a_0$, cioè prendere:

$$y = a_0x. \tag{α}$$

Si ottiene così l'equazione analoga alla (3), $(k = a_0)$:

$$a_0y^n + a_0a_1y^{n-1} + a_0^2a_2y^{n-2} + \ldots + a_0^{n-1}a_{n-1}y + a_0^na_0 = 0$$

e dividendo il primo membro per a_0:

$$y^n + a_1y^{n-1} + a_0a_2y^{n-2} + \ldots + a_0^{n-2}a_{n-1}y + a_0^{n-1}a_n = 0.$$

che ha appunto tutti i coefficienti interi ed il primo coefficiente uguale all' unità.

Poichè la formola di trasformazione (α) fa corrispondere ad ogni valore razionale di x un valore razionale di y, così si vede che *la ricerca delle radici razionali (se ve ne siano) di un'equazione a coefficienti razionali si può immediatamente ricondurre*

alla ricerca delle radici razionali di un' equazione a coefficienti interi col primo coefficiente uguale all'unità.

1043. Ora quest'ultima ricerca si può sempre espletare mediante un numero limitato di tentativi (cfr. anche l'art. 395). A tale oggetto cominciamo dal dimostrare che *un' equazione a coefficienti interi col primo coefficiente uguale all' unità non può avere radici razionali che non siano proprio intere.*

Invero, se esiste un valore frazionario di y, $y = \frac{r}{s}$ (r, s interi primi fra loro) che soddisfi l'equazione a coefficienti interi:

$$y^n + q_1 y^{n-1} + q_2 y^{n-2} + \ldots + q_{n-1} y + q_n = 0,$$

si dovrà avere:

$$\frac{r^n}{s^n} + q_1 \frac{r^{n-1}}{s^{n-1}} + q_2 \frac{r^{n-2}}{s^{n-2}} + \ldots + q_{n-1} \frac{r}{s} + q_n = 0$$

e moltiplicando per s^{n-1}:

$$\frac{r^n}{s^n} + [q_1 r^{n-1} + q_2 r^{n-2} s + \ldots + q_{n-1} r s^{n-2} + q_n s^{n-1}] = 0,$$

dove la somma chiusa in parentesi è un numero intero, il che è assurdo, essendo per supposto r ed s interi primi fra loro.

1044. Così tutto è ricondotto a determinare (se ve ne siano) le radici intere di un'equazione a coefficienti interi:

$$y^n + q_1 y^{n-1} + q_2 y^{n-2} + \ldots + q_{n-1} y + q_n = 0. \qquad (\beta)$$

Di quì si cava:

$$q_n = -(y^n + q_1 y^{n-1} + q_2 y^{n-2} + \ldots + q_{n-1} y)$$

ed anche:

$$q_n = -y(y^{n-1} + q_1 y^{n-2} + q_2 y^{n-3} + \ldots + q_{n-1}).$$

Se ora y sia un numero intero, la quantità fra parentesi nel secondo membro sarà evidentemente un intero, onde questa uguaglianza ci dice che *se* y *è un numero intero soddisfacente all' equazione* (β), *esso sarà un divisore esatto dell'intero* q_n.

Basterà dunque prendere in esame tutti i divisori interi positivi e negativi del numero q_n. Quelli di essi che sostituiti nel primo membro di (β) l'annullano, ci daranno tutte le radici razionali dell' equazione (β).

1045. Come caso particolare della trasformazione a radici multiple si ha la *trasformazione a radici eguali ma di segno contrario.* Quest'ultima equivale infatti a trasformare l' equazione proposta in un'altra le cui radici siano eguali a quelle della proposta moltiplicate per (—1). Ponendo dunque nella (3): $k = -1$, si vede che: *se*

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = 0$$

sia un' equazione qualunque, la sua trasformata a radici eguali ma di segno opposto sarà:

$$a_0y^n - a_1y^{n-1} + a_2y^{n-2} - a_3y^{n-3} + \ldots + (-1)^n a_n = 0.$$

Note ed Esercizi.

1. Dedurre il criterio per la parità o disparità del numero delle radici negative di un'equazione a coefficienti reali da quello già dato all'art. 721 per le radici positive mediante la trasformazione a radici uguali ma di segno contrario.

2. Trasformare l'equazione $x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{2}{3}x^2 + 10 = 0$ in un'altra a coefficienti interi e col primo coefficiente uguale ad 1.

3. Determinare le radici razionali di:

$$3x^5 - 12x^3 - 5x^2 + 20 = 0.$$

4. Trovare tutte le radici dell' equazione:

$$x^4 + x^3 - 2x^2 + 4x - 24 = 0.$$

5. Mostrare come, all'oggetto di far sparire i coefficienti frazionarii di un'equazione, possa essere opportuno di applicare la trasformazione $y=kx$, anzichè moltiplicare, come si fa ordinariamente, tutta l'equazione pel minimo comun denominatore delle frazioni.

6. Per abbreviare i tentativi da farsi, secondo quanto si è visto all'articolo 1044, per determinare tutte le radici intere dell' equazione a coefficienti interi:

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0, \qquad (1)$$

gioverà servirsi del seguente procedimento di *Newton* conosciuto col nome di *metodo dei divisori.*

Se α è una radice intera, l'ultimo coefficiente a_n dev'essere divisibile per α. Si aggiunga al quoziente così ottenuto il numero a_{n-1}; la somma dev' essere divisibile per α. Aggiungendo a questo nuovo quoziente il numero a_{n-2} anche questa somma dev'essere divisibile per α, e così di seguito. Quando per ultimo si sia aggiunto il numero a_1, la somma ottenuta dev'essere divisibile per α ed il quoziente dev'essere -1.

Dovendosi quindi esaminare un certo intero α per riconoscere se esso sia o no radice dell'equazione, esso si dovrà abbandonare appenachè qualcuna delle sopraddette condizioni non sia soddisfatta. Se sono tutte soddisfatte, il numero α sarà radice.

Per dimostrare quanto si è asserito, cominciamo dal notare che, se α è radice intera della equazione (1), il primo membro di (1) si può porre identicamente sotto la forma:

$$(x - \alpha)(x^{n-1} + p_1x^{n-2} + p_2x^{n-3} + \ldots + p_{n-1}),$$

dove i numeri $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ sono interi e legati dalle relazioni:

$$p_i = p_{i-1}\alpha + a_i, \qquad (2)$$

come segue dalla regola di Ruffini (art. 491). I numeri:

$$-\alpha p_1, -\alpha p_2, \ldots, -\alpha p_{n-1}$$

che indicheremo brevemente con

$$c_2, c_3, \ldots, c_n,$$

saranno dunque del pari numeri interi e legati dalle relazioni:

$$c_{i-1} = \frac{c_i}{\alpha} + a_{i-1} \tag{3}$$

che si deducono immediatamente dalle (2) moltiplicandone i membri per $-\alpha$ ed osservando che:

$$c_\rho = -\alpha p_{\rho-1}.$$

Ponendo ora nella (3) successivamente $i = n, n-1, \ldots$, e notando che $c_n = a_n$, si vede appunto che sono interi i numeri:

$$\frac{a_n}{\alpha} + a_{n-1}, \quad \left(\frac{a_n}{\alpha} + a_{n-1}\right)\frac{1}{\alpha} + a_{n-2}, \ldots$$

e quindi anche i numeri:

$$\frac{a_n}{\alpha}, \quad \left(\frac{a_n}{\alpha} + a_{n-1}\right)\frac{1}{\alpha}, \ldots,$$

come si era asserito. L'ultimo di questi quozienti avendo l'espressione:

$$\frac{a_n}{\alpha^n} + \frac{a_{n-1}}{\alpha^{n-1}} + \ldots + \frac{a_1}{\alpha},$$

se si verifica che esso ha il valore -1, sarà:

$$\frac{a_n}{\alpha^n} + \frac{a_{n-1}}{\alpha^{n-1}} + \ldots + \frac{a_1}{\alpha} = -1$$

d'onde moltiplicando per α^n:

$$\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\alpha + a_n = 0,$$

cioè α sarà proprio radice dell'equazione (1).

7. I tentativi per riconoscere se un numero intero x sia radice dell'equazione a coefficienti interi:

$$f(x) \equiv a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0, \tag{α}$$

si possono anche abbreviare servendosi del seguente criterio: *se l'intero* x *è radice dell'equazione* (α), *il numero* $x-1$ *sarà un divisore esatto del numero* $a_0+a_1+a_2+\ldots a_n$ *ed il numero* $x+1$ *un divisore esatto di* $a_0-a_1+a_2-a_3+\ldots\pm a_n$.

Infatti, se l'intero x è radice di (α) ed h un intero qualunque, si ha (cfr. art. 491):

$$-f(h) = (x-h)[a_0x^{n-1} + (a_0h + a_1)x^{n-2} + \ldots]$$

dove il secondo fattore è evidentemente un numero intero. L'intero $x-h$ sarà dunque un divisore di $f(h)$; e di qui segue appunto il criterio sopra enunciato, prendendo in particolare $h = 1$ ovvero $h = -1$.

§ 4.° — Trasformazione a radici reciproche. Equazioni reciproche.

1046. La trasformazione a radici reciproche consiste nel costruire l' equazione che ha per radici i valori inversi di quelli delle radici della data.

Si porrà dunque la relazione:

$$y = \frac{1}{x} \quad , \quad \text{d' onde: } x = \frac{1}{y}, \tag{1}$$

cosicchè, sostituendo nell' equazione data:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0, \tag{2}$$

questa diverrà:

$$\frac{a_0}{y^n} + \frac{a_1}{y^{n-1}} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{y} + a_n = 0$$

e moltiplicando per y^n si cambierà nell'equazione trasformata:

$$a_ny^n + a_{n-1}y^{n-1} + \ldots + a_1y + a_0 = 0. \tag{3}$$

Dunque: *per dedurre dall'equazione data l'equazione trasformata a radici reciproche, basta capovolgere in essa l' ordine dei coefficienti.*

1047. La trasformoziene a radici reciproche fa vedere in qual senso si possa dire che l'equazione del grado n:

$$0x^n + 0x^{n-1} + \ldots + a_kx^{n-k} + a_{k+1}x^{n-k+1} + a_n = 0 \quad , \quad a_k \pm 0$$

ha k radici uguali ad ∞. Invero l'equazione a radici reciproche:

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + 0x + 0 = 0$$

ha evidentemente k radici uguali a zero.

1048. Come utile applicazione di questa trasformazione noteremo che, se nelle formole di Newton (art. 918) si scambi dappertutto a_0 con a_n, a_1 con a_{n-1}, a_2 con a_{n-2}, ecc..., il valore di S_k che se ne deduce, anzichè ad $\alpha^k + \beta^k + \ldots + \lambda^k$, sarà uguale ad $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^k + \left(\frac{1}{\beta}\right)^k + \ldots + \left(\frac{1}{\lambda}\right)^k$.

Se dunque poniamo:

$$S_{-k} = \alpha^{-k} + \beta^{-k} + \ldots + \lambda^{-k},$$

si deducono immediatamente da quelle formole quest'altre:

$$a_nS_{-1} + a_{n-1} = 0$$
$$a_nS_{-2} + a_{n-1}S_{-1} + 2a_{n-2} = 0$$
$$a_nS_{-3} + a_{n-1}S_{-2} + a_{n-2}S_{-1} + 3a_{n-3} = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

che serviranno similmente al calcolo successivo delle somme semplici ad indice negativo S_{-1}, S_{-2}, S_{-3}, ...

1049. Può accadere che l'equazione trasformata (3) coincida con l'equazione (2); in tal caso si dice che la (2) è *un' equazione reciproca*.

Per l'identità delle due equazioni (2) e (3) dovendo aversi:

$$a_0 : a_1 : a_2 : \ldots : a_n = a_n : a_{n-1} : a_{n-2} : \ldots : a_0 , \tag{4}$$

si ha primieramente la condizione $a_0 : a_n = a_n : a_0$, cioè:

$$a_n^2 = a_0^2, \text{ d'onde } a_n = \pm a_0.$$

Se $a_n = a_0$, le (4) ci danno poi evidentemente: $a_{n-1} = a_1$, $a_{n-2} = a_2$, ...; se invece $a_n = -a_0$, le stesse (4) ci danno $a_{n-1} = -a_1$, $a_{n-2} = -a_2$, ...

Si hanno dunque due classi di equazioni reciproche, cioè:

A) *le equazioni in cui sono uguali i coefficienti dei termini equidistanti dagli estremi;*

B) *le equazioni in cui i coefficienti dei termini equidistanti dagli estremi sono uguali ma di segno opposto.*

1050. È chiaro che nelle equazioni della classe (B) la somma di tutti i coefficienti è uguale a zero. Per conseguenza esse sono soddisfatte quando in luogo di x si sostituisca il valore 1; onde il loro primo membro è divisibile per $(x - 1)$, cioè della forma:

$$(x - 1)(b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \ldots + b_{n-1}).$$

Identificando questo prodotto col primo membro di (2), si ottiene:

$$b_0 = a_0 \ , \ -b_{n-1} = a_n = -a_0 ,$$

onde:

$$b_{n-1} = b_0.$$

Pertanto l'equazione residua:

$$b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \ldots + b_{n-1} = 0 ,$$

che dev'essere evidentemente reciproca, apparterrà alla classe (A).

Le equazioni della classe (B) si riconducono così a quelle della classe (A). Quanto a quest'ultime, se esse sono di grado dispari, il loro primo membro sarà esattamente divisibile per $x + 1$, poichè dall'essere uguali i coefficienti equidistanti dagli estremi segue che la somma di tutti i coefficienti (che sono in numero pari) cangiati alternativamente di segno è nulla; cioè che l'equazione è soddisfatta per $x = -1$. Fatta la divisione, il quoziente ci fornirà evidentemente una equazione reciproca che sarà ancora della classe (A) e di grado pari.

1051. Tutte le equazioni reciproche si trovano così ricondotte al tipo *normale* di equazioni reciproche di grado pari coi coefficienti equidistanti dagli estremi uguali. Se ora:

$$a_0 x^{2m} + a_1 x^{2m-1} + \ldots + a_m x^m + \ldots + a_1 x + a_0 = 0 \tag{5}$$

è un'equazione qualunque di questo tipo, mostreremo come il suo grado si possa sempre abbassare della metà mediante la trasformazione:

$$y = x + \frac{1}{x}, \text{ d'onde: } x = \frac{y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{y^2 - 4}. \tag{6}$$

Invero, dividendo la (5) per x^m e riunendo due a due i termini equidistanti dagli estremi, essa prende la forma:

$$a_0\left(x^m + \frac{1}{x^m}\right) + a_1\left(x^{m-1} + \frac{1}{x^{m-1}}\right) + \ldots + a_{m-1}\left(x + \frac{1}{x}\right) + a_m = 0$$

che scriveremo brevemente così:

$$a_0 V_m + a_1 V_{m-1} + \ldots + a_{m-1} V + a_m = 0. \tag{7}$$

Ora è facile riconoscere che si ha in generale la relazione identica:

$$x^{i+1} + \frac{1}{x^{i+1}} = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^i + \frac{1}{x^i}\right) - \left(x^{i-1} + \frac{1}{x^{i-1}}\right),$$

cioè:

$$V_{i+1} = yV_i - V_{i-1} \tag{8}$$

che applicata successivamente ai valori 1, 2, 3,... di i ci dà:

$$\begin{aligned} V_2 &= yV_1 - V_0 = y^2 - 2 \\ V_3 &= yV_2 - V_1 = y^3 - 3y \\ V_4 &= yV_3 - V_2 = y^4 - 4y^2 + 2 \\ V_5 &= yV_4 - V_3 = y^5 - 5y^3 + 5y \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{9}$$

e così via.

Sostituendo questi valori in (7), è chiaro che la (7) si ridurrà ad un'equazione del grado m in y, risoluta la quale, i $2m$ valori di x si otterranno sostituendo successivamente in (6) gli m valori trovati per y.

1052. Esempio. — L' equazione reciproca:

$$x^5 - 1 = 0 \tag{α}$$

si ridurrà primieramente, mediante la divisione per $x - 1$, alla forma normale:

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0,$$

cioè:

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right) + 1 = 0.$$

Applicando la trasformazione (6) e tenendo conto delle (9), si otterrà dunque l' equazione in y:

$$y^2 + y - 1 = 0$$

che risoluta ci dà i due valori:

$$y_1 = -\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}),\ y_2 = -\frac{1}{2}(1-\sqrt{5}).$$

Sostituendo ciò in (6) si trovano per x i quattro valori:

$$x = \frac{1}{4}\left\{-1+\sqrt{5} \pm i\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right\}$$

ed

$$x = \frac{1}{4}\left\{-1-\sqrt{5} \pm i\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right\}$$

che unitamente al valore $x = 1$ ci forniscono le cinque radici della (α).

Note ed Esercizi.

1. Nell'applicare la regola dell'art. 1046 a costruire l'equazione a radici reciproche, si ponga attenzione a sostituire i coefficienti dei termini mancanti con degli zeri. Si verifichi p. es. che l'equazione a radici reciproche di:

$$x^7 - 3x^4 + 2x + 1 = 0$$

è

$$x^7 + 2x^6 - 3x^3 + 1 = 0.$$

2. Se l'equazione $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$ ha tutte le radici reali, dev'essere $a_{n-1} > 2a_na_{n-2}$. Infatti la somma dei quadrati delle reciproche delle radici sarà positiva.

3. Dedurre di qui che se la stessa equazione ha tutte le radici reali, dev'essere $a_r^2 > \frac{n-r+1}{n-r}\, a_{r-1}\, a_{r+2}$.

Si applichi l'art. 782.

4. Si dimostri che le equazioni reciproche della classe (B) e di grado pari hanno il primo membro divisibile per $x^2 - 1$. Si effettui questa divisione.

5. Si tratti, analogamente a quanto si è fatto all'art. 1052, l'equazione binomia:

$$x^7 - 1 = 0$$

riconducendola all'equazione di terzo grado:

$$y^3 + y^2 - 2y - 1 = 0.$$

6. Se l'equazione (5) dell'art. 1051 ha tutti i coefficienti reali, l'equazione ridotta, del grado metà, avrà tutte le radici reali.

§ 5.° — Risoluzione generale delle equazioni del terzo grado.

1053. L'equazione generale del terzo grado è della forma:

$$a_0y^3 + a_1y^2 + a_2y + a_3 = 0,$$

ma, per quanto si è visto precedentemente (art. 1040), si potrà sem-

pre facilmente trasformarla in un' altra che manchi del secondo termine. Cosicchè, dividendo poi tutto pel coefficiente del primo termine, potremo sempre partire da un'equazione del terzo grado della forma:

$$x^3 + qx + r = 0. \tag{1}$$

Detta x una delle radici cercate, poniamo $x = u + v$, essendo per ora u e v due indeterminate. Sostituendo ciò nella (1), essa diviene:

$$(u + v)^3 + q(u + v) + r = 0$$

e sviluppando:

$$u^3 + v^3 + 3uv(u + v) + q(u + v) + r = 0,$$

o anche:

$$u^3 + v^3 + (u + v)(3uv + q) + r = 0. \tag{2}$$

Determiniamo ora u e v in modo che sia $3uv + q = 0$, cioè in modo che sia

$$uv = -\frac{q}{3}. \tag{3}$$

Questa ipotesi è sempre lecita, poichè si possono sempre determinare ed in un unico modo due numeri u e v dei quali sia data la somma (nel nostro caso $= x$) ed il prodotto (nel nostro caso eguale a $-\frac{q}{3}$), come si sa dalla risoluzione delle equazioni di 2° grado. L' equazione (2) prende così la forma:

$$u^3 + v^3 + r = 0$$

da cui si deduce:

$$u^3 + v^3 = -r.$$

Ma elevando al cubo la (3) si ha:

$$u^3v^3 = -\frac{q^3}{27},$$

onde si vede che di u^3 e v^3 conosciamo somma e prodotto. Esse sono dunque le due radici dell'equazione di 2° grado:

$$z^2 + rz - \frac{q^3}{27} = 0.$$

Risolvendo quest' equazione si trova:

$$u^3 = -\frac{r}{1} + \sqrt{\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}} \quad , \quad v^3 = -\frac{r}{2} - \sqrt{\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}}$$

ed estraendo le radici cubiche:

$$u = \sqrt[3]{-\frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}}} \quad , \quad v = \sqrt[3]{-\frac{r^2}{4} - \sqrt{\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}}}. \tag{4}$$

Essendosi posto $x = u + v$, si trova dunque come espressione generale delle radici dell'equazione del 3° grado (1):

$$x = \sqrt[3]{-\frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{r}{2} - \sqrt{\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}}}. \quad (*)$$

1054. *Discussione della formola cardanica.* La formola generale di risoluzione dell'equazione:

$$x^3 + qx + r = 0$$

è dunque data da

$$x = u + v, \tag{5}$$

dove:

$$u = \sqrt[3]{-\frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}}}, \quad v = \sqrt[3]{-\frac{r}{2} - \sqrt{\frac{r^2}{2} + \frac{q^3}{27}}}.$$

Poichè ciascuno di questi due radicali cubici ammette per sè solo tre valori distinti reali o complessi (art. 823), così è chiaro che, accoppiando uno qualunque dei tre valori di u con uno qualunque dei tre valori di v, si hanno in tutto, in generale, 9 significati diversi per la somma $u + v$, cioè per la formola cardanica.

È facile però avere un criterio per discernere fra questi 9 valori i tre valori che corrispondono veramente alle tre radici dell'equazione di terzo grado, osservando che quei valori di u e v che sommati danno una radice dell'equazione, dovevano soddisfare alla condizione (3).

Infatti, se u_1 è uno dei tre valori di u, gli altri due valori saranno εu_1 ed $\varepsilon^2 u_1$, essendo ε una radice cubica complessa dell'unità (art. 827), cosicchè:

$$\varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \varepsilon^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}. \tag{6}$$

Similmente, se v_1 è uno qualunque dei tre valori di v, gli altri due saranno εv_1 ed $\varepsilon^2 v_1$. Pertanto i 9 valori possibili di $u+v$ saranno:

$$\begin{array}{lll} u_1 + v_1 & \varepsilon u_1 + v_1 & \varepsilon^2 u_1 + v_1 \\ u_1 + \varepsilon v_1 & \varepsilon u_1 + \varepsilon v_1 & \varepsilon^2 u_1 + \varepsilon v_1 \\ u_1 + \varepsilon^2 v_1 & \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 v_1 & \varepsilon^2 u_1 + \varepsilon^2 v_1 \end{array}$$

tra i quali dovranno scegliersi quelli che soddisfano alla condizione (3). Ora il prodotto uv per ciascuno di questi 9 valori è

(*) La risoluzione delle equazioni del terzo grado fu trovata verso il 1500 da Nicola Tartaglia e da Scipione del Ferro. Questa formola però è conosciuta più comunemente col nome di formola di *Cardano* il quale pubblicò per la prima volta quanto gli altri due avevano trovato alquanto tempo prima.

uguale risp. ad

$$\begin{array}{ccc} u_1 v_1 & \varepsilon u_1 v_1 & \varepsilon^2 u_1 v_1 \\ \varepsilon u_1 v_1 & \varepsilon^2 u_1 v_1 & u_1 v_1 \\ \varepsilon^2 u_1 v_1 & u_1 v_1 & \varepsilon u_1 v_1. \end{array}$$

Quindi, se supponiamo, come è sempre lecito, che il valore $u_1 + v_1$ soddisfi alla condizione (3), si vede che degli altri 8 valori soltanto il valore $\varepsilon^2 u_1 + \varepsilon v_1$ ed il valore $\varepsilon u_1 + \varepsilon^2 v_1$ vi soddisferanno del pari. Dunque:

Per avere le tre radici dell'equazione (1) *si comincerà dal prendere a piacere uno qualunque dei tre valori del 1º radicale cubico* u. *Sia questo* u_1; *si prenderà allora:*

$$v_1 = -\frac{q}{3u_1}$$

e con ciò si avrà certamente una prima radice:

$$x_1 = u_1 + v_1 = u_1 - \frac{q}{3u_1}.$$

Le altre due radici saranno date da

$$x_2 = \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 v_1$$

$$x_3 = \varepsilon^2 u_1 + \varepsilon v_1.$$

1055. Supponendo ora che i coefficienti q ed r dell' equazione siano numeri reali, passiamo alla discussione dei casi di realità od imaginarietà delle radici. Tale discussione si collega col valore dell' espressione $\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}$ che si chiama il *discriminante* (cfr. art. 934) dell' equazione:

Esso può essere $>$, $<$ od $= 0$.

a) $\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27} > 0$. Allora sotto il radicale cubico u si trova una quantità reale e perciò u avrà sempre un valore reale ed uno solo che indicheremo con u_1; gli altri due valori saranno complessi.

Intanto sommando i valori reali u_1 e v_1, che si potranno calcolare coll' ordinaria estrazione di radice cubica aritmetica, si avrà certamente una prima radice dell'equazione, perchè, avendo preso per u_1 un valore reale, si dovrà necessariamente prendere per v_1 un numero del pari reale, senza di che il prodotto $u_1 v_1$ riuscirebbe complesso e non potrebbe quindi essere uguale al numero reale $-\frac{q}{3}$.

Le altre due radici saranno complesse conjugate. Difatti la loro forma è, per quanto precede:

$$x_2 = \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 v_1 \ , \ x_3 = \varepsilon^2 u_1 + \varepsilon v_1.$$

Ma, come si vede dalle (6), ε ed ε^2 sono complessi conjugati: dunque saranno evidentemente conjugati anche x_2 ed x_3. Dunque:

se il discriminante è positivo, una radice è reale ed è la somma dei valori reali dei due radicali cubici; le altre due sono complesse conjugate.

b) $\frac{r^2}{4}+\frac{q^3}{27}<0$. Allora sotto i due radicali cubici ci saranno numeri complessi conjugati che si potranno sempre ridurre alla forma trigonometrica $\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$ e $\rho(\cos\theta-i\sin\theta)$, onde si potrà scrivere:

$$u=\sqrt[3]{\rho(\cos\theta+i\sin\theta)}\ ,\quad v=\sqrt[3]{\rho(\cos\theta-i\sin\theta)}.$$

Noi potremo sempre prendere per u_1 e v_1 risp. i valori:

$$\rho^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\theta}{3}+i\sin\frac{\theta}{3}\right)\ \text{e}\ \rho^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\theta}{3}-i\sin\frac{\theta}{3}\right),$$

poichè il prodotto di questi due valori è evidentemente un numero reale $\left(-\frac{q}{3}\right)$. Avremo così una prima radice $x_1=u_1+v_1$ che sarà reale, essendo la somma di due numeri complessi conjugati.

Le altre due radici saranno anche reali. Difatti la loro forma è $x_2=\varepsilon u_1+\varepsilon^2 v_1$, $x_3=\varepsilon^2 u_1+\varepsilon v_1$, dove sono conjugati ε, ε^2 ed u_1, v_1; e perciò ognuna di esse è la somma di due complessi conjugati, cioè un numero reale. Dunque: *se il discriminante è negativo, le tre radici sono reali, e ognuna di esse si determina sommando un valore di* u *col conjugato di* v (*).

c) $\frac{r^2}{4}+\frac{q^3}{27}=0$. In questo caso i valori di u e v sono dati da radici cubiche di quantità eguali. Come nel caso (*a*) si potrà prendere un valore reale u_1 di u e sommarlo col valore reale v_1 (che ora coincide con u_1) di v. Si ha così $x_1=2u_1$.

Le altre due radici prendono ora la forma $x^2=(\varepsilon+\varepsilon^2)u_1$ e $x_3=(\varepsilon^2+\varepsilon)u_1$, dove $\varepsilon+\varepsilon^2=-1$, perciò le tre radici sono:

$$x_1=2u\quad,\quad x_2=-u\quad,\quad x_3=-u_1.$$

Dunque: *se il discriminante è zero, le radici sono tutte reali, ma due di esse sono eguali.*

Note ed Esercizi.

1. Risolvere l' equazione:

$$y^3+y^2-2y-1=0. \qquad (\alpha)$$

Mediante la trasformazione $y=x-\frac{1}{3}$ si ridurrà prima alla forma:

$$x^3-\frac{7}{3}x-\frac{7}{27}=0,$$

(*) Questo caso è conosciuto sotto il nome di caso *irreduttibile*, poichè non si può dare alle tre radici una forma algebrica reale, benchè i loro valori sieno tutti reali. (Cfr. Cap. XV, § 4°, Note).

onde:

$$q = -\frac{7}{3},\ r = -\frac{7}{27},\ \frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27} = -\frac{3}{4}\cdot\frac{7^2}{9^2}$$

ed

$$u = \sqrt[3]{-\frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}}} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{7}{2}}\sqrt[3]{1 + 3i\sqrt{3}}.$$

2. Si faccia poi servire la risoluzione dell'equazione (α) alla determinazione completa (cfr. § 4° Note) di tutte le radici dell' equazione binomia $x^7 - 1 = 0$.

3. L' equazione generale del terzo grado:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

ponendo $x = -\frac{b}{3a}$, si trasforma in

$$y^3 + \left(\frac{c}{a} - \frac{1}{3}\frac{b^2}{a^2}\right)y + \left(\frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}\right) = 0$$

con coefficienti di forma frazionaria. Si verifichi che, ponendo invece $x = \frac{z-b}{a}$, essa si trasforma nell' equazione:

$$z^3 + 3(3ac - b^2)z + (2b^3 - 9abc + 27a^2d) = 0$$

che ha i coefficienti di forma intera.

4. Ridurre l' espressione:

$$x = u - \frac{q}{3u},\ \text{dove}\ u = \sqrt[3]{-\frac{r}{2} + \sqrt[2]{\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}}}$$

che dà la risoluzione dell' equazione:

$$x^3 + qx + r = 0 \tag{1}$$

a forma *intera* rispetto al radicale cubico e rispetto al radicale quadratico (cfr. art. 951).

Se si *fissi* il valore del radicale quadratico ponendo:

$$-\frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}} = w_1\ ,\ -\frac{r}{2} - \sqrt{\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}} = w_2\,,$$

si troverà:

$$u - \frac{q}{3u} = \sqrt[3]{w_1} - \frac{q}{3\sqrt[3]{w_1}} = \sqrt[3]{w_1}\left\{1 - \frac{9}{q^2}(r + w_1)\sqrt[3]{w_1}\right\} \tag{2}$$

e similmente:

$$v - \frac{q}{3v} = \sqrt[3]{w_2} - \frac{q}{3\sqrt[3]{w_2}} = \sqrt[3]{w_1}\left\{1 - \frac{9}{q^2}(r + w_2)\sqrt[3]{w_2}\right\}. \tag{2'}$$

5. **Poichè le formole (2) e (2)' esprimono la risoluzione della stessa equazione (1), deve sussistere la seguente uguaglianza:**

$$\sqrt[3]{w_1}\left\{1-\frac{9}{q^2}(r+w_1)\sqrt[3]{w_1}\right\}=\sqrt[3]{w_2}\left\{1-\frac{9}{q^2}(r+w_2)\sqrt[3]{w_2}\right\}$$

comunque si fissi $\sqrt[3]{w_1}$, *purchè si fissi poi opportunamente il valore di* $\sqrt[3]{w_2}$. Dimostrare direttamente la verità di quest' eguaglianza.

6. Posto per brevità:

$$\sqrt{\frac{r^2}{4}+\frac{q^3}{27}}=I,$$

dimostrare che la radice x dell'equazione (1) è data anche dalla formola:

$$\frac{3r}{x}+q=\sqrt[3]{-q^3-\frac{27}{2}r^2+27r\cdot I}+\sqrt[3]{-q^3-\frac{27}{2}r^2-27r\cdot I}$$

Si risolva questa equazione rispetto a x e si ponga poi il risultato sotto forma intera rispetto ai radicali.

7. Risolvere l'equazione generale del terzo grado riducendola alla forma binomia mediante una trasformazione lineare $x=\frac{y+\mu}{y+\nu}$.

§ 6.° — Risoluzione generale delle equazioni del 4.° grado (*).

1056. L' equazione generale del 4° grado è della forma:

$$x^4+px^3+qx^2+rx+s=0, \qquad (1)$$

dove i coefficienti possono essere numeri reali o complessi.

Aggiungendo al primo e al secondo membro dell'equazione l'espressione intera di 2° grado ax^2+bx+c, in cui a, b, c sono per ora indeterminati, si ha:

$$x^4+px^3+(q+a)x^2+(r+b)x+(s+c)=ax^2+bx+c. \qquad (2)$$

Cerchiamo ora di determinare a, b, c in modo che il primo ed il secondo membro risultino due quadrati esatti.

Il primo dovrà essere della forma:

$$(x^2+\lambda x+\mu)^2 \qquad (3)$$

ed il secondo della forma $\left(\sqrt{a}\cdot x+\sqrt{c}\right)^2$.

Ora, sviluppando l' espressione (3), si ottiene:

$$x^4+2\lambda x^3+(\lambda^2+2\mu)x^2+2\lambda\mu x+\mu^2$$

(*) La risoluzione delle equazioni del 4° grado è stata data da Luigi Ferrari non molto tempo dopo la scoperta della formola di risoluzione dell' equazione del 3° grado. La dimostrazione che noi diamo è appunto quella di Ferrari.

che dovendo essere identicamente uguale al 1° membro di (2), darà $p = 2\lambda$ e perciò $\lambda = \frac{p}{2}$, e diventerà:

$$x^4 + px^3 + \left(\frac{p^2}{4} + 2\mu\right)x^2 + p\mu x + \mu^2,$$

dove i coefficienti dovranno essere uguali a quelli delle potenze omonime in (2). Si hanno così le relazioni:

$$\begin{aligned} q + a &= \frac{p^3}{4} + 2\mu & \qquad & & a &= -q + \frac{p^2}{4} + 2\mu \\ r + b &= p\mu & & \text{che danno risp.} & b &= -r + p\mu \qquad (\alpha) \\ s + c &= \mu^2 & & & c &= -s + \mu^2. \end{aligned}$$

Si hanno così i valori di a, b, c in funzione di una sola indeterminata μ. Questa si determina osservando che, affinchè il secondo membro di (2) sia un quadrato esatto, dev'essere $b^2 - 4ac = 0$; onde, sostituendo in quest'eguaglianza i valori di a, b, c calcolati in (α), si trova:

$$(p\mu - r)^2 - 4\left(2\mu + \frac{p^2}{4} - q\right)(\mu^2 - s) = 0 \qquad (4)$$

e sviluppando:

$$8\mu^3 - 4q\mu^2 + 2(pr - 4s)\mu + 4qs - p^2s - r^2 = 0$$

che è un' equazione di terzo grado in μ, detta la *risolvente di Ferrari.*

1057. Risoluta quest' equazione nel modo spiegato al § prec. per le equazioni del terzo grado, si avranno tre valori di μ, ciascuno dei quali sostituito in (α) darà per a, b, c valori tali che primo e secondo membro di (2) riescano quadrati esatti.

Si avrà allora da risolvere un' equazione della forma:

$$\left[x^2 + \frac{p}{2}x + \mu\right]^2 = \left[x\sqrt{a} + \sqrt{c}\right]^2.$$

Poichè $2\sqrt{a}\sqrt{c} = b$ e quindi $\sqrt{c} = \frac{b}{2\sqrt{a}}$,

quest' equazione può anche scriversi:

$$\left(x^2 + \frac{p}{2}x + \mu\right)^2 = \left(x\sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 = \left(\frac{2ax + b}{2\sqrt{a}}\right)^2$$

Pertanto, estraendo la radice quadrata dei due membri e trasportando poi tutto al primo membro e riducendo, si hanno le

due equazioni di 2° grado:

$$x^2+\left(\frac{p}{2}-\sqrt{a}\right)x+\mu-\frac{b}{2\sqrt{a}}=0 \tag{5}$$

$$x^2+\left(\frac{p}{2}+\sqrt{a}\right)x+\mu+\frac{b}{2\sqrt{a}}=0 \tag{5)'$$

che, risolte, daranno quattro valori generalmente distinti per x. Resteranno così determinate le quattro radici dell' equazione di quarto grado proposta (1).

1058. La risolvente ammette tre radici, delle quali basta conoscerne una per effettuare la risoluzione dell'equazione del 4° grado col metodo suindicato. La risoluzione potrà dunque effettuarsi per tre vie diverse, scegliendo a piacere per μ l' una o l' altra delle tre radici della risolvente.

Ciò posto, imaginiamo scelta per μ una certa radice μ_1 della risolvente, e siano allora α, β le due radici di (5) e γ, δ le due radici di (5)'. Dovrà essere:

$$\alpha\beta=\mu_1-\frac{b}{2\sqrt{a}}\quad,\quad \gamma\delta=\mu_1+\frac{b}{2\sqrt{a}}$$

e sommando e dividendo per 2:

$$\mu_1=\frac{1}{2}(\alpha\beta+\gamma\delta). \tag{6}$$

Se ora nell'espressione $\frac{1}{2}(\alpha\beta+\gamma\delta)$ si eseguiscano tutte le possibili sostituzioni fra le quattro lettere α, β, γ, δ, si vede facilmente che essa non prenderà che tre valori distinti, cioè il valore (6) e i due valori $\frac{1}{2}(\alpha\gamma+\beta\delta)$ ed $\frac{1}{2}(\alpha\delta+\beta\gamma)$. Questi tre valori corrisponderanno evidentemente ai tre diversi valori che può avere la radice μ della risolvente. Si avrà dunque p. es. per le altre due radici μ_2 e μ_3 della risolvente:

$$\mu_2=\frac{1}{2}(\alpha\gamma+\beta\delta)\quad,\quad \mu_3=\frac{1}{2}(\alpha\delta+\beta\gamma). \tag{7}$$

1059. Il discriminante dell'equazione del quarto grado non differisce da quello della sua risolvente di terzo grado. Invero è facile di riconoscere che: *se l'equazione del 4° grado ha due radici eguali, anche la sua risolvente ha due radici eguali e reciprocamente.*

Infatti, se sia p. es. $\alpha=\beta$, i valori μ_2 e μ_3 delle radici della risolvente divengono pure uguali, come si vede subito dalle (7). Se poi sia $\mu_1=\mu_2$, sarà per le (6) e (7):

$$\alpha\beta+\gamma\delta=\alpha\gamma+\beta\delta \quad \text{o} \quad \alpha(\beta-\gamma)-\delta(\beta-\gamma)=0$$

d' onde :

$$(\alpha - \delta)(\beta - \gamma) = 0$$

e per conseguenza o si avrà $\alpha = \delta$, o $\beta = \gamma$, cioè in ogni caso l'eguaglianza di due radici dell'equazione del 4° grado.

1060. Supponiamo ora che i coefficienti p, q, r, s dell'equazione del 4° grado siano tutti reali.

Noi sappiamo (art. 945) che in tal caso le radici di una equazione sono reali, ovvero imaginarie e conjugate due a due.

Non possono quindi evidentemente presentarsi che i seguenti tre casi:

1°) le radici α, β, γ, δ sono tutte reali;

2°) due radici sono reali e le altre due imaginarie conjugate;

3°) le radici sono tutte imaginarie, però due a due fra loro conjugate.

Nel primo caso risulta evidente dalle (6) e (7) che le radici μ_1, μ_2, μ_3 della risolvente sono del pari tutte reali.

Nel secondo caso siano p. es. α e β reali e γ, δ imaginarie conjugate. Il prodotto $\gamma\delta$ sarà reale (art. 805) e quindi per la (6) μ_1 sarà reale. Quanto a μ_2 e μ_3, si vede dalle (7) che esse saranno complesse conjugate, poichè, cambiando i in $-i$, γ, si scambia con δ e quindi μ_2 con μ_3.

Finalmente nel terzo caso sia p. es.:

$$\alpha = r + is \ , \ \beta = r - is \ , \ \gamma = r' + is' \ , \ \delta = r' - is'.$$

Sostituendo ciò nelle (6) e (7), queste ci danno valori tutti reali per μ_1, μ_2, μ_3, poichè ognuna delle μ si presenta come somma di due complessi conjugati.

Riassumendo concludiamo che: *se le radici della risolvente sono tutte reali, quelle della proposta di 4° grado saranno tutte reali ovvero tutte imaginarie* (*)*: se poi delle radici della risolvente una sola è reale, la proposta avrà due radici reali e due complesse conjugate.*

Note ed Esercizi.

1. Eseguendo sull' equazione del quarto grado più generale:

$$ax^4 + 4b^3 + 6cx^2 + 4dx + e = 0 \tag{1}$$

la trasformazione lineare: $y = ax + b$, essa si cambia nella seguente:

$$y^4 + 6Hy^2 + 4Gy + K = 0, \tag{2}$$

dove:

$$\begin{cases} H = ac - b^2 \ , \ G = a^2d - 3abc + 2b^3 \\ H = a^2(ae - 4bd + 3c^2) - 3(ac - b^2)^2. \end{cases} \tag{3}$$

(*) Circa il criterio per decidere se le radici della proposta siano tutte reali o tutte imaginarie, vedi il § 9° di questo stesso capitolo.

2. Detti α, β, γ, δ quattro numeri qualisivogliano che possiamo sempre considerare come le quattro radici di (1), il rapporto anarmonico:

$$\frac{\alpha-\gamma}{\alpha-\delta}:\frac{\beta-\gamma}{\beta-\delta}$$

non può prendere, per tutte le possibili sostituzioni fra le α, β, γ, δ che i sei valori:

$$\begin{aligned} \frac{(\alpha-\gamma)(\gamma-\delta)}{(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)}&=\lambda_1 \,,\quad \frac{(\alpha-\delta)(\beta-\delta)}{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)}=\frac{1}{\lambda_1}\\ \frac{(\beta-\gamma)(\alpha-\delta)}{(\beta-\alpha)(\gamma-\delta)}&=\lambda_2 \,,\quad \frac{(\beta-\alpha)(\gamma-\delta)}{(\beta-\gamma)(\alpha-\delta)}=\frac{1}{\lambda_2}\\ \frac{(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)}{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)}&=\lambda_3 \,,\quad \frac{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)}{(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)}=\frac{1}{\lambda_3}. \end{aligned} \tag{4}$$

I tre valori λ_1, λ_2, λ_3 non sono però indipendenti, poichè dall'identità facile a verificarsi:

$$(\beta-\gamma)(\alpha-\delta)+(\gamma-\alpha)(\beta-\delta)+(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)=0 \tag{5}$$

segue immediatamente dividendo il primo membro per uno qualunque dei suoi tre termini:

$$\lambda_1+\frac{1}{\lambda_2}=1 \,,\quad \lambda_2+\frac{1}{\lambda_3}=1 \,,\quad \lambda_3+\frac{1}{\lambda_1}=1. \tag{6}$$

È dunque chiaro che, conosciuto il valore di uno dei sei rapporti anarmonici (4), tutti gli altri si troveranno perfettamente determinati.

3. Se due dei tre valori λ_1, λ_2, λ_3 sono eguali, segue facilmente dalle (6) che essi sono tutti eguali fra loro e precisamente che:

$$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-\varepsilon\,, \tag{7}$$

essendo ε una radice cubica imaginaria dell'unità.

Quanto agli altri tre valori si avrà poi:

$$\frac{1}{\lambda_1}=\frac{1}{\lambda_2}=\frac{1}{\lambda_3}=-\varepsilon^2.$$

In questo caso si dice che i quattro numeri α, β, γ, δ formano un rapporto *equianarmonico*.

In conformità a ciò si dirà che in questo caso la (1) è un'equazione biquadratica *equianarmonica*.

4. È altresì importante il caso in cui uno dei rapporti (4) p. es. il primo sia *armonico*, cioè abbia il valore -1. Si ha allora:

$$\lambda_1=-1 \,,\quad \lambda_2=\frac{1}{2} \,,\quad \lambda_3=2, \tag{8}$$

onde:

$$\frac{1}{\lambda_1}=-1\,,\quad \frac{1}{\lambda_2}=2\,,\quad \frac{1}{\lambda_3}=\frac{1}{2}.$$

In tal caso si dirà che l'equazione (1) è *armonica*.

5. I tre valori λ_1, λ_2, λ_3 si esprimono facilmente per mezzo delle tre radici μ_1, μ_2, μ_3 della risolvente di Ferrari (art. 1056), ricordando le rela-

zioni già trovate (art. 1058):

$$\mu_1 = \frac{1}{2}(\alpha\beta + \gamma\delta)\,,\ \mu_2 = \frac{1}{2}(\alpha\gamma + \beta\delta)\,,\ \mu_3 = \frac{1}{2}(\alpha\delta + \beta\gamma).$$

Si riconoscerà immediatamente che:

$$\lambda_1 = \frac{\mu_1 - \mu_3}{\mu_1 - \mu_2}\ ,\quad \lambda_2 = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 - \mu_3}\ ,\quad \lambda_3 = \frac{\mu_3 - \mu_2}{\mu_3 - \mu_1}. \tag{9}$$

Affinchè l'equazione (1) sia equianarmonica, dovrà dunque essere:

$$(\mu_1 - \mu_2)^2 + (\mu_1 - \mu_3)(\mu_2 - \mu_3) = 0$$

o, che è la stessa cosa:

$$(\mu_1 - \mu_2)^2 + (\mu_1 - \mu_3)^2 + (\mu_2 - \mu_3)^2 = 0. \tag{10}$$

Affinchè poi la (1) sia armonica, dovrà essere:

$$2\mu_1 = \mu_2 + \mu_3$$

ossia simmetricamente:

$$(2\mu_1 - \mu_2 - \mu_3)(2\mu_2 - \mu_1 - \mu_3)(2\mu_3 - \mu_1 - \mu_2) = 0. \tag{11}$$

Mediante facili calcoli di funzioni simmetriche delle radici della cubica risolvente, che lascieremo per esercizio al lettore, si troverà così che la condizione per la equianarmonicità è data da

$$\mathrm{I} \equiv ae - 4bd + 3c^2 = 0 \tag{12}$$

e quella per l'armonicità da

$$\mathrm{J} \equiv ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3 = 0. \tag{13}$$

6. Se $\mathrm{I} = 0$, è chiaro, per quanto precede, che i sei valori (4) del rapporto anarmonico λ soddisferanno all'equazione:

$$\lambda^2 - \lambda + 1 = 0, \tag{14}$$

perchè i soli valori distinti che essi assumono sono $-\varepsilon$ e $-\varepsilon^2$. Se poi $\mathrm{J} = 0$, essi soddisferanno tutti all'equazione:

$$(\lambda + 1)(\lambda - 2)\left(\lambda - \frac{1}{2}\right) = 0. \tag{15}$$

Ora è importante di notare che i due polinomi (14) e (15) elevati risp. al cubo ed al quadrato godono della proprietà di restare inalterati se in essi si cambia λ in $1-\lambda$ e di variare del fattore $\frac{1}{\lambda^6}$ se si cambia λ in $\frac{1}{\lambda}$. Da questa osservazione segue infatti che i sei valori di λ soddisferanno in ogni caso all'equazione di sesto grado:

$$(\lambda^2 - \lambda + 1)^3 - k(\lambda + 1)^2(\lambda - 2)^2\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 = 0, \tag{16}$$

dove k è una costante da determinarsi opportunamente.

Invero si potrà sempre determinare la costante k in modo che la (16) sia soddisfatta da uno dei sei valori di λ, p. es. da λ_1.

Ma se l'equazione (16) è soddisfatta da un certo valore di λ, essa lo è

anche, come si è notato, dal valore $1-\lambda$ ed $\frac{1}{\lambda}$. Confrontando colla (6) si vede dunque che la (16) avrà per radici i numeri:

$$\lambda_1\,, \quad 1-\lambda_1 \equiv \frac{1}{\lambda_2}\,, \qquad \lambda_3\,,$$

$$\frac{1}{\lambda_1}\,, \qquad \lambda_2\,, \quad 1-\lambda_2 \equiv \frac{1}{\lambda_3}\,,$$

cioè appunto i sei valori (4) del rapporto anarmonico λ.

La costante k si determinerà con calcoli di funzioni simmetriche analoghi ai precedenti e si troverà:

$$k = \frac{I^3}{27J^2}.$$

Si conchiuderà dunque che: *i sei rapporti anarmonici che si possono formare colle quattro radici di* (1) *sono le sei radici dell'equazione di sesto grado:*

$$27J^2(\lambda^2-\lambda+1)^3 - I^3(\lambda+1)^2(\lambda-2)^2\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)^2 = 0. \qquad (16)'$$

7. Se l'equazione (1) ha due radici eguali, p. es. $\alpha=\gamma$, si ha dalle (4):

$$\lambda_1 = \frac{1}{\lambda_3} = 0\ ,\ \lambda_2 = \frac{1}{\lambda_2} = 1\ ,\ \lambda_3 = \frac{1}{\lambda_1} = \infty$$

e reciprocamente se uno dei rapporti anarmonici ha il valore 0 (ovvero 1 od ∞), l'equazione (1) avrà due radici eguali.

La condizione necessaria e sufficiente affinchè la (1) abbia due radici eguali, si otterrà dunque esprimendo che la (16)' è soddisfatta per $\lambda=0$. Pertanto: *affinchè la biquadratica* (1) *abbia radici eguali, è necessario e sufficiente che si abbia:*

$$I^3 - 27J^2 = 0. \qquad (17)$$

8. *Eseguendo sulla biquadratica* (1) *una trasformazione lineare qualunque, il rapporto* $\frac{I^3}{J^2}$ *conserva sempre lo stesso valore numerico.*

È questa una conseguenza immediata dell'espressione data dalla (16):

$$\frac{I^3}{J^2} = 27\,\frac{(\lambda^2-\lambda+1)^3}{(\lambda+1)^2(\lambda-2)^2(\lambda-\frac{1}{2})^2}$$

e del teorema già dimostrato (art. 1034), che il rapporto anarmonico λ di quattro numeri non è alterato dalla trasformazione lineare.

A cagione di questa proprietà il rapporto $\frac{I^3}{J^2}$ si chiama l'*invariante assoluto* della biquadratica.

§ 7.° — Trasformazione razionale delle equazioni.

1061. Detta x una qualunque delle radici di un'equazione data:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0, \tag{1}$$

si *trasformi* ogni valore di x in un corrispondente valore:

$$y = \frac{Ax^h + Bx^{h-1} + \dots + E}{A_1 x^k + B_1 x^{k-1} + \dots + E_1}, \tag{2}$$

dove il secondo membro è una certa funzione razionale di x, che potremo anche indicare per brevità con $\varphi(x)$.

Ai valori $x = \alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda$ delle n radici della (1) corrisponderanno così i valori $y = \varphi(\alpha), \varphi(\beta), \varphi(\gamma), \dots, \varphi(\lambda)$ che noi dimostreremo essere le radici di un'equazione di grado n i cui coefficienti si possono ritenere come conosciuti, proprio come i coefficienti della (1).

Questa trasformazione si dice razionale o di *Tschirnhäusen* dal nome del primo che la introdusse nell'algebra.

1062. Invero le quantità $\varphi(\alpha), \varphi(\beta), \varphi(\gamma), \dots, \varphi(\lambda)$ sono evidentemente le n radici dell'equazione di grado n:

$$[y - \varphi(\alpha)]\cdot[y - \varphi(\beta)]\cdot[y - \varphi(\gamma)] \dots [y - \varphi(\lambda)] = 0$$

che sviluppata prende la forma ordinaria:

$$y^n + p_1 y^{n-1} + p_2 y^{n-2} + \dots + p_{n-1} y + p_n = 0, \tag{3}$$

dove:

$$p_1 = -[\varphi(\alpha) + \varphi(\beta) + \dots \varphi(\lambda)]$$

$$p_2 = [\varphi(\alpha)\varphi(\beta) + \varphi(\alpha)\varphi(\gamma) + \varphi(\beta)\varphi(\gamma) + \dots]$$

$$p_3 = -[\varphi(\alpha)\varphi(\beta)\varphi(\gamma) + \dots]$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$p_n = (-1)^n \varphi(\alpha)\varphi(\beta) \dots \varphi(\lambda).$$

Ora queste espressioni di $p_1, p_2 \dots$ sono evidentemente simmetriche rispetto alle $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda$. Esse potranno quindi calcolarsi direttamente per mezzo dei coefficienti $a_0, a_1, a_2 \dots$ dell'equazione (1) di cui le $\alpha, \beta \dots$ sono le radici. Dunque: *data l'equazione* (1), *si calcoleranno direttamente in funzione dei suoi coefficienti i coefficienti* $p_1, p_2 \dots$ *dell'equazione* (3) *le cui radici* y *sono legate alle radici* x *della* (1) *da una relazione della forma* $y = \varphi(x)$, *essendo* $\varphi(x)$ *una funzione razionale data di* x.

1063. La funzione trasformante $\varphi(x)$ considerata nei due articoli precedenti poteva essere una funzione razionale qualunque di x. Noi sappiamo però (art. 931) che ogni funzione razionale di una radice di una data equazione si può sempre ridurre sotto forma *intera* rispetto alla radice. In luogo della relazione (2) si potrà

dunque porre più semplicemente:

$$y = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_m x^m \qquad (4)$$

dove le b sono dei coefficienti dati. Inoltre si potrà sempre supporre, se si voglia, $m < n$; poichè le potenze di x superiori ad $n-1$ si potranno sempre esprimere, come si è visto, con potenze uguali od inferiori ad $n-1$ per mezzo della (1), cioè mediante l'uso ripetuto della relazione:

$$x^n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}x^{n-1} - \frac{a_{n-2}}{a_n}x^{n-2} - \dots - \frac{a_0}{a_n}.$$

Dopo ciò è chiaro che *come tipo più generale della trasformazione di Tschirnhäusen relativa all'equazione fondamentale:*

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n = 0 \qquad (1)$$

basterà prendere:

$$y = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_{n-1} x^{n-1}. \qquad (4)'$$

1064. Ciò posto, l'equazione trasformata si potrà anche ottenere eliminando la x fra le due equazioni (1) e (4) con uno qualunque dei metodi già esposti. Applicando il metodo dialitico di Sylvester (art. 1008), si ottiene immediatamente l'equazione trasformata sotto forma di determinante, cioè:

$$\begin{vmatrix} b_0-y & b_1 & b_2 \dots\dots b_m & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & b_0-y & b_1 \dots\dots & b_m & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & b_0-y \dots\dots & & b_m \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & b_0-y & & \dots b_m \\ a_0 & a_1 & a_2 \dots\dots a_n & 0 & \dots 0 \\ 0 & a_0 & a_1 \dots\dots & a_n & \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots a_n \end{vmatrix} = 0 \qquad (5)$$

Indicando ancora con $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda$ le radici della (1) e scrivendo per brevità in luogo della (4):

$$y = \varphi(x),$$

l'equazione (5), che è evidentemente del grado n, avrà dunque per radici:

$$\varphi(\alpha), \varphi(\beta), \dots, \varphi(\lambda). \qquad (6)$$

1065. Dovendo ora il prodotto di tutte le radici dell'equazione (5) essere uguale (art. 916) al suo termine noto, che è il determinante (5) in cui si faccia $y = 0$, moltiplicato per $(-1)^n$ e di-

viso per il coefficiente della più alta potenza di y, si avrà:

$$a_n^m \cdot \varphi(\alpha)\varphi(\beta)\ldots\varphi(\lambda) = \begin{vmatrix} b_0 & b_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & b_0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & b_m & \\ a_0 & a_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & a_0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_n & \end{vmatrix} \tag{7}$$

Il secondo membro di questa uguaglianza non essendo altro che la risultante R (art. 1008) delle due equazioni:

$$a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n = 0$$

e $\qquad$ (8)

$$\varphi(x) \equiv b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m = 0,$$

troviamo così l'espressione di R come funzione simmetrica delle radici di una delle equazioni (*).

1066. Sia ora:

$$(-1)^n a_n{}^m y^n + R_{n-1}y^{n-1} + R_{n-2}y^{n-2} + \ldots + R_2y^2 + R_1y + R = 0 \tag{5)'$$

lo sviluppo completo dell'equazione (5) secondo le potenze decrescenti di y.

Se oltre ad aversi $R = 0$, si avesse anche $R_1 = 0$, il primo membro di (5)' sarebbe divisibile per y^2, cioè l'equazione trasformata avrebbe due radici eguali a zero, e reciprocamente. Più generalmente si vede che affinchè k degli n numeri (6) siano eguali a zero, è necessario e sufficiente che siano soddisfatte le condizioni:

$$R = 0\ ,\ R_1 = 0\ ,\ R_2 = 0\ , \ldots ,\ R_{k-1} = 0. \tag{9}$$

In altri termini: *affinchè* k *delle radici dell'equazione* (1) *sieno anche radici dell'equazione* $\varphi(x) = 0$, *è necessario e sufficiente che oltre alla risultante* R *si annullino anche le* $R_1, R_2, \ldots, R_{k-1}$.

1067. Se la funzione intera $\varphi(x)$ è di grado superiore ad n, la sua riduzione al grado $n-1$ si potrà effettuare più metodicamente, anzichè colle riduzioni successive indicate all'art. 1063, calcolando il resto della divisione di $\varphi(x)$ per il primo membro della (1), che indicheremo per brevità con $f(x)$. Supponiamo che si trovi:

$$\varphi(x) = Q(x)f(x) + b_{00} + b_{01}x + b_{02}x^2 + \ldots b_{0,n-1}x^{n-1}. \tag{10}$$

Si avrà allora come formola di trasformazione:

$$y = \varphi(x) = b_{00} + b_{01}x + \ldots + b_{0,n-1}x^{n-1}. \tag{11}$$

1068. Si potrà calcolare più generalmente il resto della divisione di $x^i \cdot \varphi(x)$ per $f(x)$. Sia il risultato:

$$x^i \cdot \varphi(x) = Q_i(x)f(x) + b_{i0} + b_{i1}x + b_{i2}x^2 + \ldots + b_{i,n-1}x^{n-1},$$

(*) Cfr. Cap. XIII, § 5ª, Nota 8ª.

onde:

$$x^i \cdot y = b_{i0} + b_{i1}x + b_{i2}x^2 + \ldots + b_{i, n-1}x^{n-1}. \tag{12}$$

Dando ad i successivamente i valori $1, 2, \ldots, n-1$, si avranno così, unitamente alla (11), n equazioni dalle quali si potranno eliminare nel solito modo le $x^0, x^1, x^2, \ldots, x^{n-1}$, con che si otterrà l'equazione trasformata:

$$\begin{vmatrix} b_{00}-y & b_{01} & b_{02} & \ldots b_{0, n-1} \\ b_{10} & b_{11}-y & b_{12} & \ldots b_{1, n-1} \\ b_{20} & b_{21} & b_{22}-y & \ldots b_{2, n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n-1, 0} & b_{n-1, 1} & b_{n-1, 2} & \ldots b_{n-1, n-1}-y \end{vmatrix} \tag{5)''$$

che si presenta con forma più compendiosa della (5).

1069. In virtù delle formole di Newton (art. 918) che permettono di esprimere i coefficienti di un'equazione per mezzo delle somme delle potenze simili delle sue radici e reciprocamente, essendo dati i coefficienti dell'equazione fondamentale (1), si possono considerare come conosciute le somme:

$$s_i = \alpha^i + \beta^i + \gamma^i + \ldots + \lambda^i \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{13}$$

e, per la stessa ragione, si potrà considerare come già costruita l'equazione trasformata, per $y = \varphi(x)$, appenachè si siano calcolate le somme:

$$S_i = [\varphi(\alpha)]^i + [\varphi(\beta)]^i + \ldots + [\varphi(\lambda)]^i \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{14}$$

In conformità a ciò si ha un altro metodo per la costruzione dell'equazione trasformata, che ha per oggetto di esprimere le somme *incognite* (14) per mezzo delle somme *cognite* (13). Questo metodo consiste nell'elevare la funzione $\varphi(x)$ alle successive potenze $1, 2, 3, \ldots, n$ e calcolare per ogni potenza il resto della sua divisione per $f(x)$. Invero, supposto che si sia trovato:

$$[\varphi(x)]^i = Q(x)f(x) + c_{i0} + c_{i1}x + c_{i2}x^2 + \ldots + c_{i, n-1}x^{n-1},$$

sostituendo in questa identità in luogo di x successivamente le radici $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ di (1) e sommando i risultati, si otterrà:

$$S_i = c_{i0} + c_{i1}s_1 + c_{i2}s_2 + \ldots + c_{i, n-1}s_{n-1}, \tag{15}$$

poichè:

$$f(\alpha) = f(\beta) = \ldots = f(\lambda) = 0.$$

Le formole (15), per $i = 1, 2, \ldots, n$, ci faranno dunque conoscere le $S_1, S_2, \ldots, S_n$.

1070. La trasformazione di Tschirnhäusen da noi fin quì studiata non è che un caso particolare della trasformazione razionale più generale che ha per oggetto di costruire un'equazione (il cui grado sarà però in generale superiore al grado dell'equazione primitiva) le cui radici siano funzioni razionali date di un numero qualunque di radici dell'equazione fondamentale.

Così ad esempio possiamo proporci di costruire un' equazione che abbia per radici le radici della (1) sommate tre a tre. Cioè le radici della trasformata dovrebbero avere i valori:

$$y_1 = \alpha + \beta + \gamma \quad , \quad y_2 = \alpha + \beta + \delta \, , \ldots .$$

In generale dunque, detta $\varphi(\alpha , \beta , \gamma , \ldots)$ una funzione razionale data di un certo numero di radici della (1), ci proponiamo di costruire un'equazione che abbia per radice:

$$y_1 = \varphi(\alpha , \beta , \gamma , \ldots).$$

Se φ è una funzione simmetrica delle $\alpha , \beta , \gamma , \ldots , \lambda$, essa può considerarsi come conosciuta, onde in tal caso la trasformata cercata si ridurrebbe ad un'equazione di primo grado.

Se φ non è simmetrica, eseguendo in essa tutte le $\underline{|n}$ sostituzioni possibili fra le n radici $\alpha , \beta , \gamma , \ldots , \lambda$, essa potrà prendere al più $\underline{|n}$ valori algebricamente distiuti, ma potrà anche prenderne un numero più piccolo che indicheremo con k. Così ad es. per $\varphi = \alpha + \beta + \gamma$ è facile vedere che φ non prende che $\binom{n}{3}$ valori distinti scambiando le α, β, γ, fra loro o colle altre radici.

Siano questi valori distinti:

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha , \beta , \gamma , \ldots) &= \varphi_1 \\ \varphi(\delta , \varepsilon , \ldots\ldots) &= \varphi_2 \\ \cdots & \cdots \\ \varphi(\eta , \theta , \ldots\ldots) &= \varphi_k . \end{aligned}$$

È facile vedere che la somma:

$$Q_1 = - \{\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \ldots + \varphi_k\}$$

sarà una funzione simmetrica delle $\alpha , \beta , \ldots , \lambda$, poichè, permutando in esse in un modo qualunque queste radici fra di loro, le n espressioni distinte $\varphi_1 , \varphi_2 , \ldots , \varphi_k$ non faranno evidentemente che scambiarsi fra loro, onde la loro somma resterà inalterata.

Similmente si riconosce che sono simmetriche le espressioni:

$$\begin{aligned} Q_2 &= \varphi_1\varphi_2 + \varphi_1\varphi_3 + \varphi_2\varphi_3 + \ldots \\ Q_3 &= -(\varphi_1\varphi_2\varphi_3 + \ldots) \\ & \cdots\cdots \\ Q_k &= (-1)^k \cdot \varphi_1\varphi_2 , \ldots , \varphi_k , \end{aligned}$$

onde anche quì le $Q_1 , Q_2 , \ldots , Q_k$ possono considerarsi come quantità già conosciute, come i coefficienti della (1). Si può dunque costruire l' equazione:

$$y^k + Q_1 y^{k-1} + Q_2 y^{k-2} + \ldots + Q_k = 0$$

la quale ha appunto per radici le $\varphi_1 , \varphi_2 , \ldots , \varphi_k$.

Dunque: *se $\varphi(\alpha , \beta , \gamma , \ldots)$ è una funzione razionale delle ra-*

dici della (1) *che prende in generale* k *valori distinti col permutare comunque fra loro le radici, si può sempre costruire un'equazione di grado* k *che ha per radici appunto questi* k *valori di* φ. *I suoi coefficienti si calcolano direttamente per mezzo dei coefficienti della proposta.*

Note ed Esercizi.

1. Per costruire l'equazione che ha per radici i quadrati delle radici di un'equazione proposta, basta portare nel secondo membro di questa tutti i termini con potenze dispari di x, elevare quindi al quadrato entrambi i membri e nello sviluppo, che conterrà soltanto potenze pari di x, sostituire y in luogo di x^2.

Per esempio l'equazione di terzo grado:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \tag{1}$$

si scriverà:

$$(bx^2 + d)^2 = (ax^3 + cx)^2,$$

d'onde sviluppando:

$$b^2x^4 + 2bdx^2 + d^2 = a^2x^6 + 2acx^4 + c^2x^2.$$

La trasformata di (1) per $y = x^2$ è dunque:

$$a^2y^3 + (2ac - b^2)y^2 + (c^2 - 2bd)y - d^2 = 0.$$

2. Calcolare la stessa trasformata per l'equazione del quarto grado.

3. Calcolare la trasformata, per $y = x^3$, delle equazioni generali di terzo e quarto grado.

4. Eseguire sull'equazione binomia:

$$x^n - 1 = 0$$

la trasformazione:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1}$$

col metodo indicato all'art. 1068. Si troverà:

$$\begin{vmatrix} a_0 - y & a_1 & a_2 \dots a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 - y & a_1 \dots a_{n-2} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_1 & a_2 & a_3 \dots a_0 - y \end{vmatrix} = 0.$$

5. Studiare le trasformazioni razionali lineari, cioè del tipo:

$$y = \frac{a\alpha + b\beta + c\gamma + \dots + d\lambda + e}{a'\alpha + b'\beta + c'\gamma + \dots + d'\lambda + e'}.$$

6. Calcolare, in particolare, per l'equazione del terzo grado a radici α, β, γ la trasformata che ha per radici:

$$\frac{\alpha}{\beta - \gamma}, \frac{\beta}{\gamma - \alpha}, \dots.$$

Questa trasformazione potrà riuscire utile in seguito (cfr. § 10°, Nota 2ª).

7. *Metodo di Hermite per la trasformazione razionale delle equazioni.* Allo scopo di semplificare i calcoli richiesti dalla trasformazione di Tschirnhäusen eseguita col metodo ordinario, Hermite ha escogitato un nuovo metodo più appropriato, da lui stesso riassunto (cfr. Comptes Rendus, maggio 1858) nèlle osservazioni che qui riportiamo.

Sia:

$$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \ldots + gx^2 + hx + k = 0$$

l'equazione proposta; l'espressione la più generale di $\varphi(x)$ sarà, come si sa (cfr. art. 1068) una funzione intera del grado $n-1$:

$$\varphi(x) = t + t_0 x + t_1 x^2 + \ldots + t_{n-2} x^{n-1}.$$

Ciò posto, rappresentando la trasformata in y con

$$y^n + p_1 y^{n-1} + p_2 y^{n-2} + \ldots + p_n = 0,$$

uno qualunque dei coefficienti, che sia p_i, sarà una frazione avente per denominatore $a^{(n-1)i}$, e per numeratore una funzione intera, omogenea, del grado i rispetto a $t, t_0, t_1, \ldots, t_{n-2}$, e del grado $(n-1)i$ rispetto ai coefficienti $a, b, h, \ldots, k$. Questo grado così elevato rende in certo qual modo impraticabile il calcolo dell'equazione in y; pertanto ciò che si è ottenuto di più importante mediante la considerazione di questa trasformata, in particolare il teorema di Ierrard sull'equazione del quinto grado (cfr. il § 10° di questo stesso capitolo), non sembra stabilito che a titolo di possibilità, a cagione dell'eccessiva complicazione delle operazioni necessarie per giungere ad un risultato effettivo. Queste difficoltà possono tuttavia sormontarsi mediante la proposizione che segue.

Sia:

$$\begin{aligned}
t &= aT + bT_0 + \ldots + gT_{n-3} + bT_{n-2},\\
t_0 &= aT_0 + bT_1 + \ldots + gT_{n-2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
t_{n-3} &= aT_{n-3} + bT_{n-2}\\
t_{n-2} &= aT_{n-2}.
\end{aligned}$$

Questa sostituzione effettuata nella funzione p_i *la cangierà in una funzione* P_i *dello stesso grado rispetto alle nuove indeterminate* $T, T_0, T_1, \ldots, T_{n-2}$, *ma liberata da qualsiasi denominatore e soltanto del grado* i *rispetto ai coefficienti* $a, b, \ldots, h, k$. *Di più* P_n *sarà divisibile per* a, *diguisachè* $\frac{1}{a} P_n$ *non sarà che del grado* $n-1$ *rispetto a questi coefficienti.*

Questa proposizione, assai facile a stabilirsi, conduce alla forma analitica più conveniente per la funzione $\varphi(x)$, cosicchè d'ora innanzi la formola di trasformazione sarà:

$$y = \varphi(x) = aT + \left.\begin{matrix} ax \\ +\,b \\ \\ \\ \end{matrix}\right| T_0 + \left.\begin{matrix} ax^2 \\ +\,bx \\ +\,c \\ \\ \end{matrix}\right| T_1 + \ldots + \left.\begin{matrix} ax^{n-1} \\ +\,bx^{n-2} \\ +\ldots \\ +\,g \end{matrix}\right| T_{n-2}$$

e l'equazione trasformata:

$$y^n + P_1 y^{n-1} + P_2 y^{n-2} + \ldots + P_n = 0$$

essendo le P funzioni intere dei coefficienti di $f(x)$.

Il lettore potrà da se stesso riconoscere la verità della proposizione di

Hermite avvalendosi dell'identità fornita della formola di Ruffini:

$$(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)\dots(x-\lambda)=$$
$$ax^{n-1}+(a\alpha+b)x^{n-2}+(a\alpha^2+b\alpha+c)x^{n-2}+\dots$$

dette α, β, γ, δ, . . . , λ le n radici di $f(x)=0$.

§ 8.° — Equazione ai quadrati delle differenze.

1071. Per costruire l'equazione, di grado $\frac{n(n-1)}{2}$, che ha per radici i quadrati delle differenze delle radici di una data equazione del grado n, Lagrange ha proposto un metodo speciale col quale, dette α_1, α_2, . . . , α_n le radici dell'equazione proposta, le somme di potenze simili:

$$S_k=\sum_{j>i}(\alpha_j-\alpha_i)^{2k}$$

della trasformata si esprimono direttamente colle somme:

$$s_k=\sum_{k=1}^{k=n}\alpha_i{}^k.$$

La trasformazione si potrà dopo ciò considerare come effettuata, analogamente a quanto si è già osservato (art. 1069).

Posto per brevità:

$$\psi(x)=(x-\alpha_1)^{2k}+(x-\alpha_2)^{2k}+\dots+(x-\alpha_n)^{2k}, \tag{1}$$

si ha evidentemente:

$$2S_k=\psi(\alpha_1)+\psi(\alpha_2)+\dots+\psi(\alpha_n). \tag{2}$$

D'altra parte, sviluppando in (1) le potenze dei singoli binomi, si ha subito che:

$$\psi(x)=s_0x^{2k}-\binom{2k}{1}s_1x^{2k-1}+\binom{2k}{2}s_2x^{2k-2}-\dots+s_{2k},$$

onde, sostituendo per x successivamente i valori α_1, α_2, . . . , α_n e sommando membro a membro, si ottiene confrontando con (2):

$$2S_k=s_0s_{2k}-\binom{2k}{1}s_1s_{2k-1}+\binom{2k}{2}s_2s_{2k-2}-\dots+s_{2k}s_0.$$

Se si riflette che i termini del secondo membro equidistanti da gli estremi sono eguali, si conclude dunque:

$$S_k=s_0s_{2k}-\binom{2k}{1}s_1s_{2k-1}+\dots\pm\frac{1}{2}\binom{2k}{k}s_ks_k. \tag{3}$$

Note ed Esercizi.

1. Costruire la trasformata che ha per radici i quadrati delle differenze elle radici della cubica:

$$x^3 + qx + r = 0.$$

Si troverà l'equazione:

$$y^3 + 6qy^2 + 9q^2y + 4q^3 + 27r^2 = 0.$$

2. Per l'equazione di quarto grado:

$$ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = 0$$

l'equazione trasformata ai quadrati delle differenze è:

$$\begin{aligned} &a^6y^6 + 48a^4Hy^5 + 8a^2(96H^2 + a^2I)y^4 \\ &+ 32(128H^3 + 16a^2HI - 13a^3J)y^3 \\ &+ 16(384H^2I - 7a^2I^2 - 288aHJ)y^2 \\ &+ 1152(2HI - 3aJ)Iy + 256(I^3 - 27J^2) = 0, \end{aligned}$$

dove (cfr. le Note del § precedente):

$$H = ac - b^2\ ,\ I = ae - 4bd + 3c^2\ ,\ J = ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3.$$

3. Per avere un valore del limite inferiore δ considerato all'art. 760, ancora più conveniente di quello dato all'art. 941 (cfr. la Nota 5ª in seguito al § di cui fa parte quest'articolo), si potrebbero calcolare i coefficienti dell'equazione che ha per radici i quadrati delle differenze delle radici della proposta e dedurne con uno dei metodi da noi dati (cfr. § 1° del Cap. X) un limite inferiore delle radici positive. Il calcolo dei coefficienti di quest'equazione (di grado $\frac{n(n-1)}{2}$, se n è il grado della proposta) è però molto laborioso, se il grado della proposta è abbastanza elevato. Il limite fornito dall'art. 941 si fonda sul calcolo del solo ultimo coefficiente di questa trasformata, che è appunto il discriminante Δ della proposta.

§ 9.° — Metodo di Lagrange per la risoluzione delle equazioni di terzo e quarto grado.

1072. *Lagrange* ha cercato di dare un metodo uniforme per la risoluzione generale delle equazioni. Questo metodo consiste nel ricercare, per ogni equazione generale di grado dato n, una funzione delle sue n radici la quale, comunque si sostituiscano fra loro queste radici, non possa prendere che un numero di valori distinti inferiore ad n. Trovata una siffatta funzione, il suo valore si potrà determinare, per quanto si è visto al § prec., risolvendo un'equazione di grado inferiore ad n.

1073. Dette α, β, γ le tre radici dell'equazione generale del terzo

grado, Lagrange ha trovato la funzione:

$$(\alpha + \varepsilon\beta + \varepsilon^2\gamma)^3 \tag{1}$$

(in cui ε è radice cubica complessa dell'unità) la quale non prende che due valori distinti comunque si permutino fra loro le radici. Infatti, eseguendo fra le α, β, γ tutte le sei possibili permutazioni, si avrebbero le seguenti espressioni:

$$\begin{array}{c|c} (\alpha + \varepsilon\beta + \varepsilon^2\gamma)^3 & (\alpha + \varepsilon\gamma + \varepsilon^2\beta)^3 \\ (\beta + \varepsilon\gamma + \varepsilon^2\alpha)^3 & (\gamma + \varepsilon\beta + \varepsilon^2\alpha)^3 \\ (\gamma + \varepsilon\alpha + \varepsilon^2\beta)^3 & (\beta + \varepsilon\alpha + \varepsilon^2\gamma)^3. \end{array}$$

Ora le basi dei primi tre cubi differiscono soltanto per una potenza di ε, poichè, moltiplicando la prima per ε^2, si ha la seconda e moltiplicando la prima per ε si ha la terza; perciò queste tre basi elevate al cubo danno tutte lo stesso risultato. Analogamente per le altre tre espressioni.

Dunque la espressione (1) può avere un solo altro valore che è $(\alpha + \varepsilon^2\beta + \varepsilon\gamma)^3$. Per quanto si è visto al § prec., questi due valori saranno le due radici di un'equazione del secondo grado:

$$z^2 + A_1 z + A_2 = 0 \tag{2}$$

i cui coefficienti:

$$A_1 = -\{(\alpha + \varepsilon\beta + \varepsilon^2\gamma)^3 + (\alpha + \varepsilon^2\beta + \varepsilon\gamma)^3\}$$

$$A_2 = (\alpha + \varepsilon\beta + \varepsilon^2\gamma)^3(\alpha + \varepsilon^2\beta + \varepsilon\gamma)^3,$$

essendo espressi sotto forma di funzioni *simmetriche* delle α, β, γ si calcoleranno direttamente per mezzo dei coefficienti dell'equazione proposta.

Se l'equazione del terzo grado è data sotto la forma semplificata:

$$x^3 + qx + r = 0, \tag{a}$$

fatti i calcoli, si troverà per la (2) l'equazione:

$$z^2 + 27rz - 27q^3 = 0. \tag{2'}$$

Dette θ_1 e θ_2 le radici di quest'equazione, si ha dunque:

$$(\alpha + \varepsilon\beta + \varepsilon^2\gamma)^3 = \theta_1$$

$$(\alpha + \varepsilon^2\beta + \varepsilon\gamma)^3 = \theta_2.$$

Estraendo le radici cubiche dai due membri ed osservando che $\alpha + \beta + \gamma = 0$, poichè la (a) manca del secondo termine, si ottengono di qui le tre equazioni di primo grado:

$$\alpha + \varepsilon\beta + \varepsilon^2\gamma = \sqrt[3]{\theta_1}$$

$$\begin{aligned} \alpha + \varepsilon^2\beta + \varepsilon\gamma &= \sqrt[3]{\theta_2} \\ \alpha + \beta + \gamma &= 0 \end{aligned}$$

fra le α, β, γ. Sommando membro a membro, ed osservando che $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0$, si deduce subito il valore generale di una radice:

$$\alpha = \frac{\sqrt[3]{\theta_1} + \sqrt[3]{\theta_2}}{3}.$$

Questa espressione non è suscettibile che di tre valori, poichè si riconosce facilmente che il prodotto:

$$\sqrt[3]{\theta_1} \cdot \sqrt[3]{\theta_2} = (\alpha + \varepsilon\beta + \varepsilon^2\gamma)(\alpha + \varepsilon\gamma + \varepsilon^2\beta)$$

è una funzione simmetrica delle α, β, γ ed è quindi conosciuto *a priori* ($= -3q$; cfr. art. 925). Perciò, dato a piacere al radicale cubico $\sqrt[3]{\theta_1}$ uno qualunque dei suoi tre valori, il valore da darsi poi all'altro radicale cubico resta perfettamente determinato.

Le formole di risoluzione alle quali si perviene per questa via, non differiscono sostanzialmente da quelle di Cardano. Per passare dalla *risolvente* (2)′ alla *risolvente di Cardano,* basta infatti eseguire nella (2)′ la trasformazione semplicissima $z = 27z'$.

1074. Per l'equazione generale di quarto grado, le cui radici chiameremo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, Lagrange si servì della funzione $[(\alpha+\beta)-(\gamma+\delta)]^2$, la quale, comunque si permutino in essa le radici, non può prendere, come è facile vedere, che i tre valori distinti:

$$T_1 = [(\alpha + \beta) - (\gamma + \delta)]^2 \;,\; T_2 = [(\alpha + \gamma) - (\beta + \delta)]^2, \quad T_3 = [(\alpha + \delta) - (\beta + \gamma)]^2 \tag{3}$$

i quali per conseguenza saranno le tre radici di un'equazione di terzo grado:

$$z^3 + P_1 z^2 + P_2 z + P_3 = 0 \;(^*) \tag{4}$$

di cui i coefficienti P_1, P_2, P_3 si calcoleranno facilmente per mezzo di quelli dell'equazione proposta del quarto grado.

Risoluta quest'equazione di terzo grado col metodo spiegato, le tre radici T_1, T_2, T_3 si potranno considerare come conosciute, onde, estraendo le radici quadrate dei primi e secondi membri delle (3), si avranno le tre uguaglianze:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta - \gamma - \delta &= \sqrt{T_1} \\ \alpha + \gamma - \beta - \delta &= \sqrt{T_2} \\ \alpha + \delta - \beta - \gamma &= \sqrt{T_3}. \end{aligned} \tag{5}$$

Per avere precisamente quattro equazioni di primo grado fra

(*) Se l'equazione del quarto grado sia stata ridotta alla forma $x^4 + qx^2 + rx + s = 0$, per l'equazione risolvente (4) si trova l'equazione seguente:

$$z^3 + 8qz^2 + (16q^2 - 64s)z - 64r^2 = 0.$$

le quattro incognite α, β, γ, δ, basterà aggiungere a queste tre uguaglianze l' eguaglianza:

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = -p, \tag{6}$$

dove p è il coefficiente del secondo termine dell' equazione del quarto grado, supposto il coefficiente del primo termine uguale all' unità.

Sommando ora queste quattro equazioni membro a membro e dividendo poi per 4, si trova:

$$\alpha = \frac{\sqrt{T_1} + \sqrt{T_2} + \sqrt{T_3} - p}{4} \tag{7}$$

che è l' espressione generale di una radice qualunque dell' equazione del quarto grado proposta. In questa espressione ciascuno dei tre radicali quadratici può prendere due valori distinti, onde l' espressione stessa è suscettibile di 8 valori distinti. Nel nostro caso però si osservi che dev'essere:

$$\sqrt{T_1} \cdot \sqrt{T_2} \cdot \sqrt{T_3} = (\alpha + \beta - \gamma - \delta)(\alpha + \gamma - \beta - \delta)(\alpha + \delta - \beta - \gamma),$$

dove il secondo membro è una funzione simmetrica delle α, β, γ, δ e per conseguenza ha un valore perfettamente determinato e conosciuto *a priori* (*). Di qui segue che, scelti ad arbitrio i segni dei primi due radicali, il segno del terzo resterà perfettamente determinato, insieme al suo valore.

I significati che si possono dare all'espressione (7), si riducono così soltanto a quattro che daranno appunto le quattro radici dell' equazione proposta. Del resto questi quattro valori si possono anche individuare risolvendo il sistema delle (5) e (6). Moltiplicando infatti queste equazioni opportunamente per ± 1, sommando e dividendo per 4, si trova in aggiunta alla (7):

$$\beta = \frac{\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2} - \sqrt{T_3} - p}{4}, \quad \gamma = \frac{-\sqrt{T_1} + \sqrt{T_2} - \sqrt{T_3} - p}{4},$$

$$\delta = \frac{-\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2} + \sqrt{T_3} - p}{4}.$$

1075. Se i coefficienti dell'equazione del quarto grado sono tutti reali, si possono presentare (cfr. art. 1060) per la realtà od imaginarietà delle sue radici i seguenti casi:

a) le α, β, γ, δ sono tutte reali;

b) le α, β, γ, δ sono tutte imaginarie, ed allora sarà p. es. α conjugato con β e γ con δ;

c) due radici, p. es. α e β, sono reali e le altre due sono imaginarie conjugate.

(*) Questo valore è $-8r$, nella stessa ipotesi della nota prec. circa la forma dell' eq. proposta (cfr. art. 926).

Ora dalle (3) appare facilmente che:

a) nel primo caso le T_1, T_2, T_3 sono tutte reali e positive;

b) nel secondo caso T_1 è reale e positiva, nel mentre che T_2 e T_3 sono reali e negative;

c) nel terzo caso T_1 è reale positiva, nel mentre che T_2 e T_3 sono complesse conjugate.

La risolvente di Lagrange sarà dunque da preferirsi a quella di Ferrari, quando si voglia avere un criterio immediato e completo circa il numero delle radici reali dell'equazione proposta del quarto grado (*).

Note ed Esercizi.

1. Riconoscere che:

$$(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\varepsilon\beta+\varepsilon^2\gamma)(\alpha+\varepsilon^2\beta+\varepsilon\gamma)=-\begin{vmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ \beta & \gamma & \alpha\\ \gamma & \alpha & \beta\end{vmatrix}.$$

2. L'espressione (1) dell'art. 1073 non è che un caso particolare dell'espressione analoga più generale:

$$(\alpha_0+\omega\alpha_1+\omega^2\alpha_2+\omega^3\alpha_3+\ldots+\omega^{n-1}\alpha_{n-1})^n \qquad (a)$$

in cui ω è una radice n^{esima} di 1 ed $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ sono le radici di un'equazione data $f(x)=0$ del grado n. Invero anche l'espressione (1) gode della proprietà di conservare il suo valore se si esegue (cfr. art. 281) fra le $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ la sostituzione circolare $(\alpha_0\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1})$; poichè si ha manifestamente:

$$\alpha_1+\omega\alpha_2+\omega^2\alpha_3+\ldots+\omega^{n-2}\alpha_{n-1}+\omega^{n-1}\alpha_0$$
$$=\omega^{-1}(\alpha_0+\omega\alpha_1+\omega^2\alpha_2+\omega^3\alpha_3+\ldots+\omega^{n-1}\alpha_{n-1}).$$

3. Le $n-1$ espressioni che si ottengono dalla (a) prendendo per ω le $n-1$ radici n^{esime} di 1 diverse da 1, che indicheremo con $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}$, si dicono le *espressioni risolventi*, di Lagrange, dell'equazione $f(x)=0$, poichè, *qualora se ne conoscano i valori*, che indicheremo rispettivamente con $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$, *è facile dedurne il valore delle radici stesse di* $f(x)=0$.

Infatti dalle $n-1$ eguaglianze:

$$(\alpha_0+\omega_i\alpha_1+\omega_i^2\alpha_2+\omega_i^3\alpha_3+\ldots+\omega_i^{n-1}\alpha_{n-1})^n=A_i \quad, \quad i=1, 2, \ldots, n-1$$

cui si può aggiungere l'eguaglianza (cfr. art. 916):

$$\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_{n-1}=-p$$

se $f(x)=x^n+px^{n-1}+\ldots$, segue per la determinazione delle α_0, α_1,

(*) Si è già visto (cfr. Cap. IX, § 3°, Nota 1ª) come si possa facilmente determinare il numero delle radici positive di un'equazione del terzo grado a radici reali.

$\alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$, il sistema delle n equazioni lineari:

$$\begin{aligned} &\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{n-1} = -p \\ &\alpha_0 + \omega_1\alpha_1 + \omega_1^2\alpha_2 + \ldots + \omega_1^{n-1}\alpha_{n-1} = \sqrt[n]{A_1} \\ &\alpha_0 + \omega_2\alpha_1 + \omega_2^2\alpha_2 + \ldots + \omega_2^{n-1}\alpha_{n-1} = \sqrt[n]{A_2} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\alpha_0 + \omega_{n-1}\alpha_1 + \omega^2_{n-1}\alpha_2 + \ldots + \omega_{n-1}^{n-1}\alpha_{n-1} = \sqrt[n]{A_{n-1}}. \end{aligned} \qquad (b)$$

Quest' equazioni sommate membro a membro ci danno (poichè $1 + \omega_1^i + \omega_2^i + \ldots + \omega^i_{n-1} = 0$ per i intero maggiore di 0 e minore di n):

$$\alpha_0 = \frac{1}{n}\left(-p + \sqrt[n]{A_1} + \sqrt[n]{A_2} + \ldots + \sqrt[n]{A_{n-1}}\right). \qquad (c)$$

Una volta *fissati* i valori degli $n-1$ radicali in modo da soddisfare le (b), dalle stesse (b) moltiplicate risp. per $1, \omega_1^{-i}, \omega_2^{-i}, \ldots, \omega_{n-1}^{-i}$ e sommate membro a membro si ricaveranno poi altre $n-1$ espressioni analoghe alle (b) che faranno conoscere completamente anche le $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$.

4. Si cerchi il minimo numero di fattori del tipo già considerato: $\alpha_0 + \omega\alpha_1 + \omega^2\alpha_2 + \ldots + \omega^{n-1}\alpha_{n-1}$ il cui prodotto sia una funzione simmetrica delle $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$.

5. Posto:

$$\varphi(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_{n-1}x^{n-1}$$

e dette ancora $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}$ le radici n^{esime} di 1, riconoscere la identità:

$$\varphi(\omega_0)\varphi(\omega_1)\ldots\varphi(\omega_{n-1}) = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_{n-1} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \ldots & \alpha_0 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \ldots & \alpha_1 \\ \ldots & & & & \\ \alpha_{n-1} & \alpha_0 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_{n-1} \end{vmatrix}. \qquad (d)$$

Si esegua il prodotto per orizzontali del determinante del secondo membro e del determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & \omega_0 & \omega_0^2 & \ldots & \omega_0^{n-1} \\ 1 & \omega_1 & \omega_1^2 & \ldots & \omega_1^{n-1} \\ \ldots & & & & \\ 1 & \omega_{n-1} & \omega^2_{n-1} & \ldots & \omega^{n-1}_{n-1} \end{vmatrix}$$

6. Il determinante del tipo (d), in cui le $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ possono prendere valori affatto arbitrari, ha ricevuto il nome di determinante *circolante*. La formola (d) ci dice che *il determinante circolante di* n *variabili si spezza identicamente nel prodotto di* n *funzioni lineari delle stesse variabili*.

Sull'argomento dei determinanti circolanti si confronti p. es.: *i determinanti* di E. Pascal (Manuali Hoepli 1897).

7. Volendo applicare il metodo di Lagrange alla risoluzione di equazioni generali di grado superiore al quarto, converrebbe, se n è il grado dell'equazione, costruire una funzione delle n radici che ammettesse, per

tutte le sostituzioni che fra di esse si possono eseguire, un numero di valori inferiore ad n; ossia, che è la stessa cosa (art. 581) una funzione il cui gruppo (art. 580) fosse di indice inferiore ad n. Ma, per $n>4$, non esistono (art. 288) gruppi di sostituzioni fra n lettere di indice inferiore ad n, ad eccezione del solo gruppo alternato che ha per indice 2. Il metodo di Lagrange cessa perciò di essere applicabile alla risoluzione generale delle equazioni al di là del quarto grado. Del resto dimostreremo in seguito (Cap XV) che l'equazione generale di grado superiore al quarto non è mai risolubile per radicali.

§ 10.º — Altre trasformazioni di equazioni. Teoremi di Jerrard (*) e di Sylvester.

1076. Il matematico inglese *Jerrard* ha dimostrato che, data un'equazione qualunque, si può sempre trasformarla razionalmente in un' altra mancante del secondo, terzo e quarto termine risolvendo una sola equazione del terzo grado.

Sia infatti l' equazione data:

$$x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \dots + p_n = 0. \tag{1}$$

Eseguendo su di essa la trasformazione:

$$y = \alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \varepsilon, \tag{2}$$

l' equazione trasformata sarà della forma:

$$y^n + P_1 y^{n-1} + P_2 y^{n-2} + \dots + P_n = 0, \tag{3}$$

dove le P_1, P_2, P_3 ... sono delle funzioni intere ed omogenee delle α, β, γ, δ, ε risp. dei gradi 1, 2, 3,..., come apparisce evidentemente da quanto si è detto all'art. 1062.

Ciò posto, si tratta di dimostrare che si possono sempre determinare le α, β, γ, δ, ε in modo da risolvere le tre equazioni:

$$P_1 = 0 \,,\; P_2 = 0 \,,\; P_3 = 0 \tag{4}$$

mediante la risoluzione di un'unica equazione ausiliaria del terzo grado.

Invero si cominci con eliminare ε dalle P_2 e P_3 sostituendo in esse il valore di ε ricavato da $P_1 = 0$. Si otterranno così due equazioni:

$$Q_2 = 0 \,,\; Q_3 = 0$$

risp. del secondo e terzo grado nelle sole α, β, γ, δ. La prima di queste si potrà sempre porre (cfr. Cap. XVI, § 3º) sotto la forma:

$$Q_2 \equiv u^2 - v^2 + w^2 - t^2 = 0$$

essendo u, v, w, t funzioni lineari omogenee delle α, β, γ, δ e si potrà quindi soddisfare ponendo $u = v$ e $t = w$. Da queste due equazioni di primo grado si ricaveranno γ e δ espressi in funzione lineare ed omogenea di α e β, onde sostituendo i risultati

(*) O di *Bring*.

nell'ultima equazione $Q_3 = 0$ che ancora restava a soddisfare, questa si presenterà come un'equazione del terzo grado nel rapporto $\alpha : \beta$. Determinando dunque questo rapporto, che era restato arbitrario, mediante la risoluzione di quest'ultima equazione cubica e conseguentemente i valori di γ, δ ed ε nel modo già fissato, l'equazione trasformata (3) risulterà della forma:

$$y^n + P_4 y^{n-4} + P_5 y^{n-5} + \dots + P_n = 0,$$

c. d. d.

1077. Con procedimento identico a quello tenuto si potrebbero invece determinare i coefficienti α, β, γ, δ, ε in modo che l'equazione trasformata mancasse del secondo, terzo e quinto termine. Invece di un'equazione cubica si dovrebbe però risolverne una del quarto grado; ponendosi cioè $P_4 = 0$ in luogo di $P_3 = 0$.

Combinando le trasformazioni ora indicate con la trasformazione a radici reciproche, è poi altresì chiaro che si potrebbero invece annullare nella trasformata i coefficienti P_{n-1}, P_{n-2}, P_{n-3} ovvero i coefficienti P_{n-1}, P_{n-2}, P_{n-4}.

Di quì segue immediatamente che nel caso di un'equazione del quinto grado si potrà sempre, mediante la risoluzione di una sola equazione del terzo o del quarto, fare in modo che l'equazione trasformata manchi di tre termini qualunque compresi fra il primo e l'ultimo. In altri termini l'equazione di quinto grado si potrà per tal via ricondurre a piacere ad una qualunque delle quattro forme trinomie:

$$x^5+px+q=0 \ , \ x^5+px^2+q=0 \ , \ x^5+px^3+q=0 \ , \ x^5+px^4+q=0.$$

1078. Mediante la risoluzione di una sola equazione di terzo grado si può anche ricondurre qualunque equazione del quinto grado alla forma:

$$(ax + b)^5 + (a'x + b')^5 + (a''x + b'')^5 = 0.$$

È questo un caso particolare del seguente teorema generale dovuto a *Sylvester:*

Una funzione intera omogenea di grado $2n - 1$ *delle due variabili* x, y *si può porre sotto la forma:*

$$b_1(x + \beta_1 y)^{2n-1} + b_2(x + \beta_2 y)^{2n-1} + \dots + b_n(x + \beta_n y)^{2n-1}.$$

mediante la risoluzione di una sola equazione del grado n.

Noi ci limiteremo a dimostrare questo teorema per il caso di $n = 3$, cioè per il caso di una funzione fondamentale del quinto grado; poichè la dimostrazione che daremo, si estende poi immediatamente senza alcuna modificazione essenziale al caso generale di qualsivoglia valore di n.

1079. Data la funzione fondamentale:

$$a_0x^5+5a_1x^4y+10a_2x^3y^2+10a_3x^2y^3+5a_4xy^4+a_5y^5 \ , \tag{5}$$

ci proponiamo dunque di porla identicamente sotto la forma:

$$b_1(x + \beta_1 y)^5 + b_2(x + \beta_2 y)^5 + b_3(x + \beta_3 y)^5 \tag{6}$$

determinando opportunamente le sei costanti:

$$b_1 \ , \ b_2 \ , \ b_3 \ , \ \beta_1 \ , \ \beta_2 \ , \ \beta_3 .$$

Si dovranno quindi soddisfare le sei equazioni:

$$\begin{array}{ll} a_0=b_1 \quad +b_2 \quad +b_3 \ , & a_3=b_1\beta_1^3+b_2\beta_2^3+b_3\beta_3^3 \\ a_1=b_1\beta_1+b_2\beta_2+b_3\beta_3 \ , & a_4=b_1\beta_1^4+b_2\beta_2^4+b_3\beta_3^4 \\ a_2=b_1\beta_1^2+b_2\beta_2^2+b_3\beta_3^2 \ , & a_5=b_1\beta_1^5+b_2\beta_2^5+b_3\beta_3^5 \end{array} \tag{7}$$

che si ottengono eguagliando (art. 483) i coefficienti dei termini simili in (5) e (6).

Moltiplicando tre equazioni consecutive qualunque del sistema (7) risp. per p_0 , p_1 , p_2 , p_3, essendo:

$$p_0 + p_1x + p_2x^2 + p_3x^3 = 0 \tag{8}$$

l'equazione che ha per radici $\beta_1 , \beta_2 , \beta_3$, se ne deducono le tre seguenti:

$$\begin{aligned} p_0a_0 + p_1a_1 + p_2a_2 + p_3a_3 &= 0 \\ p_0a_1 + p_1a_2 + p_2a_3 + p_3a_4 &= 0 \\ p_0a_2 + p_1a_3 + p_2a_4 + p_3a_5 &= 0 \end{aligned} \tag{9}$$

poichè per l' ipotesi fatta:

$$p_0\beta_i^k + p_1\beta_i^{k+1} + p_2\beta_i^{k+2} + p_3\beta_i^{k+3} = 0.$$

Dalle (8) e (9) congiunte segue ora nel noto modo:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{vmatrix} = 0. \tag{10}$$

È questa dunque l'equazione del terzo grado cui debbono soddisfare le $\beta_1 , \beta_2 , \beta_3$.

Risoluta l'equazione (10), si conosceranno i valori di $\beta_1 , \beta_2 , \beta_3$ e si determineranno quindi le altre tre incognite b_1 , b_2 , b_3 risolvendo le tre equazioni di primo grado:

$$\begin{aligned} b_1 \quad + b_2 \quad + b_3 \quad &= a_0 \\ b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + b_3\beta_3 &= a_1 \\ b_1\beta_1^2 + b_2\beta_2^2 + b_3\beta_3^2 &= a_2 \end{aligned}$$

il cui determinante (art. 482) è in generale diverso da zero.

Note.

1. Se le radici α, β, γ, δ dell' equazione:

$$ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = 0 \qquad (1)$$

sono tutte distinte, si potrà determinare k in modo che i numeri $1, -1, k^{-1}, -k^{-1}$ abbiano lo stesso rapporto anarmonico dei quattro numeri α, β, γ, δ. Esisterà allora una trasformazione lineare $x = \frac{a_1 y + a_2}{b_1 y + b_2}$ che cambierà l'equazione (1) nell'equazione:

$$(1 - y^2)(1 - k^2 y^2) = 0$$

che ha per radici $1, -1, k^{-1}, -k^{-1}$.

2. All'oggetto di cui si tratta, gioverà assumere il primo membro dell'equazione del quarto grado sotto la forma omogenea:

$$f(x_1, x_2) = ax_1^4 + 4bx_1^3 x_2 + 6cx_1^2 x_2^2 + 4dx_1 x_2^3 + ex_2^4$$

e determinare una sostituzione lineare:

$$x_1 = a_1 y_1 + a_2 y_2 \quad , \quad x_2 = b_1 y_1 + b_2 y_2$$

per la quale si abbia:

$$f(x_1, x_2) = y_1^4 + 6\mu y_1^2 y_2^2 + y_2^4. \qquad (2)$$

Si potrebbe dimostrare che il numero μ potrà prendere uno qualunque dei sei valori:

$$\frac{m_1}{m_2 - m_3}, \quad \frac{m_1}{m_3 - m_2}, \quad \frac{m_2}{m_1 - m_3}, \quad \frac{m_2}{m_3 - m_1}, \quad \frac{m_3}{m_1 - m_2}, \quad \frac{m_3}{m_2 - m_1},$$

essendo m_1, m_2, m_3 le tre radici dell' equazione:

$$m^3 - Im - 2J = 0,$$

ove I ed J hanno i significati già noti (cfr. § 6°, Note).

Il lettore riconoscerà poi senza difficoltà come, con un ulteriore sostituzione $y_1 = \sqrt{k} z_1$, $y_2 = \sqrt{k} z_2$, si passi poi dalla forma (2) alla forma desiderata:

$$f(x_1, x_2) = (z_2^2 - z_1^2)(z_2^2 - k^2 z_1^2)$$

che è la così detta *forma canonica di Legendre*.

CAPITOLO XV.

PRINCIPII DELLA TEORIA DEGLI IRRAZIONALI ALGEBRICI.

§ 1.° — Della riduttibilità e irreduttibilità delle equazioni in un dato campo di razionalità.

1080. Nel Capitolo XIII (art. 977) abbiamo chiamato campo di razionalità C un insieme ben determinato di numeri che godono della proprietà che la somma, la differenza, il prodotto ed il quoziente di due qualunque di essi appartengono allo stesso campo C.

Siano ora $x_1, x_2, \ldots, x_n$ delle *variabili* affatto indipendenti, e indichiamo con K l'insieme di tutte le funzioni razionali delle $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i cui coefficienti appartengono al campo C. Potremo dire che K è un campo di razionalità *variabile*, poichè è chiaro che la somma, la differenza, il prodotto ed il quoto di due funzioni comunque scelte in K sarà una nuova funzione del pari appartenente a K. Il campo di razionalità variabile K si potrà rappresentare opportunamente col simbolo $[C; x_1, x_2, \ldots, x_n]$, mettendo cioè in evidenza le variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ed il campo di razionalità costante C cui appartengono i coefficienti delle funzioni razionali delle $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

1081. Del resto accadrà per lo più che lo stesso campo C si possa definire mediante un numero *finito* di elementi di C p. es. $a_1, a_2, \ldots, a_m$, cioè come l'insieme di tutti i numeri che si possono dedurre dagli m numeri $a_1, a_2, \ldots, a_m$ operando su di questi colle quattro operazioni fondamentali. In tal caso il campo C si potrà rappresentare (cfr. art. 980) con $[a_1, a_2, \ldots, a_m]$ e conseguentemente il campo $[C; x_1, x_2, \ldots, x_n]$ con $[a_1, a_2, \ldots, a_m; x_1, \ldots, x_n]$.

Con quest'ultimo simbolo verrà così a rappresentarsi l'insieme di tutte le espressioni che si possono ottenere operando sugli elementi costanti e variabili $a_1, a_2, \ldots, a_m; x_1, x_2, \ldots, x_n$ colle quattro operazioni fondamentali.

Così, ad esempio, l'insieme di tutti i numeri commensurabili si potrà rappresentare con (1), poichè tutti i numeri commensurabili si possono dedurre dall'unico elemento 1 mediante le quattro operazioni fondamentali; e quindi l'insieme di tutte le funzioni razionali di n variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$ con coefficienti numerici commensurabili si potrà rappresentare con $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

1082. Ciò premesso: *un'equazione*

$$A_0 z^\lambda + A_1 z^{\lambda-1} + \ldots + A_{\lambda-1} z + A_\lambda = 0 \qquad (1)$$

i cui coefficienti appartengano ad un dato campo di razionalità costante o variabile K, *si dice irreduttibile* (*rispetto al campo* K) *se il suo primo membro non si può decomporre in fattori interi rispetto a* z *con coefficienti appartenenti allo stesso campo* K. In caso contrario l'equazione (1) si dirà *riduttibile* nel campo K.

Se l'equazione (1) è riduttibile nel campo K, è evidente che una delle sue radici sarà anche radice di un'equazione di grado inferiore:

$$A'_0 z^{\lambda'} + A'_1 z^{\lambda'-1} + \ldots + A'_{\lambda'-1} = 0 \qquad (2)$$

con coefficienti appartenenti del pari a K, bastando a tale oggetto di prendere come primo membro di quest' ultima equazione uno qualunque dei fattori nei quali si decompone per supposto il primo membro di (1).

Reciprocamente se una radice di (1) è anche radice di un'equazione consimile di grado inferiore (2), l'equazione (1) sarà riduttibile nel campo K. Infatti i primi membri delle (1) e (2) avranno in tale supposto un massimo comune divisore, che sarà una funzione intera di z di grado uguale o superiore ad 1, ed i suoi coefficienti apparterranno, come sappiamo (art. 983), allo stesso campo di razionalità K cui appartengono i coefficienti delle (1) e (2). Il primo membro di (1) sarà dunque decomponibile, onde ecc.

1083. *Se l'equazione* (1) *ha una radice multipla, essa è certamente riduttibile nel campo di razionalità* K *cui appartengono i suoi coefficienti.*

Infatti, se ciò accada, l'equazione (1) avrà almeno una radice in comune (art. 913) colla equazione:

$$\lambda A_0 z^{\lambda-1} + (\lambda - 1) A_1 z^{\lambda-2} + \ldots + A_{\lambda-1} = 0$$

i cui coefficienti appartengono del pari a K. Ma quest'ultima è di grado inferiore a λ; quindi la (1) sarà riduttibile per l'art. prec.

1084. *Siano:*

$$\varphi(z) = 0 \ , \ \psi(z) = 0 \qquad (3)$$

due equazioni i cui coefficienti appartengano ad un certo campo di razionalità e sia la seconda di esse irreduttibile in questo campo. In tal caso, se la prima equazione è soddisfatta da una radice della seconda equazione, sarà anche soddisfatta da tutte le altre.

Infatti, poichè le due equazioni (3) hanno una radice in comune, le due funzioni intere $\varphi(z)$ e $\psi(z)$ ammetteranno un massimo comune divisore $D(z)$ almeno di primo grado. Il grado di $D(z)$ non può però essere inferiore al grado di $\psi(z)$, poichè altrimenti il primo membro dell'equazione irreduttibile $\psi(z) = 0$ ammetterebbe un fattore di grado inferiore, il che è contradditorio. Sarà dunque il grado di $D(z)$ eguale al grado di $\psi(z)$, cioè il massimo comun divisore $D(z)$ sarà la stessa $\psi(z)$.

Il primo membro φ(z) sarà dunque divisibile esattamente per $\psi(z)$, con che il teorema è evidentemente dimostrato.

1085. *Se tutte le radici di* $\varphi(z)=0$ *soddisfano all'equazione irreduttibile* $\psi(z)=0$, *la funzione* $\varphi(z)$ *è una potenza intera di* $\psi(z)$ (*nel supposto, sempre lecito, che le più alte potenze di* z *in* φ *e* ψ *abbiano per coefficiente l'unità; in caso contrario, a meno di un fattore indipendente da* z).

Infatti, avendo l'equazione $\varphi(z)=0$ radici in comune con $\psi(z)=0$ che è irreduttibile, si avrà dapprima pel teorema che precede:

$$\varphi(z)=\varphi_1(z)\cdot\psi(z), \tag{4}$$

essendo $\varphi(z)$ una certa funzione intera di z. Di qui segue evidentemente che tutte le radici di $\varphi_1(z)=0$ sono anche radici di $\varphi(z)=0$, e quindi anche di $\psi(z)=0$ per l'ipotesi fatta. Per identica applicazione del teorema precedente sarà dunque:

$$\varphi_1(z)=\varphi_2(z)\cdot\psi(z)$$

e quindi, sostituendo in (4):

$$\varphi(z)=\varphi_2(z)\cdot\psi)z)^2.$$

Si potrà ora procedere allo stesso modo finchè si giunga ad una funzione $\varphi_\lambda(z)$ di grado nullo in z. Allora si sarà ottenuto appunto:

$$\varphi(z)=\mathrm{C}\cdot[\psi(z)]^\lambda,$$

essendo C una costante rispetto a z.

1086. *Se un'equazione è riduttibile, il suo primo membro si potrà decomporre in un prodotto di fattori irreduttibili, e tale decomposizione non potrà farsi che in un sol modo.*

È ben inteso che si fa astrazione dall' ordine dei fattori e da possibili fattori che non dipendano dalla variabile dell'equazione.

Se il campo di razionalità C cui appartengono i coefficienti dell'equazione è costante, questo teorema coincide assolutamente con quello già dimostrato (art. 993) che: ogni funzione intera si può sempre decomporre, ed in un modo unico, in un prodotto di funzioni prime rispetto ad un dato campo di razionalità. Se poi il campo C contiene delle variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$, sarà egualmente valida la stessa dimostrazione ivi data, poiche le variabili x_1, $x_2, \ldots, x_n$ devono considerarsi sempre come affatto indipendenti dalla variabile z dell'equazione; esse verranno dunque assimilate a delle semplici costanti dal punto di vista dell' argomento variabile z.

1087. Teorema. — *Sia* $f(x)=0$ *un' equazione del grado* n, *colle radici* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, *irreduttibile in un certo campo di razionalità* K *cui appartengono i suoi coefficienti. Se* $\varphi(x)$ *è una funzione razionale qualunque, con coefficienti appartenenti a* K, *gli* n *numeri:*

$$\varphi(\alpha_1), \varphi(\alpha_2), \ldots, \varphi(\alpha_n) \tag{5}$$

sono fra loro tutti distinti, ovvero ciascuno di essi si trova ripetuto lo stesso numero di volte.

Le espressioni (5), nelle quali ci è lecito ritenere (art. 931) che φ sia simbolo di funzione intera, sono infatti (art. 1062) le radici di un' equazione $F(x) = 0$ del grado n con coefficienti appartenenti a K.

Se ora:

$$F(x) = F_1(x)F_2(x) \ldots F_\mu(x)$$

è la funzione intera $F(x)$ decomposta nei suoi fattori irreduttibili nel campo K, uno qualunque di questi fattori, p. es. $F_1(x)$, eguagliato a zero non potrà avere radici diverse dai numeri (5). Ma se sia p. es. $\varphi(\alpha_i)$ radice di $F_1(x) = 0$, l' equazione $F_1(\varphi(x)) = 0$, avendo in comune colla equazione irreduttibile $f(x)=0$ la radice α_i, avrà per radici (art. 1084) tutte le radici di $f(x)=0$, cioè sarà:

$$F_1\Big(\varphi(\alpha_1)\Big) = 0 \ , \ F_1\Big(\varphi(\alpha_2)\Big) = 0 \ , \ldots , F_1\Big(\varphi(\alpha_\mu)\Big) = 0 \, ;$$

epperò $F_1(x) = 0$ ammetterà come radici tutti i numeri (5); ciascuno come radice semplice, poichè l'equazione $F_1(x)=0$, essendo irreduttibile, non può ammettere (art. 1083) radici multiple.

Altrettanto dicasi per le funzioni $F_2(x)$, $F_3(x)$, ... Tutte queste funzioni non possono dunque differire dalla $F_1(x)$ che per un fattore costante; cosicchè si potrà scrivere, a meno di un fattore costante, l' identità:

$$F(x) = [F_1(x)]^\mu. \tag{6}$$

Di quì è manifesto che ogni radice di $F(x) = 0$ è multipla del grado μ; cioè appunto che i numeri (5) sono uguali fra loro μ a μ; c. d. d.

1088. Corollario. — *Il primo membro di ogni trasformata di Tschirnhäusen* (cfr. art. 1083) *di un'equazione irreduttibile, o è irreduttibile o è una potenza esatta di una funzione irreduttibile.*

Nell'identità (6) la funzione $F_1(x)$ è infatti, secondo la dimostrazione da noi data, una funzione irreduttibile.

1089. Chiudiamo questo § col seguente teorema, che dà un esempio semplice ed importante di equazioni irreduttibili in un campo di razionalità variabile: *se* C *è un campo di razionalità costante ed* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *sono* n *variabili indipendenti, l' equazione del grado* n:

$$z^n + y_1 z^{n-1} + y_2 z^{n-2} + \ldots + y_n = 0 \tag{α}$$

è irreduttibile nel campo di razionalità variabile $[C, y_1, y_2, \ldots, y_n]$.

Ammettiamo infatti, se è possibile, che si avesse:

$$z^n + y_1 z^{n-1} + \ldots + y_n = \varphi(z, y_1, y_2, \ldots, y_n)\psi(z, y_1, y_2, \ldots, y_n), \tag{β}$$

essendo φ e ψ funzioni razionali delle $z, y_1, \ldots, y_n$ con coefficienti costanti appartenenti al campo C, ed essendo inoltre φ e ψ intere rispetto alla variabile z e risp. dei gradi $\lambda < n$ ed $n - \lambda$.

Dovendo la (β) essere un'identità rispetto a tutte le $n+1$ varia-

bili $z, y_1, \dots, y_n$, essa dovrà essere verificata, se si sostituiscano le espressioni:

$$z = x_h, \; y_1 = -(x_1 + x_2 + \dots + x_n), \; y_2 = +(x_1 x_2 + \dots), \dots$$

che ne annullano il primo membro identicamente, cioè qualunque siano i valori delle variabili $x_1, \dots, x_h, \dots, x_n$. Sarà dunque identicamente:

$$\varphi(x_h, -\sum x_i, +\sum x_i x_j, \dots, (-1)^n x_1 x_2 \dots x_n) = 0,$$

onde si vede che l'equazione:

$$\varphi(z, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0$$

che è del grado λ in z, ammetterebbe le n radici: $z=x_1$, $z=x_2$,..., $z=x_n$, cioè un numero di radici superiore al suo grado, il che è assurdo.

Note ed Esercizi.

1. *Se l'equazione* $f(z) = 0$ *è irreduttibile in un certo campo di razionalità* C *e se* $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{\lambda-1}$ *sono le sue radici, essa diventa riduttibile nel nuovo campo di razionalità* $\left(C, \frac{\alpha_1}{\alpha_0}, \frac{\alpha_2}{\alpha_0}, \dots, \frac{\alpha_{\lambda-1}}{\alpha_0}\right)$. *Fa eccezione soltanto il caso in cui* $f(z) = 0$ *ha la forma binomia* $z^\lambda - a = 0$.

2. Un numero qualunque si dice *razionale* ovvero *irrazionale rispetto ad un dato campo di razionalità costante* C, secondochè fa parte del campo C ovvero ne è estraneo.

I numeri irrazionali rispetto al campo C si distinguono poi in *irrazionali algebrici* ed in *irrazionali trascendenti,* secondochè sono o non sono radici di un'equazione algebrica con coefficienti appartenenti al campo C.

Se α é irrazionale algebrico rispetto al campo C, si potrà sempre ritenere che l'equazione cui esso soddisfa:

$$c_0\alpha^\lambda + c_1\alpha^{\lambda-1} + \dots + c_{\lambda-1}\alpha + c_\lambda = 0$$

sia irreduttibile rispetto al campo C. Infatti, se così non fosse, basterebbe sostituire al primo membro uno dei fattori irreduttibili nei quali esso si decomporrebbe. In questo supposto si dice che α è un *irrazionale algebrico di ordine* λ rispetto al campo C.

3. Se α e β sono due irrazionali algebrici dello stesso ordine, rispetto al campo C, e β appartenga al campo di razionalità (C, α), reciprocamente il numero α apparterrà al campo (C, β).

Per dimostrare questo teorema, si prenda come punto di partenza che l'equazione, cui soddisfa β, si può pel supposto dedurre da quella cui soddisfa α mediante una trasformazione di Tschirnhäusen.

4. *Se* $R(x) = 0$ *è la risultante generale che nasce dalla eliminazione delle altre* $n-1$ *incognite nel sistema generale di* n *equazioni algebriche di dati gradi con* n *incognite* $x, y, z, \dots$, *l'equazione* $R(x) = 0$ *è irreduttibile nel campo di razionalità variabile formato dai coefficienti delle equazioni.*

Siano infatti, per fissare le idee, le tre equazioni con tre incognite:

$$f(x, y, z) = 0, \; \varphi(x, y, z) = 0, \; \psi(x, y, z) = 0 \qquad (1)$$

che si suppongano risp. dei gradi m, n, l ed i cui coefficienti affatto generali siano a, b, c, ... Sia $R(x) = 0$ l'equazione di grado mnl in x che si ottiene eliminando coi noti metodi (cfr. Cap. XIII, § 7°) dalle (1) le due incognite y e z. Dobbiamo dimostrare che $R(x)$ è irreduttibile nel campo

di razionalità $(a, b, c, \ldots)$, o in altri termini che $R(x)$ *non si può decomporre in un prodotto di due funzioni intere in* x *con coefficienti che siano funzioni razionali delle* a, b, c, ...

Supposto infatti che si avesse identicamente $R(x) = R_1(x).R_2(x)$, imaginiamo di specializzare i coefficienti $a, b, c, \ldots$ precisamente come si è fatto all' art. 1026. L'equazione $R_1(x) = 0$ avrà allora per radice il valore di x che soddisfa ad un certo sistema di equazioni lineari:

$$A_i = 0 \;,\; B_j = 0 \;,\; C_h = 0. \tag{2}$$

Ma, essendo i coefficienti di $R_1(x)$ razionali nelle $a, b, c, \ldots$, è chiaro che essi sono esprimibili simmetricamente coi coefficienti delle $A_1, A_2, \ldots, A_m$ e così pure coi coefficienti delle $B_1, B_2, \ldots, B_n$ e con quelli delle $C_1, C_2, \ldots, C_l$.

L'equazione $R_1(x) = 0$, essendo compatibile col sistema (2), lo sarà dunque anche necessariamente cogli altri $mnl-1$ sistemi analoghi a (2) ai quali corrispondono altrettanti valori differenti di x; epperò il suo grado non può essere inferiore ad mnl, ecc.

5. Si dimostri in altro modo il teorema dell' art. 1087, prendendo come punto di partenza l'osservazione che, se uno stesso numero della successione (5) si trova in essa ripetuto λ volte, ciò equivale a dire che essa è radice multipla, di ordine λ, dell' equazione $F(x) = 0$; cosicchè dovranno coesistere p. es. le eguaglianze:

$$F\Big(\varphi(\alpha_1)\Big) = 0 \,,\; F_1\Big(\varphi(\alpha_1)\Big) = 0 \,, \ldots ,\; F^{(\lambda-1)}\Big(\varphi(\alpha_1)\Big) = 0.$$

6. *Se le quantità*:

$$\beta_1 = \varphi(\alpha_1) \;,\; \beta_2 = \varphi(\alpha_2) \;, \ldots ,\; \beta_n = \varphi(\alpha_n)$$

considerate nel teorema dell'art. 1087 *sono tutte distinte, esiste sempre una funzione razionale* ψ, *con coefficienti appartenenti al campo* K, *per la quale si ha:*

$$\alpha_1 = \psi(\beta_1) \;,\; \alpha_2 = \psi(\beta_2) \;, \ldots ,\; \alpha_n = \psi(\beta_n).$$

Per dimostrare ciò, si tenga presente che α_1 è radice comune delle due equazioni:

$$f(x) = 0 \quad , \quad \varphi(x) - \beta_1 = 0$$

le quali d'altra parte hanno in comune una sola radice, per l'ipotesi fatta che $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ siano tutte distinte.

§ 2.° — Sulla riduttibilità delle equazioni binomie il cui grado è un numero primo (*).

1090. Ci proponiamo di ricercare in quali casi l' equazione binomia:

$$x^p - A = 0 \tag{1}$$

in cui p è un numero primo ed A appartiene ad un certo campo di razionalità K, sia riduttibile entro questo stesso campo.

Se B è una qualunque delle p radici della (1), le altre $p-1$ radici sono date, come sappiamo (art. 824), da:

$$\alpha_1 B \;,\; \alpha_2 B \;, \ldots ,\; \alpha_{p-1} B \;,$$

(*) Per il caso generale, in cui il grado sia un numero qualunque, si vegga la Nota 3ª di questo stesso §.

essendo $1, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}$ le p radici dell' equazione:

$$x^p - 1 = 0. \tag{2}$$

Si avrà dunque identicamente in x:

$$x^p - A = (x - B)(x - \alpha_1 B)(x - \alpha_2 B) \ldots (x - \alpha_{p-1} B).$$

Ciò premesso, supponiamo che l'equazione (1) sia riduttibile nel campo K, e sia:

$$f(x) = (x - B)(x - \alpha_1 B)(x - \alpha_2 B) \ldots (x - \alpha_{\lambda-1} B) \tag{3}$$

uno dei fattori nei quali si decompone il primo membro di (1). Poichè i coefficienti della funzione intera $f(x)$ debbono appartenere tutti al campo K, dovrà in particolare appartenere a questo campo quel termine di $f(x)$ che non contiene x, cioè, come si vede dalla identità (3), il prodotto:

$$B \cdot \alpha_1 B \cdot \alpha_2 B \ldots \alpha_{\lambda-1} B.$$

Detta dunque C una quantità contenuta in K, si potrà scrivere:

$$B^\lambda \cdot \alpha_1 \cdot \alpha_2 \ldots \alpha_{\lambda-1} = C. \tag{4}$$

Si determini ora, come è sempre possibile (*), un intero ρ pel quale si abbia:

$$\lambda\rho = 1 + Mp, \tag{5}$$

essendo M del pari intero. Si avrà:

$$B^{\lambda\rho p} = B^p \cdot (B^p)^{Mp} = A \cdot A^{Mp}$$

e quindi, elevando i due membri di (4) alla potenza ρp:

$$A \cdot A^{Mp} = C^{\rho p},$$

poichè la potenza p^{ma} di ogni α_i è uguale ad 1. Di qui si deduce:

$$A = \left(\frac{C^\rho}{A^M}\right)^p,$$

cioè che la quantità A è la potenza p^{ma} di una quantità appartenente al campo K.

Reciprocamente, se sia $A = A_1^p$, dove A_1 appartiene al pari di A al campo K, l'equazione (1) è certamente riduttibile nel campo K, poichè si avrà identicamente:

$$x^p - A = (x - A_1)(x^{p-1} + A_1 x^{p-2} + A_1^2 x^{p-3} + \ldots + A_1^{p-1}).$$

Concludiamo dunque che: *affinchè l'equazione* (1) *sia riduttibile*

(*) Infatti dando a ρ i valori $0, 1, 2, \ldots, p-1$ il prodotto $\lambda\rho$ diviso per p darà resti tutti differenti (onde per un certo valore di ρ si avrà per resto 1). Supposto infatti che $\lambda\rho$ e $\lambda\rho'$ dessero eguale resto, la differenza $\lambda\rho - \lambda\rho'$ cioè $\lambda(\rho-\rho')$ dovrebbe essere divisibile per p, il che è impossibile, essendo λ minore di p che è numero primo e $\rho-\rho'$ un numero più piccolo di p.

nel campo K, *è necessario e sufficiente che* A *sia la potenza* p^{ma} *di una quantità contenuta nel campo* K.

Note ed Esercizi.

1. Se nell'equazione (1) sia $A = 1$, si ha la riduzione:

$$x^p - 1 = (x-1)(x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 1).$$

Si sostituirà così all'equazione (1) l'equazione:

$$x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 1 = 0$$

la quale *è irreduttibile nel campo dei numeri razionali, sempreché* p *sia numero primo*. Alla prima dimostrazione di questo importante teorema data da *Gauss* (Disquis. arithm., art. 341) ne sono seguite parecchie altre. Noi riporteremo qui la dimostrazione di *Kronecker*.

Posto per brevità:

$$f(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 1, \tag{α}$$

supponiamo, se è possibile, che $f(x)$ sia riduttibile. Per un teorema di Gauss (cfr. le Note del § prec.) si avrà allora:

$$f(x) = \varphi(x) \cdot \psi(x), \tag{β}$$

dove $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ sono funzioni intere di x a coefficienti interi e col primo coefficiente uguale ad 1.

Se r è una qualunque delle radici di (α), tutte le altre radici di (α) sono date, come sappiamo (art. 331), da $r^2, r^3, r^4, \ldots, r^{p-1}$. Si avrà dunque:

$$\varphi(r) \cdot \varphi(r^2) \cdot \varphi(r^3) \ldots \varphi(r^{p-1}) = 0,$$

poichè in virtù di (β) l'equazione $\varphi(x) = 0$ deve avere almeno qualche radice in comune con $f(x) = 0$. Il prodotto:

$$\varphi(x) \cdot \varphi(x^2) \ldots \varphi(x^{p-1})$$

è dunque una funzione intera di x che è annullata da ogni radice della (α). Essa sarà dunque divisibile esattamente per $f(x)$ e si potrà scrivere, sempre pel citato teorema di Gauss:

$$\varphi(x)\varphi(x^2) \ldots \varphi(x^{p-1}) = f(x) \cdot F(x)$$

essendo $F(x)$ una funzione intera di x a coefficienti interi.

Per $x = 1$ segue di qui:

$$[\varphi(1)]^{p-1} = p \cdot F(1). \tag{γ}$$

Ma dalle (β) segue per $x = 1$:

$$p = \varphi(1) \cdot \psi(1),$$

onde ci è lecito ritenere che l'uno dei numeri interi $\varphi(1)$ e $\psi(1)$, p. es. $\psi(1)$, sia eguale a $\pm p$ e l'altro $\varphi(1) = \pm 1$. La (γ) diviene in tal caso:

$$1 = p \cdot F(1)$$

eguaglianza assurda, essendo F(1) un numero intero.

2. Lascieremo come esercizio al lettore di verificare che la dimostrazione ora data si può estendere immediatamente a dimostrare la irredut-

tibilità dell'equazione più generale:

$$\frac{x^{p^{\alpha}}-1}{x^{p^{\alpha-1}}-1}=x^{p^{\alpha-1}(p-1)}+x^{p^{\alpha-1}(p-2)}+\ldots+1=0,$$

sempre nell'ipotesi che p sia un numero primo.

A tale oggetto converrà però prima far vedere che *le radici di questa equazione sono precisamente le radici primitive, di indice* p^{α}, *dell'unità*, appoggiandosi alle proprietà da noi già dimostrate al § 4° del Cap. XI.

3. La questione della riduttibilità delle equazioni binomie di grado qualunque è stata risoluta come segue.

Affinchè l'equazione $x^n-A=0$, *in cui* A *appartiene ad un certo campo di razionalità* K, *sia riduttibile nel campo* K, *è necessario e sufficiente che si verifichi uno dei seguenti casi:*

1°) *il numero* A *è la potenza* h^{ma} *di un numero del campo* K, *essendo* h *un divisore di* n;

2°) *il grado* n *è un multiplo di* 4, *nel mentre che* $-A$ *è il quadruplo della quarta potenza di un numero del campo* K.

Per la dimostrazione di ciò si vegga la memoria: *sulla riduttibilità delle equazioni algebriche* (Rend. Acc. Scienze di Napoli, dicembre 1897).

4. Ad illustrazione di ciò si consideri l'identità:

$$x^4+4=(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$$

la quale ci dice che x^4+4 è riduttibile nel campo dei numeri commensurabili malgrado che il numero -4 non sia il quadrato esatto di un numero reale commensurabile.

§ 3.° — Forma ridotta delle espressioni radicali relative ad un dato campo di razionalità.

1091. Sia C un certo campo di razionalità ad elementi *costanti* e sia $(C, a_0, a_1, \ldots, a_n)$ il campo di razionalità variabile che si ottiene dal precedente aggiungendovi (art. 1080) le variabili indeterminate $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Sia poi X un'espressione radicale qualsivoglia relativa a quest'ultimo campo, cioè un'espressione composta cogli elementi di questo campo sui quali si sia operato colle quattro operazioni fondamentali e colla estrazione di radice ad indice intero e positivo. (Potremo sempre ritenere che gli indici dei radicali siano numeri primi).

Se λ è il numero dei radicali da considerarsi come distinti (articolo 954) contenuti nella espressione X, e $T=\sqrt[p]{V}$ uno qualunque dei radicali esteriori, si può sempre scrivere (art. 955) X sotto la forma:

$$X=V_0+V_1T+V_2T^2+\ldots V_{p-1}T^{p-1} \tag{1}$$

$$=V_0+V_1\sqrt[p]{V}+V_2\left(\sqrt[p]{V}\right)^2+\ldots+V_{p-1}\left(\sqrt[p]{V}\right)^{p-1},$$

dove le $V, V_0, V_1, \ldots, V_{p-1}$ sono espressioni radicali relative allo stesso campo $(C, a_0, a_1, \ldots, a_n)$, le quali però contengono nel loro insieme soltanto $\lambda-1$ radicali, cioè gli altri $\lambda-1$ radicali, $T_1, T_2, \ldots, T_{\lambda-1}$, differenti da T contenuti nella espressione X. Ci è sempre lecito supporre che T non appartenga al

campo $(C, a_0, a_1, \ldots, a_n; T_1, T_2, \ldots, T_{\lambda-1})$, poichè altrimenti si sarebbe potuto esprimere T per mezzo degli elementi di questo campo e far dipendere X dai soli $\lambda-1$ radicali $T_1, T_2, \ldots, T_{\lambda-1}$.

Oltre a ciò possiamo anche supporre $V_1=1$. Se poniamo infatti $V_1 T = T'$, la (1) si scrive:

$$X = V_0 + T' + \left(\frac{V_2}{V_1^2}\right)T'^2 + \left(\frac{V_3}{V_1^3}\right)T'^3 + \ldots + \left(\frac{V_{p-1}}{V_1^{p-1}}\right)T'^{p-1},$$

dove i coefficienti $\frac{V_2}{V_1^2}, \frac{V_3}{V_1^3}, \ldots$ dipendono solo dai radicali T_1, $T_2, \ldots, T_{\lambda-1}$, nel mentre che:

$$T' = \sqrt[p]{V_1^p} \cdot T = \sqrt[p]{V_1^p}\sqrt[p]{V} = \sqrt[p]{V_1^p V} = \sqrt[p]{W},$$

dove $W = V_1^p V$ dipende del pari dai soli radicali $T_1, T_2, \ldots, T_{\lambda-1}$.

1092. Ciò premesso, sia $F(X)=0$ l'equazione algebrica, con coefficienti appartenenti al campo di razionalità $(C, a_0, a_1, \ldots, a_n)$, che ha per radice tale espressione così ridotta:

$$X = V_0 + \sqrt[p]{V} + V_2\left(\sqrt[p]{V}\right)^2 + \ldots + V_{p-1}\left(\sqrt[p]{V}\right)^{p-1} \tag{2}$$

equazione che potrà sempre costruirsi col metodo dato al § 8º del Cap. XII. Si ha così:

$$F(V_0 + T + V_2 T^2 + \ldots + V_{p-1} T^{p-1}) = 0. \tag{3}$$

Considerando questa come un'equazione in T, vediamo che i suoi coefficienti appartengono al campo di razionalità $(C, a_0, a_1, \ldots, a_n;$ $T_1, T_2, \ldots, T_{\lambda-1})$.

Ma l'equazione:

$$T^p - V = 0$$

cui soddisfa il radicale T, è irreduttibile in questo campo. Infatti se essa fosse riduttibile, dovrebbe, per quanto si è visto al § precedente, la V essere la potenza p^{ma} di una quantità appartenente al detto campo ed allora la (4) ci permetterebbe di esprimere il radicale T mediante gli altri $\lambda-1$ radicali ed una radice primitiva dell'unità di indice p. L'espressione di X si potrebbe allora semplificare sostituendo al radicale T tale radice primitiva. Ma più semplicemente possiamo escludere la possibilità che ciò accada ritenendo che nel campo di razionalità costante C siano già incluse le radici primitive di 1, di indici eguali a quelli dei vari radicali, avendo già ammesso che T non appartenga al campo $(C, a_0, a_1, \ldots, a_n; T_1, \ldots, T_{\lambda-1})$.

Ciò premesso, poichè l'equazione irreduttibile (4) ha in comune colla (3) la radice T, dovrà avere in comune con essa (art. 1084) anche tutte le altre sue radici, le quali, dette $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{p-1}$ le radici primitive di 1 di indice p, sono espresse da

$$\omega_1 T, \omega_2 T, \ldots, \omega_{p-1} T.$$

Si avrà dunque altresì (per $i = 1, 2, \ldots, p-1$):

$$F(V_0 + \omega_i T + \omega_i^2 V_2 T^2 + \ldots + \omega_i^{p-1} V_{p-1} T^{p-1}) = 0$$

cioè, dette $X_1, X_2, \ldots, X_{p-1}$ certe altre $p-1$ radici di $F(X)=0$, si avrà il sistema di equazioni:

$$\begin{array}{l} X = V_0 + T + V_2 T^2 + \ldots + V_{p-1} T^{p-1} \\ X_1 = V_0 + \omega_1 T + \omega_1^2 V_2 T^2 + \ldots + \omega_1^{p-1} V_{p-1} T^{p-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_{p-1} = V_0 + \omega_{p-1} T + \omega_{p-1}^2 V_1 T^2 + \ldots + \omega_{p-1}^{p-1} V_{p-1} T^{p-1}. \end{array} \quad (5)$$

Risolvendo questo sistema di equazioni lineari il cui determinante è diverso da zero, rispetto alle quantità:

$$V_0, T, V_2 T^2, \ldots, V_{p-1} T^{p-1},$$

si vede chiaramente che queste quantità, e quindi anche le quantità:

$$T, V, V_0, V_2, V_3, \ldots, V_{p-1} \quad (6)$$

appartengono tutte al campo di razionalità $(\omega, X, X_1, X_2 \ldots X_{p-1})$ essendo ω una radice primitiva di 1 di indice p, giacchè tutte le altre radici primitive possono esprimersi, come sappiamo, quali potenze di una di esse.

1093. Fra i $\lambda - 1$ radicali $T_1, T_2, \ldots, T_{\lambda-1}$ che entrano nella composizione delle

$$V, V_0, V_2, V_3, \ldots, V_{p-1}, \quad (7)$$

ve ne è evidentemente almeno uno, che sia p. es. T_1, esteriore in ognuna di queste espressioni; e possiamo sempre ammettere che esso non sia esprimibile razionalmente coi rimanenti, cioè che non appartenga al campo $(C, a_0, a_1, \ldots, a_n; T_2, T_3, \ldots, T_{\lambda-1})$.

Se $T_1 = \sqrt[q]{W}$, si dimostrerà in modo identico a quello tenuto sopra che una qualunque delle (7), p. es. V_i, si può scrivere sotto la forma:

$$V_i = W_0 + \sqrt[q]{W} + W_2 \left(\sqrt[q]{W}\right)^2 + \ldots + W_{q-1} \left(\sqrt[q]{W}\right)^{q-1}, \quad (8)$$

dove le $W, W_0, W_2, \ldots, W_{q-1}$ dipendono ora soltanto dai radicali $T_2, T_3, \ldots, T_{\lambda-1}$ e ciascuna delle quantità:

$$T_1, W, W_0, W_2, \ldots, W_{q-1} \quad (9)$$

appartiene al campo di razionalità $(\omega', V_i, V'_i, \ldots)$ essendo ω' una radice primitiva di 1 di indice q e $V_i, V'_i, \ldots$ radici della equazione algebrica:

$$\Phi_i(V_i) = 0$$

cui soddisfa la espressione V_i. I coefficienti dell' equazione $\Phi_i=0$ appartengono naturalmente al campo di razionalità $(C; a_0, a_1, ..., a_n)$ e si possono costruire facilmente osservando che per l' articolo precedente V_i è una funzione razionale delle $X, X_1 X_2, ...$ La teoria della trasformazione razionale delle equazioni ci darà quindi (art. 1070) l'equazione trasformata $\Phi_i = 0$ di cui V_i è una radice e di cui le altre radici $V'_i, V''_i, ...$ saranno funzioni razionali, simili alla precedente, delle radici $X, X_1, ..$ di $F(X) = 0$, cioè apparterranno come V_i al campo di razionalità $(\omega, X, X_1, ..., X_{n-1})$ definito da ω e da tutte le radici dell'equazione $F(X)=0$ che supporremo di grado n. Concludiamo dunque che ognuna delle quantità (9) appartiene al campo di razionalità $(\omega, \omega'; X, X_1, ..., X_{n-1})$.

1094. Si procederà ora allo stesso modo scegliendo fra i radicali $T_2, T_3, ..., T_{\lambda-1}$ da cui dipendono le W, uno, p. es. T_2, che sia esteriore in tutte le W e non si possa esprimere razionalmente coi rimanenti $T_3, T_4, ..., T_{\lambda-1}$. Se $T_2 = \sqrt[s]{H}$, si dimostrerà come sopra che una qualunque delle W si può porre sotto la forma:

$$H_0 + \sqrt[s]{H} + H_2\left(\sqrt[s]{H}\right)^2 + ... + H_{s-1}\left(\sqrt[s]{H}\right)^{s-1} \qquad (10)$$

dove ora le H dipendono solo dai $\lambda-3$ radicali $T_3, T_4, ..., T_{\lambda-1}$, nel mentre che le quantità:

$$T_2, H, H_0, H_2, ..., H_{s-1}$$

appartengono tutte al campo di razionalità: $(\omega, \omega', \omega''; X_0, X_1, .., X_{n-1})$, detta ω'' una radice primitiva, di indice s, dell'unità.

Così continuando e sostituendo per ultimo nella espressione (2) di X in luogo delle V le loro espressioni, date dalle (8), per mezzo delle W; quindi in luogo delle W le loro espressioni sotto la forma (10) e così via, si giungerà evidentemente ad una espressione, che chiameremo *ridotta*, di X, per la quale si verificherà che tutti i radicali in essa contenuti apparterranno al campo di razionalità $(\omega, \omega', \omega'', ...; X_0, X_1, ..., X_{n-1})$, essendo $\omega, \omega', ...$ radici primitive di 1 di indici eguali a quelli dei radicali medesimi. Si potrà anche dire, più semplicemente, che essi appartengono al campo $(\Omega; X_0, X_1, ..., X_{n-1})$, essendo Ω una radice primitiva di 1 di indice uguale al prodotto degli indici *distinti* che si presentano nei radicali. Infatti (art. 830 e Note) le $\omega, \omega', ...$ si possono esprimere sempre come potenze di Ω, e reciprocamente si può prendere $\Omega = \omega\omega'\omega'' ....$

1095. Per maggior chiarezza riassumeremo quanto si è dimostrato nel seguente teorema, dovuto ad Abel:

Se X_0 è una espressione radicale relativa ad un dato campo di razionalità, costante o variabile, ed $F(X) = 0$ è l' equazione algebrica con coefficienti appartenenti al detto campo, cui soddisfa la espressione X_0, si può sempre, senza introdurre alcun nuovo radicale, dare ad X_0 una forma ridotta per la quale si verifichi che tutti i radicali in essa contenuti appartengano al campo di razionalità $(\Omega; X_0, X_1, ..., X_{n-1})$, essendo $X_0, X_1, ..., X_{n-1}$ le ra-

dici dell'equazione $F(X) = 0$, *ed* Ω *una radice primitiva di* 1 *il cui indice è il prodotto dei numeri primi distinti che si presentano come indici dei radicali.*

È appena necessario di aggiungere che l'equazione $F(X) = 0$ si può sempre ritenere come irreduttibile nel campo di razionalità cui si riferiva l'espressione radicale X_0.

§ 4.° — Sulla necessità della presenza dei radicali quadratici e cubici nelle formole di risoluzione generale delle equazioni algebriche.

1096. Supponiamo, in quanto ciò sia possibile, che l'equazione *generale* di grado n:

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0 \qquad (1)$$

sia risolubile per radicali, cioè che essa sia soddisfatta da una espressione radico-razionale nelle n variabili indipendenti a_1, $a_2, \ldots, a_n$ la quale possa inoltre contenere anche dei numeri costanti appartenenti ad un certo campo di razionalità costante C.

Detta X_0 una cosiffatta espressione, sarà dunque X_0 un'espressione radicale relativa al campo di razionalità variabile $(C, a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Cominceremo dal dimostrare che, se $n>1$, la espressione X_0 deve contenere effettivamente almeno un segno radicale.

Invero, ove ciò non fosse, è chiaro che X_0 apparterrebbe al campo di razionalità $(C, a_1, a_2, \ldots, a_n)$, cosicchè l'equazione (1) avrebbe una radice in comune con l'equazione di 1° grado in x:

$$x - X_0 = 0.$$

L'equazione (1) sarebbe dunque (art. 1082) riduttibile rispetto al campo $(C, a_1, a_2, \ldots, a_n)$, il che è in contraddizione con un altro teorema già dimostrato (art. 1089).

1097. Ciò premesso, sia $\sqrt[p]{U}$ uno di quei radicali contenuti nell'espressione X_0 che si presentano per primi quando si passi alla calcolazione effettiva dei successivi radicali, cioè uno di quei radicali che non racchiudono nel loro interno alcun altro segno radicale. Questi radicali noi li chiameremo d'ora innanzi per brevità di linguaggio radicali *semplici*. Poichè $\sqrt[p]{U}$ è un radicale semplice, dovrà U appartenere al campo $(C, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ e quindi, in virtù delle note espressioni dei coefficienti di un'equazione per mezzo delle sue radici (art. 916), si potrà scrivere:

$$U = f(X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}), \qquad (2)$$

rappresentando f una funzione simmetrica a coefficienti numerici delle radici $X_0, X_1, \ldots, X_n$ della (1).

Ma, per quanto si è visto al § prec. (art. 1095), potendosi ritenere che l'espressione X_0 sia già stata posta sotto la forma *ri-*

dotta, si ha anche:

$$\sqrt[p]{U} = \varphi(X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}), \tag{3}$$

dove φ è simbolo di funzione razionale. Si ha dunque confrontando con (2):

$$f(X_0, X_1, X_2, \ldots) = [\varphi(X_0, X_1, X_2, \ldots)]^p$$

e scambiando in questa identità X_0 con X_1 ed osservando che il primo membro non è alterato da tale scambio, essendo f funzione simmetrica, si deduce che:

$$[\varphi(X_0, X_1, X_2, \ldots)]^p = [\varphi(X_1, X_0, X_2, \ldots)]^p.$$

Estraendo dai due membri le radici p^{me} si vede (art. 824) che dev'essere necessariamente:

$$\varphi(X_0, X_1, X_2, \ldots) = \alpha \cdot \varphi(X_1, X_0, X_2, \ldots), \tag{4}$$

essendo α una delle radici p^{me} di 1. Ma se ora nella identità (4) eseguiamo nuovamente lo scambio fra X_0 ed X_1, viene:

$$\varphi(X_1, X_0, X_2, \ldots) = \alpha \cdot \varphi(X_0, X_1, X_2, \ldots)$$

e dal confronto di questa identità colla (4) segue evidentemente:

$$\alpha^2 = 1.$$

Ma, essendo p un numero primo, le radici p^{me} di 1, fatta eccezione da quella che ha per valore 1, sono tutte primitive (art. 831) e non possono quindi essere anche radici di 1 di indice inferiore a p. Si deve dunque avere necessariamente $p = 2$, ovvero $\alpha = 1$. Se dunque fosse $p > 2$, si avrebbe sempre $\alpha = 1$, e si vede dalla identità (4) che la funzione $\varphi(X_0, X_1, X_2, \ldots)$ resterebbe inalterata per lo scambio di due radici qualunque, cioè sarebbe una funzione simmetrica delle $X_0, X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$. Ora ciò non può essere, poichè altrimenti $\sqrt[p]{U}$ apparterrebbe evidentemente, in virtù di (3), al campo di razionalità $(C, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ e non potrebbe quindi presentarsi nella espressione già *ridotta* di X_0. Concludiamo dunque che $p = 2$, cioè:

Tutti i radicali semplici che fanno parte della espressione ridotta di qualsiasi formola rappresentante una risoluzione per radicali di qualsiasi equazione generale algebrica, di grado superiore al primo, sono necessariamente radicali quadratici.

1098. Se $\varphi(X_0, X_1, X_2, \ldots)$ è l'espressione di un radicale semplice per mezzo delle n radici di (1), scambiando fra loro due radici qualunque, p. es. X_0 ed X_1, si avrà:

$$\varphi(X_0, X_1, X_2, \ldots) = -\varphi(X_1, X_0, X_2, \ldots),$$

giacchè, per quanto si è visto all'art. prec., deve essere nella (4) $\alpha = -1$ (*).

(*) La funzione $\varphi(X_0, X_1, X_2, \ldots)$, non potendo essere simmetrica, poi-

Ciò posto, se l'espressione ridotta X_0 che risolve la (1), contenesse soltanto radicali semplici, esprimendo ognuno di questi per mezzo delle $X_0, \ldots, X_{n-1}$ ed osservando che ognuna di tali espressioni resterebbe inalterata eseguendo successivamente in essa *due trasposizioni* fra le radici (giacchè una sola trasposizione fa cambiare il segno), se ne dedurrebbe per X_0 un' espressione in funzione delle $X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}$ che resterebbe inalterata da due trasposizioni qualisivogliano fra le radici. Ora ciò è assurdo se $n > 2$, poichè la sostituzione circolare $(X_0X_1X_2)$, equivalente alle due trasposizioni (X_0X_1) ed (X_0X_2), lascierebbe inalterata tale espressione nel mentre che essa sostituzione cambia evidentemente X_0 in X_1.

La formola di risoluzione generale per radicali di un'equazione di grado superiore al secondo deve dunque contenere necessariamente un radicale *multiplo;* cioè almeno un segno radicale sottoposto ad altro segno radicale.

1099. Sia ora $\sqrt[p]{W}$ un radicale multiplo contenuto nell' espressione ridotta di X_0 e precisamente un radicale doppio. Ammetteremo cioè, come è sempre lecito, che l' espressione W contenga soltanto dei radicali semplici, e quindi quadratici; onde sarà per l'articolo prec.:

$$W = \varphi(X_0, X_1, X_2, \ldots), \tag{5}$$

essendo φ una funzione razionale che resta inalterata per ogni sostituzione circolare (X_i, X_j, X_h) fra tre qualunque delle $X_0, X_1, X_2, \ldots$ Per quanto si è dimostrato al § prec. (art. 1095), si deve anche avere:

$$\sqrt[q]{W} = \psi(X_0, X_1, X_2, \ldots), \tag{6}$$

essendo anche ψ una funzione razionale, e quindi:

$$[\psi(X_0, X_1, X_2, \ldots)]^q = \varphi(X_0, X_1, X_2, \ldots).$$

Eseguendo in questa eguaglianza, che è un'identità fra le variabili indipendenti $X_0, X_1, \ldots$, la sostituzione circolare (X_0, X_1, X_2), se ne deduce:

$$[\psi(X_1, X_2, X_0, X_3, \ldots)]^q = \varphi(X_1, X_2, X_0, X_3, \ldots).$$

Ma per la proprietà già notata della funzione (6) si ha:

$$\varphi(X_1, X_2, X_0, X_3, \ldots) = \varphi(X_0, X_1, X_2, X_3, \ldots).$$

chè altrimenti $\sqrt[p]{U}$ non dovrebbe figurare nell'espressione già ridotta di X_0, e non potendo prendere che due soli valori, fra loro uguali ma di segno opposto, deve restare inalterata per tutte quelle sostituzioni fra le $X_0, X_1, X_2 \ldots$ che equivalgono ad un numero pari di trasposizioni, e cambiare di segno per tutte le altre; e quindi, in particolare, deve cambiare di segno per ogni trasposizione fra due delle $X_0, X_1, X_2 \ldots$ (cfr. art. 588).

Si vede dunque che:

$$[\psi(X_1, X_2, X_0, X_3, \ldots)]^q = [\psi(X_0, X_1, X_2, X_3, \ldots)]^q,$$

onde, detta β una radice q^{ma} di 1:

$$\psi(X_1, X_2, X_0, X_3, \ldots) = \beta \cdot \psi(X_0, X_1, X_2, X_3, \ldots). \quad (8)$$

Eseguendo ancora due volte su questa identità la stessa sostituzione circolare (X_0, X_1, X_2), se ne deducono le seguenti:

$$\psi(X_2, X_0, X_1, X_3, \ldots) = \beta \cdot \psi(X_1, X_2, X_0, X_3, \ldots)$$

$$\psi(X_0, X_1, X_2, X_3, \ldots) = \beta \cdot \psi(X_2, X_0, X_1, X_3, \ldots)$$

che moltiplicate membro a membro fra di loro e colla precedente ci danno evidentemente:

$$\beta^3 = 1.$$

Il numero β dovrebbe dunque essere contemporaneamente radice q^{ma} e radice terza dell' unità, il che, essendo q un numero primo, è possibile soltanto quando si abbia $q = 3$, ovvero $\beta = 1$. Se $q = 3$, vediamo così che l'espressione ridotta X_0 conterrà necessariamente *almeno un radicale cubico sovrapposto a radicali quadratici semplici.*

Se q è diverso da 3, si avrà invece $\beta = 1$ e la (8) diverrà:

$$\psi(X_1, X_2, X_0, X_3, \ldots) = \psi(X_0, X_1, X_2, X_3, \ldots).$$

E poichè nulla ci avrebbe impedito di eseguire invece della sostituzione circolare $(X_0 X_1 X_2)$ un' altra sostituzione circolare qualunque $(X_i X_j X_h)$ fra le $X_0, X_1, X_2, \ldots$, si avrà generalmente:

$$\psi(\ldots, X_i, \ldots, X_j, \ldots, X_h, \ldots) = \psi(\ldots, X_j, \ldots, X_h, \ldots, X_i, \ldots),$$

cioè *la funzione ψ resterà inalterata per qualsivoglia sostituzione circolare* (X_i, X_j, X_h).

1100. Se $n > 2$, l'espressione ridotta X_0 non potrebbe però contenere, oltre i radicali semplici, soltanto radicali doppi che godano di quest'ultima proprietà, cioè di essere esprimibili mediante una funzione razionale $\psi(X_0, X_1, X_2, \ldots)$ inalterabile da tutte le sostituzioni circolari (X_i, X_j, X_h), precisamente per lo stesso motivo addotto all'art. 1098, poichè allora la X_0 si esprimerebbe evidentemente mediante una funzione razionale $\Psi(X_0, X_1, X_2, \ldots)$ dotata di tale proprietà. Se dunque tutti i radicali doppi si trovassero nel caso ora considerato, l' espressione ridotta X_0 dovrebbe contenere almeno un radicale triplo $\sqrt[q']{W'}$ sul quale si ripeterebbe lo stesso ragionamento dell'articolo precedente, giacchè W' sarebbe esprimibile mediante una funzione razionale inalterabile dalle sostituzioni circolari (X_i, X_j, X_h) proprio come la (6). Si avrà dunque almeno per un radicale triplo $q' = 3$, a meno che tutti i radicali tripli fossero esprimibili con funzioni razionali delle X_0, $X_1, X_2 \ldots$ inalterabili dalle (X_i, X_j, X_h) nel qual caso dovrà esistere almeno un radicale quadruplo, su cui si ragionerebbe di

nuovo allo stesso modo. Così procedendo si giungerà evidentemente ad un radicale di indice precisamente uguale a 3. Concludiamo dunque che: *ogni formola di risoluzione per radicali di un'equazione generale di grado superiore al 2° deve contenere necessariamente almeno un radicale cubico.*

Infatti, se una siffatta formola non contenesse alcun radicale cubico, è chiaro che non ne potrebbe contenere neanche la sua forma *ridotta* contrariamente a quanto si è trovato.

Note.

1. Sia ancora:

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

l'equazione generale di grado $n > 2$, colla sola restrizione che le sue radici $X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}$ siano tutte reali; e supponiamo, se è possibile, che essa sia risoluta da un'espressione radicale tale che ciascuno dei radicali in essa contenuti possa avere un significato reale.

Ove quest'espressione non fosse già *ridotta*, la si ridurrà nel modo spiegato al § 3°, con che si sarà sostituita ad essa un'altra espressione radicale che godrà delle stesse proprietà, poichè la riduzione da noi indicata non fa che eliminare certi radicali senza mai introdurne dei nuovi.

Secondo quanto si è concluso all'art. 1100, l'espressione così ridotta dovrà contenere almeno un radicale cubico:

$$\sqrt[3]{\varphi(X_0, X_1, X_2, \ldots)} = f(X_0, X_1, X_2, \ldots)$$

per il quale la quantità sotto il segno radicale si possa esprimere come una funzione razionale $\varphi(X_0, X_1, X_2, \ldots)$ che resta inalterata per qualsiasi sostituzione circolare $(X_i X_j X_h)$ fra le variabili reali X_i, X_j, X_h; nel mentre che il radicale stesso si può esprimere come una cert'altra funzione razionale $f(X_0, X_1, \ldots)$ delle stesse $X_0, X_1, \ldots$ che è alterata almeno da qualcuna delle $(X_i X_j X_h)$.

Ci proponiamo di dimostrare che ciò è incompatibile coll'ipotesi da noi fatta che la funzione $\varphi(X_0, X_1, \ldots)$ abbia valore reale per tutti i valori reali delle variabili $X_0, X_1, \ldots$; o, più generalmente, che: *se $\varphi(X_0, X_1, \ldots)$ è una funzione razionale a coefficienti reali delle variabili $X_0, X_1, \ldots$ che resta inalterata per le sostituzioni circolari $(X_i X_j X_h)$, non può esistere una funzione razionale $f(X_0, X_1, \ldots)$ delle stesse variabili, che sia alterata almeno da qualcuna delle $(X_i X_j X_h)$, per la quale si abbia identicamente:*

$$\varphi(X_0, X_1, \ldots) = [f(X_0, X_1, \ldots)]^3.$$

Sia infatti, se è possibile:

$$f(X_0, X_1, \ldots) = \psi(X_0, X_1, \ldots) + i \cdot \chi(X_0, X_1, \ldots)$$

una siffatta funzione decomposta nella sua parte reale e nella sua parte imaginaria. Poichè:

$$\varphi = (\psi + i\chi)^3 = (\psi^3 - 3\psi\chi^2) + i(3\psi^2\chi - \chi^3),$$

dovrà essere identicamente:

$$\varphi = \psi(\psi^2 - 3\chi^2) \qquad , \qquad \chi(3\psi^2 - \chi^2) = 0,$$

cosicchè si avrà anche necessariamente:

$$\varphi = \psi^3, \quad \text{oppure:} \quad \varphi = -8\psi^3.$$

In entrambi i casi, indicando con S una di quelle sostituzioni $(X_i X_j X_h)$ che alterano ψ, si dedurrà di qui (poichè S non altera φ):

$$[S\psi]^3 = \psi^3,$$

d'onde, poichè $S\psi$ non può coincidere con ψ:

$$S\psi = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\psi,$$

risultato assurdo, poichè $S\psi$ ha, al pari di ψ, valore reale.

2. Dopo quanto si è ora dimostrato, si trova stabilita in modo assolutamente rigoroso l'impossibilità di togliere, per via algebrica, il *caso irreducibile*, che si presenta, come si è notato (art. 1055), nella risoluzione generale dell'equazione del terzo grado, quando le sue radici sono tutte reali. Si veggano a questo proposito i lavori seguenti:

V. Mollame — Sul CASUS IRREDUCIBILIS *dell'equazione cubica* (Rendiconto dell'Accademia delle Scienze di Napoli, giugno 1890).

A. Capelli — Relazione sulla Nota del prof. V. Mollame. (Ibid.).

O. Hölder — Ueber den Casus irreducibilis bei der Geichung dritten Grades. (Math. Annalen, XXXVIII, 1891).

A. Kneser — Bemerkungen über den sogenannten casus irreducibilis bei cubischen Gleichungen. (Math. Annalen, XLI, 1892).

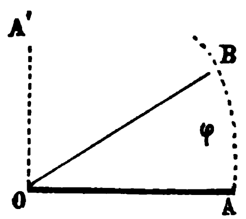
L. Gegenbauer — Zur Theorie der algebraischen Gleichungen. (Monatshefte für Math. und Physik, 1893).

I lavori qui citati di Mollame e di Capelli (il quale ha rettificato e completato in un punto essenziale la dimostrazione di Mollame) sono già sufficienti a stabilire, in modo del tutto soddisfacente, l'impossibilità di evitare il caso irreducibile. La dimostrazione è sostanzialmente quella data nella precedente Nota.

3. Si dimostri che nella forma ridotta di qualsiasi espressione radicale, rappresentante una risoluzione per radicali di un'equazione algebrica generale, il primo segno radicale sovrapposto ad un radicale quadratico semplice è necessariamente cubico.

§ 5.° — Impossibilità di trisecare un angolo qualunque col solo uso della riga e del compasso.

1101. Sia AOB un angolo *arbitrario* dato. Supponiamo, se è possibile, che si possa costruire un angolo uguale alla sua terza parte mediante un numero finito di operazioni geometriche delle seguenti tre specie:



1°) tirare la retta che congiunge due punti già ben determinati, ovvero due punti presi ad arbitrio, ovvero un punto già ben determinato ed un altro punto assunto ad arbitrio;

2°) descrivere il cerchio che ha per centro un punto qualunque (già ben determinato o scelto ad arbitrio) e per raggio un raggio qualunque (uguale ad un segmento già costruito, ovvero un raggio arbitrario);

3°) segnare i punti di intersezione di rette e di cerchi già costruiti; ovvero assumere dei punti ad arbitrio.

1102. Imaginiamo di interpretare questa costruzione geometrica mediante i noti principii della geometria analitica del piano, assumendo il punto O come origine delle coordinate, la retta OA come *asse delle* x, la retta OA' perpendicolare ad OA come *asse delle* y ed un segmento fissato a piacere, p. es. il segmento OA, come *unità di misura*.

Il numero dei punti che figurano nella costruzione dovendo essere finito, a maggior ragione dovrà essere finito il numero dei punti che durante la costruzione si assumono ad arbitrio. Per questi ultimi, essendo le loro ascisse e ordinate affatto arbitrarie, ci è lecito evidentemente di ritenere che le loro ascisse ed ordinate siano espresse da numeri *razionali* (o in altri termini che le loro distanze dai due assi OA ed OA' siano *commensurabili* col segmento OA scelto come unità di misura). Lo stesso dicasi dei raggi di cerchi che si dovessero prendere ad arbitrio: supporremo sempre che si scelgano, per siffatti raggi, dei segmenti misurati da numeri razionali.

Potrebbe però anche darsi il caso che alcuni dei detti punti non si potessero scegliere del tutto ad arbitrio, ma bensì che si potessero prendere ad arbitrio sopra una delle rette o uno dei cerchi già costruiti. In tal caso, se P sia il punto da prendersi ad arbitrio sopra una certa linea e P' sia il piede della perpendicolare abbassata da P sull'asse delle x, noi potremo prendere ad arbitrio il punto P' sull'asse delle x, dopodichè il punto P resterà determinato elevando da P' la perpendicolare all'asse delle x e trovandone l'incontro con la data linea, cioè mediante un'operazione geometrica che si può ricondurre, come è ben noto, a quelle definite all'art. precedente. Ci è dunque lecito di ritenere che per quei punti che non si possono prendere del tutto ad arbitrio, ma soltanto si possono prendere ad arbitrio sopra una linea data, questa linea sia precisamente l'asse delle x. E per conseguenza potremo ritenere che anche questi punti abbiano coordinate razionali; giacchè la loro ordinata avrà il valore zero e per l'ascissa, che è arbitraria, si potrà sempre assumere un numero razionale.

1103. Ciò premesso, sia φ la misura dell'angolo dato (cioè il numero che misura la lunghezza dell'arco AB della figura prendendo per unità di misura il segmento OA). La figura data, che forma il punto di partenza della costruzione geometrica, si compone della retta OA la cui equazione è: $x = 0$, della retta OB la cui equazione è:

$$y = x \cdot \operatorname{tg}\varphi \tag{1}$$

e del punto O le cui coordinate sono razionali ($x = 0$, $y = 0$). Possiamo aggiungere il punto A le cui coordinate sono pure razionali ($x = 1$, $y = 0$) ed il punto B le cui coordinate sono:

$$\left.\begin{aligned} x &= \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}} \\ y &= \sin\varphi = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}} . \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Queste coordinate non sono, generalmente parlando, numeri razionali, ma si ottengono, come si vede dalle (2), operando su numeri razionali e sul numero fisso $\operatorname{tg}\varphi$ colle quattro operazioni fondamentali e colla estrazione di radice quadrata.

Ciò posto noi incominceremo dal dimostrare che le coordinate di uno qualunque dei punti determinati mediante la costruzione geometrica presupposta all'art. 1101 sono numeri di questa stessa specie, o, come diremo per brevità di linguaggio, *numeri euclidei*. Designeremo, cioè, col nome di numeri euclidei (*rispetto al numero fisso dato* $tg\varphi$) tutti quei numeri che si possono ottenere operando sui numeri razionali e su $\operatorname{tg}\varphi$ colle quattro operazioni razionali e coll'operazione di estrazione di radice quadrata (la quale potrà anche ripetersi un numero qualunque di volte, purchè finito). Al tempo stesso noi dimostreremo che, se

$$ax + by + c = 0 \tag{3}$$

è l'equazione di una qualunque delle rette ed

$$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \tag{4}$$

l'equazione di uno qualunque dei cerchi descritti nella detta costruzione geometrica, tutti i coefficienti $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ sono del pari numeri euclidei della stessa specie sopra definita.

1104. Invero la presupposta costruzione geometrica si compone di un numero finito di operazioni geometriche che appartengono all'uno od all'altro dei tre tipi caratterizzati all'art. 1101. Potremo dunque ammettere come già dimostrato che le prime k operazioni geometriche abbiano condotto alla costruzione di punti, rette e cerchi le cui coordinate, od i coefficienti delle cui equazioni, siano tutti numeri euclidei; e basterà dimostrare che la $(k+1)^{\text{ma}}$ operazione geometrica determinerà un nuovo punto, ovvero una nuova retta od un nuovo cerchio con coordinate, o coefficienti, del pari euclidei. Con ciò resterà evidentemente dimostrato l'asserto, poichè la figura che forma il punto di partenza della costruzione, si compone appunto, come si è notato all'art. precedente, di rette e punti con coefficienti euclidei.

Si tratta dunque di dimostrare in corrispondenza alle tre operazioni geometriche designate all'art. 1101:

1°) che la retta congiungente due punti $(a\,, b)$ ed $(a'\,, b')$ le cui coordinate $a\,, b\,, a'\,, b'$, sono numeri euclidei, ha per coefficienti dei numeri euclidei. Ed infatti l'equazione di questa retta è

$$(b - b')x + (a' - a)y + (ab' - a'b) = 0\,;$$

2°) che, se la $(k+1)^{\text{ma}}$ operazione consiste nella descrizione di un cerchio, i coefficienti dell'equazione di tale cerchio saranno numeri euclidei. Infatti, poichè il centro del cerchio è un punto già precedentemente costruito (od assunto ad arbitrio), le sue coordinate $(a\,, b)$ sono per supposto numeri razionali od euclidei. Quanto al raggio del cerchio, se esso non è arbitrario, sarà un segmento già costruito, cioè la distanza fra due punti $(a'\,, b')$ ed $(a''\,, b'')$ già costruiti. Tale distanza, essendo data da $\sqrt{(a'-a'')^2 + (b'-b'')^2}$,

sarà evidentemente un numero euclideo, giacchè lo sono per ipotesi i numeri a', a'', b', b''.

Ciò posto, il cerchio avrà per equazione:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=(a'-a'')^2+(b'-b'')^2$$

ed i coefficienti di questa equazione saranno evidentemente numeri euclidei.

3°) che i punti di intersezione di due linee (rette o cerchi), le cui equazioni hanno per coefficienti dei numeri euclidei, hanno per coordinate dei numeri euclidei.

Invero nel caso di due rette:

$$ax+by+c=0 \quad , \quad a'x+b'y+c'=0\,,$$

le coordinate del punto d'intersezione sono:

$$x=\frac{bc'-cb'}{ab'-ba'} \quad , \quad y=\frac{ca'-ac'}{ab'-ba'}.$$

Nel caso di una retta:

$$ax+by+c=0$$

e di un cerchio:

$$x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0,$$

sostituendo nella seconda equazione il valore di y ricavato dalla prima si ha per determinare x l'equazione di 2° grado:

$$(a^2+b^2)x^2+(\alpha b^2+2ca-b\beta a)x+(c^2+b^2\gamma-b\beta c)=0,$$

onde l'ordinata x si troverà mediante un'estrazione di radice quadrata applicata ai cofficienti di questa equazione che sono già numeri euclidei; similmente per l'ordinata y.

Finalmente il caso di due cerchi:

$$x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0$$
$$x^2+y^2+\alpha' x+\beta' y+\gamma'=0$$

si riconduce al precedente, poichè, sottraendo l'una dall'altra queste due equazioni, si ottiene:

$$(\alpha-\alpha')x+(\beta-\beta')y+(\gamma-\gamma')=0$$

e questa è l'equazione di una retta; onde basterà trovarne l'intersezione con uno dei due cerchi.

Resta così dimostrato quanto si era asserito all'art. 1103.

1105. Fra le rette determinate nella costruzione geometrica ne esistono, per ipotesi, due che formano un angolo eguale alla terza parte di φ. Siano:

$$ax+by+c=0 \quad , \quad a'x+b'y+c'=0$$

le loro equazioni. Ricordando la nota espressione che dà la geometria analitica per l'angolo di due rette, si potrà dunque scri-

vere:

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{3}=\frac{ab'-ba'}{aa'+bb'}.$$

Ma per la dimostrazione degli articoli precedenti i numeri a, a', b, b' sono tutti euclidei. Vediamo dunque che: *se è possibile trisecare un angolo arbitrario col solo uso della riga e del compasso, deve esistere un'espressione di* $tg\frac{\varphi}{3}$ *ottenuta operando sul numero* $tg\varphi$ *con le quattro operazioni fondamentali e con un certo numero di estrazioni di radice quadrata; e tale espressione deve essere valida qualunque sia il valore di* φ.

1106. Si sa dalla trigonometria che:

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{3}\right)^3-3\operatorname{tg}\frac{\varphi}{3}}{3\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{3}\right)^2-1},$$

onde, se poniamo brevemente:

$$\operatorname{tg}\varphi=\alpha \quad , \quad \operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{3}\right)=x,$$

si ha la relazione:

$$x^3-3\alpha x^2-3x+\alpha=0, \tag{5}$$

ed il teorema dell'art. precedente si può anche enunciare così: *se fosse possibile trisecare un angolo qualunque colla riga e col compasso, sarebbe anche possibile di risolvere l'equazione cubica* (5), *in cui* α *è un parametro arbitrario, per mezzo di soli radicali quadratici* (*).

Se ora nella (5) si fa la trasformazione:

$$x=y+\alpha,$$

essa si cambia in

$$(y+\alpha)^3-3\alpha(y+\alpha)^2-3(y+\alpha)+\alpha=0$$

ossia in

$$y^3-3(1+\alpha^2)y-2\alpha(1+\alpha^2)=0, \tag{5'}$$

epperò: *anche l'equazione cubica* (5)' *godrebbe della proprietà di essere risolubile per mezzo di soli radicali quadratici.*

1107. Consideriamo ora l'equazione *generale* del 3° grado mancante, come è sempre lecito di ammettere (art. 1040) del secondo termine:

$$x^3+qx+r=0, \tag{6}$$

essendo q ed r affatto arbitrari. Ponendo $y=\lambda x$ essa si trasfor-

---

(*) Questa soluzione dovrebbe essere valida per tutti i valori reali di α, e quindi, evidentemente, lo sarebbe anche per tutti i valori complessi.

ma in

$$y^3 + q\lambda^2 y + \lambda r^3 = 0$$

che si potrà sempre identificare con la (5)′ determinando λ ed α in modo da avere:

$$q\lambda^2 = -3(1+\alpha^2) \quad , \quad r\lambda^3 = -2\alpha(1+\alpha^2). \tag{7}$$

Di quì si deduce infatti dividendo membro a membro:

$$\lambda = \frac{2q}{3r}\alpha \tag{8}$$

e sostituendo questo valore di λ nella prima delle due equazioni (7):

$$\frac{4}{27}\frac{q^3}{r^2}\alpha^2 = -(1+\alpha^2),$$

d' onde si ricava:

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{2}{r}\sqrt{-\frac{r^2}{4} - \frac{q^3}{27}} \tag{9}$$

e quindi per la (8 :

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{3r}{2q}\cdot\frac{1}{\alpha} = \frac{3}{q}\sqrt{-\frac{r^2}{4} - \frac{q^3}{27}}. \tag{10}$$

Troviamo dunque che l' equazione (6) si trasforma in (5)′ ponendo:

$$x = \frac{3y}{q}\sqrt{-\frac{r^2}{4} - \frac{q^3}{27}}. \tag{11}$$

Sostituendo in questa espressione di x, in luogo di y, il suo valore ricavato dalla (5)′, la quale secondo la ipotesi è risolubile per mezzo di soli radicali quadratici, e dipoi in luogo di α la sua espressione (9), si otterrà per x una espressione composta coi coefficienti q ed r sui quali si sarà operato colle sole quattro operazioni fondamentali e con estrazioni di radici quadrate. Vediamo dunque che *se fosse possibile trisecare un angolo qualunque col solo uso della riga e del compasso, sarebbe anche possibile di risolvere l'equazione generale del terzo grado per mezzo di soli radicali quadratici.* Ma ciò sarebbe in contraddizione con quanto si è già stabilito nel § precedente (art. 1100). Si conclude dunque che:

Il problema di trisecare un angolo qualunque non si può risolvere col solo uso della riga e del compasso adoperati nel consueto senso euclideo.

Note ed Esercizi.

1. Per trasformare l' equazione generale:

$$x^3 + qx + r = 0 \tag{a}$$

nell' equazione:

$$z^3 - 3\alpha z^2 - 3z + \alpha = 0 \tag{b}$$

che si risolve ponendo $\alpha = \text{tg}\varphi$ e prendendo quindi $z = \frac{\varphi}{3}$, basta porre, per quanto si è visto negli ultimi due articoli:

$$x = \frac{3r}{q}\left(\frac{z}{\alpha} - 1\right), \quad \frac{1}{\alpha} = \frac{2}{r}\sqrt{-\frac{r^2}{4} - \frac{q^3}{27}}$$

Dunque: la risoluzione dell'equazione del terzo grado (a) si può ricondurre $\left(\text{nel caso di } \frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27} < 0\right)$ al problema di trisecare un certo angolo ponendo:

$$\frac{2}{r}\sqrt{-\frac{r^2}{4} - \frac{q^3}{27}} = \cot\varphi \qquad (c)$$

e prendendo quindi:

$$x = \frac{3r}{q}\left(\cot\varphi \cdot \text{tg}\frac{\varphi}{3} - 1\right). \qquad (d)$$

2. Trasformare l'equazione del terzo grado:

$$x^3 + qx + r = 0$$

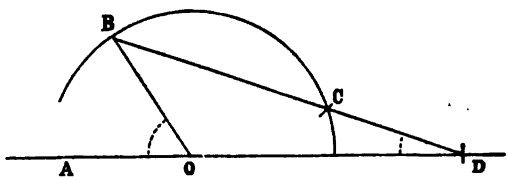
nell'equazione:

$$4y^3 - 3y + \sin\varphi = 0$$

che ha per radice $y = \sin\frac{\varphi}{3}$.

3. Mostrare come l'iscrizione in un cerchio del poligono regolare di sette lati si possa eseguire col solo uso della riga e del compasso purchè si supponga conosciuta la terza parte di un certo angolo. Si dimostrerà ciò facendo dipendere il problema dalla risoluzione di un'equazione del terzo grado (Cfr. Cap. XIV, § 4°, Note) e questa dalla trisezione di un certo angolo.

4. Per trisecare un angolo dato AOB basta condurre per B una retta BD



in modo che la porzione CD di essa intercetta fra il cerchio di centro O e di raggio OB ed il lato AO prolungato sia eguale ad OB. L'angolo ADB sarà la terza parte di AOB.

§ 6.° — Impossibilità di risolvere per mezzo di radicali le equazioni generali di grado superiore al quarto.

1108. Questo teorema, enunciato per la prima volta da *Ruffini*, è stato dimostrato in modo più rigoroso da *Abel* mediante i risultati da noi già esposti nei §§ 3° e 4° di questo capitolo.

Ammettiamo, se è possibile, che l'equazione *generale*:

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

in cui $n > 4$, sia risolubile per radicali.

Detta X_0 l'espressione radicale che la risolve, che si supporrà, come è lecito, già *ridotta*, segue da quanto si è stabilito nel § 4°, che in X_0 dovrà essere contenuto almeno un radicale cubico $\sqrt[3]{W}$, essendo:

$$W = \varphi(X_0, X_1, X_2, X_3, X_4, \ldots), \tag{1}$$

una funzione razionale che resta inalterata per ogni sostituzione equivalente ad un numero pari di trasposizioni e quindi in particolare dalla sostituzione circolare $(X_0, X_1, X_2, X_3, X_4)$ fra le cinque lettere $X_0, \ldots, X_4$. Si avrà poi (art. 1095):

$$\sqrt[3]{W} = \psi(X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}), \tag{2}$$

essendo ψ una certa funzione razionale.

Dalle (1) e (2) segue, precisamente come all'art. 1099:

$$[\psi(X_0, X_1, \ldots)]^3 = \varphi(X_0, X_1, \ldots) \tag{3}$$

ed eseguendo in questa identità la sostituzione circolare $(X_0, X_1, X_2, X_3, X_4)$ che non altera, come si è notato, il secondo membro:

$$[\psi(X_1, X_2, X_3, X_4, X_0, \ldots)]^3 = [\psi(X_0, X_1, X_2, X_3, X_4, \ldots)]^3.$$

Di qui si deduce, essendo α una radice cubica di 1:

$$\psi(X_1, X_2, X_3, X_4, X_0, \ldots) = \alpha\psi(X_0, X_1, X_2, X_3, X_4, \ldots)$$

ed eseguendo su questa identità, analogamente a quanto si è fatto all'art. 1099, ancora quattro volte di seguito la stessa sostituzione circolare $(X_0, X_1, X_2, X_3, X_4)$ e moltiplicando quindi membro a membro i risultati:

$$1 = \alpha^5 = \alpha^3 \cdot \alpha^2 = \alpha^2.$$

Poichè $\alpha^3 = \alpha^2 = 1$, sarà dunque necessariamente $\alpha = 1$, cioè: la funzione $\psi(X_0, X_1, \ldots, X_{n-1})$ non è alterata da qualsivoglia sostituzione circolare fra cinque delle variabili $X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}$.

1109. Ci proponiamo ora di dedurre di qui che la funzione $\psi(X_0, X_1, \ldots, X_{n-1})$ non sarà neanche alterata da una qualunque delle sostituzioni circolari fra tre delle stesse $X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}$.

Consideriamo ad esempio la sostituzione circolare $(X_0X_1X_2)$ che indicheremo per brevità con T.

Indicando con $T \cdot \psi$ la funzione che si ottiene eseguendo su ψ la sostituzione T, si avrà primieramente dalla (3), poichè φ non è alterata dalle sostituzioni circolari di tre lettere:

$$T \cdot \psi = \gamma \cdot \psi, \tag{4}$$

essendo γ una certa radice cubica dell'unità.

Considerando inoltre le due sostituzioni circolari:

$$T' = (X_0X_2X_1) \quad , \quad T_1 = (X_0X_3X_4),$$

si avrà similmente:

$$T'\psi = \gamma'\psi \quad , \quad T_1\psi = \gamma_1\psi, \tag{5}$$

essendo anche γ' e γ_1 radici cubiche di 1.

Dalle (4) e (5) segue (cfr. art. 229):

$$[TT_1]\psi = \gamma\gamma_1\psi \quad , \quad [T'T_1]\psi = \gamma'\gamma_1\psi \quad , \quad [TT']\psi = \gamma\gamma'\psi. \qquad (6)$$

D' altra parte, poichè:

$$TT_1 = (X_0X_1X_2)(X_0X_3X_4) = (X_0X_1X_2X_3X_4)$$
$$T'T_1 = (X_0X_2X_1)(X_0X_3X_4) = (X_0X_2X_1X_3X_4)$$
$$TT' = (X_0X_1X_2)(X_0X_2X_1) = (X_0)(X_1)(X_2) = 1$$

e le sostituzioni circolari fra cinque lettere X non alterano ψ, si ha anche:

$$[TT_1]\psi = \psi \quad , \quad [T'T_1]\psi = \psi \quad , \quad [TT']\psi = \psi. \qquad (7)$$

Dal confronto delle (6) e delle (7) segue ora evidentemente:

$$\gamma\gamma_1 = 1 \quad , \quad \gamma'\gamma_1 = 1 \quad , \quad \gamma\gamma' = 1 ,$$

d' onde:

$$\gamma = \gamma' = \gamma_1 = \pm 1$$

e più precisamente, poichè le γ, γ', γ_1 sono radici cubiche di 1

$$\gamma = \gamma' = \gamma_1 = 1.$$

La (4) ci dà dunque $T \cdot \psi \underset{3}{=} \psi$, come si doveva dimostrare.

1110. L'espressione (2) di $\sqrt[3]{W}$ in funzione razionale delle X_0, X_1, ... deve dunque godere, come l'espressione di W, della proprietà di non essere alterata da qualsiasi sostituzione circolare fra tre delle X_0, X_1, ...

Ma, per quanto si è già dimostrato al § 4° (art. 1100), ci è sempre lecito di ritenere che $\sqrt[3]{W}$ non goda di questa proprietà. Giungiamo dunque ad una contraddizione che ha la sua origine nell'aver supposto che l'equazione generale con più di quattro radici fosse risolubile per radicali.

Resta così dimostrata in modo assolutamente rigoroso l'impossibilità di una cosiffatta forma di risoluzione (*).

(*) Si deve ai lavori di *Hermite, Kronecker* e *Brioschi* la risoluzione generale delle equazioni del 5° grado per mezzo delle trascendenti ellittiche.

CAPITOLO XVI.

TRASFORMAZIONE LINEARE DELLE FORME ALGEBRICHE. INVARIANTI E COVARIANTI.

§ 1.° — Della trasformazione lineare di un sistema di variabili.

1111. Se fra $n-1$ variabili indipendenti $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$ ed altre $n-1$ variabili $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}$ si pongano delle relazioni della forma:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \frac{\alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2 + \ldots + \alpha_{n-1}\xi_{n-1} + \alpha_n}{\lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2 + \ldots + \lambda_{n-1}\xi_{n-1} + \lambda_n} \\ \eta_2 &= \frac{\beta_1\xi_1 + \beta_2\xi_2 + \ldots + \beta_{n-1}\xi_{n-1} + \beta_n}{\lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2 + \ldots + \lambda_{n-1}\xi_{n-1} + \lambda_n} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \eta_{n-1} &= \frac{\delta_1\xi_1 + \delta_2\xi_2 + \ldots + \delta_{n-1}\xi_{n-1} + \delta_n}{\lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2 + \ldots + \lambda_{n-1}\xi_{n-1} + \lambda_n}, \end{aligned} \qquad (1)$$

in cui le $\alpha, \beta, \ldots, \delta, \lambda$ sono coefficienti *costanti*, si dice che mediante queste formole il sistema di variabili $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$ si trasforma *linearmente* nel sistema $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}$. È chiaro che, mediante queste relazioni, dati ad arbitrio i valori delle $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$, resteranno in generale determinati in modo unico i corrispondenti valori delle $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}$ e reciprocamente, dovendosi a quest'uopo risolvere un sistema di $n-1$ equazioni di primo grado fra $n-1$ incognite.

1112. Oltre alla *univocità* della corrispondenza fra i sistemi $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$ ed $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}$, la trasformazione (1) ha anche questo di caratteristico; che *se alle variabili* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$ *si imponga un legame espresso da una relazione lineare, come*

$$A_1\xi_1 + A_2\xi_2 + \ldots + A_{n-1}\xi_{n-1} + A_n = 0,$$

ne conseguirà fra le corrispondenti $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}$ *un legame della stessa natura, p. es.*:

$$B_1\eta_1 + B_2\eta_2 + \ldots + B_{n-1}\eta_{n-1} + B_n = 0$$

e reciprocamente. Questa proprietà è una conseguenza del fatto che le frazioni nei secondi membri di (1) hanno lo *stesso denominatore*, nè avrebbe più luogo quando si prendessero denominatori differenti. Più generalmente, segue dalle (1) che *ad ogni legame algebrico imposto alle ξ corrisponderà un legame algebrico dello stesso grado e reciprocamente per le η*. In altri termini, se si ponga fra le ξ la relazione:

$$f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}) = 0,$$

dove f è una funzione intera del grado complessivo m nei suoi argomenti, ne conseguirà per le η una relazione:

$$F(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}) = 0,$$

dove F è una funzione intera, dello stesso grado m, delle η e reciprocamente.

Si scrivano infatti le (1) brevemente così:

$$\eta_1 = \frac{X_1}{X_n}, \quad \eta_2 = \frac{X_2}{X_n}, \ldots, \eta_{n-1} = \frac{X_{n-1}}{X_n},$$

essendo le X funzioni lineari delle ξ. Posta fra le η una relazione algebrica di grado m:

$$\sum B_i \cdot \eta_1^{\mu_1} \eta_2^{\mu_2} \ldots \eta_{n-1}^{\mu_{n-1}} = 0,$$

ne seguirà fra le ξ la relazione:

$$\sum B \frac{X_1^{\mu_1} X_2^{\mu_2} \ldots X_{n-1}^{\mu_{n-1}}}{X_n^{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_{n-1}}} = 0$$

e moltiplicando per X_n^m:

$$\sum B_i X_1^{\mu_1} X_2^{\mu_2} \ldots X_{n-1}^{\mu_{n-1}} X_n^{\mu_n} = 0,$$

posto: $\mu_n = m - (\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_{n-1})$. Ora quest'ultima relazione fra le ξ è evidentemente di grado m.

La verità della proposizione reciproca segue dal fatto che le equazioni (1) risolute rispetto alle $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$ si presentano sotto forma affatto analoga a quella delle (1).

Risolvendo infatti le (1) col solito metodo dei determinanti, si trova come denominatore comune a tutte le incognite il determinante:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 - \lambda_1\eta_1 & \alpha_2 - \lambda_2\eta_1 & \ldots & \alpha_{n-1} - \lambda_{n-1}\eta_1 \\ \beta_1 - \lambda_1\eta_2 & \beta_2 - \lambda_2\eta_2 & \ldots & \beta_{n-1} - \lambda_{n-1}\eta_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \delta_1 - \lambda_1\eta_{n-1} & \delta_2 - \lambda_2\eta_{n-1} & \ldots & \delta_{n-1} - \lambda_{n-1}\eta_{n-1} \end{vmatrix} \qquad (2)$$

che decomposto in una somma di più determinanti, secondo il teo-

rema dell'art. 418, si riduce evidentemente ad una funzione lineare delle $\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}$. Lo stesso dicasi dei numeratori, che si deducono dal determinante (2) sostituendo ad una colonna quella formata dagli elementi:

$$-\alpha_n + \lambda_n \eta_1 \;,\; -\beta_n + \lambda_n \eta_2 \;, \ldots ,\; -\delta_n + \lambda_n \eta_{n-1}.$$

Del resto, che le (1) si possano *invertire* conservando una forma del tutto analoga, apparirà in modo affatto intuitivo dalle altre considerazioni che ora seguono.

1113. Se le variabili primitive e trasformate si pongano, come è sempre lecito, sotto la forma seguente:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{x_1}{x_n} \,,\; \xi_2 = \frac{x_2}{x_n} \,, \ldots ,\; \xi_{n-1} = \frac{x_{n-1}}{x_n} \,, \\ \eta_1 &= \frac{y_1}{y_n} \,,\; \eta_2 = \frac{y_2}{y_n} \,, \ldots ,\; \eta_{n-1} = \frac{y_{n-1}}{y_n} \,, \end{aligned} \tag{3}$$

sostituendo queste espressioni nelle formole (1) e moltiplicando quindi nelle frazioni dei secondi membri numeratore e denominatore per x_n, le dette formole divengono:

$$\begin{aligned} \frac{y_1}{y_n} &= \frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n}{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n} \\ \frac{y_2}{y_n} &= \frac{\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_n x_n}{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{y_{n-1}}{y_n} &= \frac{\delta_1 x_1 + \delta_2 x_2 + \ldots + \delta_n x_n}{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n} \,, \end{aligned} \tag{1)'$$

onde, detto ρ un certo *coefficiente di proporzionalità*, si dovrà avere:

$$\begin{aligned} \rho y_1 &= \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n \\ \rho y_2 &= \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_n x_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \rho y_n &= \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n . \end{aligned} \tag{1)''$$

Queste formole fanno corrispondere in generale ad ogni sistema di rapporti $x_1 : x_2 : \ldots : x_n$ un unico sistema di rapporti $y_1 : y_2 : \ldots : y_n$ e reciprocamente; e questa corrispondenza *fra i rapporti* è evidentemente indipendente dal valore di ρ. Pertanto assumendo per semplicità $\rho = 1$, si potrà surrogare al sistema delle (1) il sistema equivalente:

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n \\ y_2 &= \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_n x_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n \end{aligned} \tag{1)'''$$

il quale ad ogni sistema di valori finiti delle $x_1, x_2, \dots, x_n$ fa corrispondere un unico sistema di valori finiti delle $y_1, y_2, \dots, y_n$ e reciprocamente, semprechè il determinante del sistema sia diverso da zero. Dunque:

***La trasformazione lineare* (1) *è invertibile univocamente*, *cioè ad ogni sistema di valori delle* $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-1}$ *fa corrispondere un unico sistema per le* $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}$, *semprechè sia diverso da zero il determinante*:**

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \dots \alpha_n \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \delta_1 & \delta_2 \dots \delta_n \\ \lambda_1 & \lambda_2 \dots \lambda_n \end{vmatrix} \tag{4}$$

formato coi coefficienti dei numeratori e del comun denominatore.

1114. Le formole (1)‴ ci danno la così detta ***sostituzione lineare omogenea*** (cfr. Cap. V, § 9°), equivalente alla ***trasformazione lineare*** (1). Il determinante (4) si dice (art. 472) il ***modulo*** della sostituzione lineare.

Nel porre le (3) si è supposto implicitamente che il valore di x_n, da prendersi ad arbitrio, non si dovesse però assumere uguale a zero. Invece nelle formole (1)‴ nulla ci impedisce di supporre $x_n = 0$ prendendo al tempo stesso per $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ altri valori finiti qualisivogliano; poichè a questo sistema di valori delle x corrisponderà sempre un unico sistema di valori finiti delle y, e quindi, in generale, in virtù delle (3) un sistema di valori finiti e determinati delle $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-1}$.

È chiaro che questo sistema delle $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-1}$ si dovrà dunque considerare come il corrispondente di quel sistema di valori cui tendono le $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}$, quando nelle (3) si faccia tendere x_n al valore zero e le $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ a certi valori finiti ben determinati. In tal caso le $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}$ tenderanno *in generale* a valori *infinitamente grandi*, nel mentre che i loro rapporti tenderanno, pure in generale, a limiti finiti ben determinati.

Di quì appare manifesta la convenienza di applicare le formole della trasformazione lineare (1) non solamente a sistemi di valori finiti delle ξ e delle η, ma anche a sistemi in cui le ξ o le η siano o tutte od in parte infinite.

Effettivamente si vede già dalle (1) che per tutti quei sistemi di valori finiti delle ξ per i quali:

$$\lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2 + \dots + \lambda_{n-1}\xi_{n-1} + \lambda_n = 0, \tag{5}$$

le corrispondenti η prendono forma infinita o indeterminata. Il teorema dell'art. 1113 sulla univocità della corrispondenza stabilita fra le ξ e le η dalla trasformazione lineare (1) sembrerebbe dunque dover ammettere dei casi di eccezione. Questi casi di eccezione si tolgono però completamente: 1°) mediante la considerazione di valori infinitamente grandi delle ξ e delle η; 2°) mediante la ***convenzione*** di considerare come ***identici***, ***dal punto di vista***

della trasformazione lineare, tutti quei sistemi di valori delle ξ_1, $\xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$ *che traggono origine da uno stesso sistema di valori* $\mathrm{x}_1 : \mathrm{x}_2 : \ldots : \mathrm{x}_n$.

Così, ad esempio, per $n = 3$, si dovranno considerare come identici, dal detto punto di vista, il sistema: $\xi_1 = \infty$, $\xi_2 = 4$ ed il sistema: $\xi_1 = \infty$, $\xi_2 = 3$, in quanto così l'uno come l'altro nascono dallo stesso sistema omogeneo:

$$x_1 : x_2 : x_3 = 1 : 0 : 0.$$

In effetto, intendendo con x_2, x_3 numeri piccolissimi tendenti a zero, il rapporto $x_2 : x_3$ potrà tendere a qualsiasi valore h fissato ad arbitrio, bastando prendere a tale oggetto $x_2 = hx_3$.

1115. È importante di notare esplicitamente che *la variabilità del sistema omogeneo* $\mathrm{x}_1 : \mathrm{x}_2 : \ldots : \mathrm{x}_n$ *deve in ogni caso limitarsi a valori tutti finiti e non tutti nulli delle* $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n$.

Infatti l'invertibilità univoca della sostituzione lineare $(1)'''$ ha luogo perfettamente, senza che sia necessario considerare valori infiniti delle x e delle y; e d'altra parte i valori finiti delle x bastano a generare tutti i sistemi di valori finiti o infiniti delle ξ. Quanto poi al sistema speciale:

$$x_1 : x_2 : \ldots : x_n = 0 : 0 : \ldots : 0,$$

esso può escludersi *a priori*, poichè esso viene sempre trasformato in se stesso da ogni sostituzione lineare $(1)'''$ di modulo diverso da zero. Sappiamo infatti (art. 431) che il sistema di equazioni:

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n \\ 0 &= \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_n x_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 &= \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n \end{aligned}$$

non ammette altre soluzioni finite oltre la soluzione $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, quando il determinante del sistema è diverso da zero.

1116. Se $f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1})$ è una funzione intera di grado m nelle $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$, eseguendo in essa la sostituzione (3) si potrà scrivere:

$$\begin{aligned} f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}) &= f\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n}\right) \\ &= \frac{\mathrm{F}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)}{x_n^{\,m}}, \end{aligned} \tag{6}$$

dove ora F è una funzione intera ed *omogenea* di grado m nelle $x_1, x_2, \ldots, x_n$, o, come si suol dire: una *forma* intera del grado m nel campo n^{rio} costituito dalle variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Qualora si considerino soltanto *valori finiti* delle $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$, è chiaro che l'equazione:

$$f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}) = 0$$

equivale all'equazione:

$$F(x_1 , x_2 , \ldots , x_n) = 0,$$

poichè x_n dev'essere diverso da zero.

1117. Se fra le $n-1$ incognite $\xi_1 , \xi_2 , \ldots , \xi_{n-1}$ siano date n-1 equazioni:

$$f_1 = 0 \ , \ f_2 = 0 , \ldots , f_{n-1} = 0 \qquad (7)$$

risp. dei gradi $m_1 , m_2 , \ldots , m_{n-1}$, noi sappiamo (art. 1029) che esistono in generale $m_1 m_2 \ldots m_{n-1}$ sistemi di valori finiti delle $\xi_1 , \ldots , \xi_{n-1}$ che le soddisfano. Per quanto si è notato sopra, si potrà dunque sostituire al sistema (7) il sistema:

$$F_1 = 0 \ , \ F_2 = 0 , \ldots , F_{n-1} = 0 \qquad (7)'$$

in cui le $F_1 , \ldots , F_{n-1}$ sono *forme intere* delle $x_1 , x_2 , \ldots , x_{n-1} , x_n$ risp. dei gradi $m_1 , m_2 , \ldots , m_{n-1}$. Ed esisteranno in generale $m_1 m_2 \ldots m_{n-1}$ sistemi distinti di valori finiti e non tutti nulli delle $x_1 : x_2 : \ldots : x_{n-1} : x_n$ che soddisfano alle (7)'. In questi sistemi di valori sarà dunque in generale x_n diverso da zero. Potrà però accadere nei casi particolari che in uno o in più di questi sistemi si abbia $x_n = 0$. Ciò si dovrà considerare come un indizio del fatto che, in tali casi, uno o più degli $m_1 m_2 \ldots m_{n-1}$ sistemi di valori, generalmente finiti, delle ξ che soddisfano alle (7), si compongono di valori infinitamente grandi (cfr. le Note del § 6°, Cap. XIII).

1118. Quando più sistemi di valori delle n variabili si sottopongono alla stessa trasformazione lineare, tali sistemi si dicono *cogredienti* rispetto alla trasformazione di cui si tratta. A questo riguardo è importante osservare quanto segue.

Se mediante una stessa sostituzione lineare

$$\begin{aligned} X_1 &= \alpha_1 X'_1 + \alpha_2 X'_2 + \ldots + \alpha_n X'_n \\ X_2 &= \beta_1 X'_1 + \beta_2 X'_2 + \ldots + \beta_n X'_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ X_n &= \lambda_1 X'_1 + \lambda_2 X'_2 + \ldots + \lambda_n X'_n \end{aligned}$$

gli n *sistemi di valori delle variabili:* $x_1 , x_2 , \ldots , x_n ; y_1 , y_2 , \ldots , y_n ; \ldots ; z_1 , z_2 , \ldots , z_n$, *si cambiano rispettivamente negli* n *sistemi* $x'_1 , x'_2 , \ldots , x'_n ; y'_1 , y'_2 , \ldots , y'_n ; \ldots ; z'_1 , z'_2 , \ldots , z'_n$, *si ha la relazione:*

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_1 & z_2 & \ldots & z_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \ldots & \beta_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_n \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} x'_1 & x'_2 & \ldots & x'_n \\ y'_1 & y'_2 & \ldots & y'_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z'_1 & z'_2 & \ldots & z'_n \end{vmatrix} .$$

Infatti, eseguendo il prodotto dei due determinanti nel secondo membro colla regola del prodotto per orizzontali (art. 466), si ottiene evidentemente, in virtù delle ipotesi fatte, il determinante scritto nel primo membro.

Note ed Esercizi.

1. Le formole (1) dell'art. 1111 danno luogo ad una importante interpretazione geometrica qualora le $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$ si considerino come le ordinarie coordinate di un punto qualunque P di uno spazio lineare ad $n-1$ dimensioni e le $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}$ come le coordinate di un punto P', corrispondente al primo in un altro spazio analogo. In tal guisa le (1) ci rappresentano la così detta trasformazione *projettiva* più generale dell' uno spazio nell'altro.

2. Così, per $n=2$, si ha l' unica formola:

$$\eta = \frac{\alpha_1 \xi + \alpha_2}{\beta_1 \xi + \beta_2} \tag{A}$$

che ci rappresenta la corrispondenza projettiva più generale fra i punti di due rette. In tal caso ξ potrà rappresentare la distanza di un punto qualunque P della prima retta da un'origine fissa scelta comunque sulla retta stessa ed η la distanza del punto corrispondente P' dell' altra retta da un'altra origine fissa sulla medesima.

La corrispondenza (A) dipende sostanzialmente da tre soli parametri, poichè, dividendo numeratore e denominatore del 2° membro per α_1, essa prende la forma:

$$\eta = \frac{\xi + \alpha}{\beta\xi + \gamma}.$$

Si dimostri in base a ciò che la corrispondenza projettiva fra due rette è completamente determinata quando si conoscano tre coppie di punti corrispondenti, e che queste si possono scegliere ad arbitrio, semprechè i punti si prendano distinti.

3. Per $n=3$, si hanno le formole:

$$\eta_1 = \frac{\alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2 + \alpha_3}{\lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2 + \lambda_3}, \quad \eta_2 = \frac{\beta_1\xi_1 + \beta_2\xi_2 + \beta_3}{\lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2 + \lambda_3} \tag{B}$$

che ci rappresentano, nel modo più generale, la corrispondenza projettiva fra due piani Π e Π'. Basta considerare le ξ_1, ξ_2 come le ordinarie coordinate cartesiane di un punto qualunque P del piano Π ed η_1, η_2 come le coordinate cartesiane del punto corrispondente P' in Π'. Da quanto si è notato all'art. 1112 segue evidentemente che *nella corrispondenza projettiva fra i due piani* Π *e* Π' *ad ogni retta di* Π *corrisponderà una retta di* Π', *ad ogni conica di* Π *una conica di* Π' *ecc., e reciprocamente.*

Le formole (B) dipendono sostanzialmente da otto parametri. Si dimostri come la corrispondenza projettiva fra due piani sia perfettamente determinata quando si conoscono quattro coppie di punti corrispondenti.

Si dimostri che le forme di 1ª specie (punteggiate o fasci di rette) contenute nei due piani Π e Π' si corrispondono projettivamente.

Si estendano le considerazioni fatte al caso di $n=3$.

4. Se alle formole (B) si sostituiscono le equivalenti:

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 \\ y_2 &= \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 \\ y_3 &= \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3 , \end{aligned} \tag{B)'$$

ponendo:

$$x_1 : x_2 : x_3 = \xi_1 : \xi_2 : 1 \quad , \quad y_1 : y_2 : y_3 = \eta_1 : \eta_2 : 1 ,$$

si avranno nella trattazione del problema della projettività piana precisamente quelli stessi vantaggi che si hanno in generale in geometria analitica quando alle ordinarie cartesiane si sostituiscono le stesse coordinate cartesiane rese *omogenee*.

Così $x_3 = 0$ rappresenterà l'equazione della *retta all'infinito* del piano Π ed $y_3 = 0$ quella del piano Π'. Si deduca per mezzo delle (B') l'equazione di quella retta del piano Π' che corrisponde alla retta all'infinito del piano Π.

5. Le infinite terne di valori $x_1 : x_2 : x_3$ si possono rappresentare geometricamente coi punti di un piano anche in un altro modo più generale fondato sulla considerazione del così detto *triangolo fondamentale*. Se d_1, d_2, d_3 sono le distanze, misurate colle opportune convenzioni di segno, di un punto qualunque P del piano dai tre lati del triangolo fondamentale, ed h_1, h_2, h_3 tre numeri costanti diversi da zero, che cioè restano gli stessi qualunque sia il punto P, si può definire come terna di coordinate omogenee del punto P la terna:

$$x_1 : x_2 : x_3 = h_1 d_1 : h_2 d_2 : h_3 d_3.$$

È chiaro che i tre lati del triangolo fondamentale hanno per equazioni risp. $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$.

L'interpretazione geometrica della terna di valori $x_1 : x_2 : x_3$ mediante le ordinarie coordinate cartesiane rese omogenee, si può dedurre *come caso particolare* (o meglio come un *caso limite*) da quella generale ora esposta: 1°) supponendo che due lati del triangolo fondamentale siano fra loro ortogonali; 2°) prendendo $h_1 = 1$, $h_2 = 1$ ed h_3 uguale alla reciproca della distanza dal punto di incontro dei detti assi ortogonali dal terzo lato del triangolo fondamentale; 3°) supponendo finalmente che il terzo lato si allontani a distanza infinita. In tale ipotesi si avrà infatti per ogni punto P del piano situato a distanza finita: $\lim h_3 d_3 = 1$ e per conseguenza:

$$x_1 : x_2 : x_3 = d_1 : d_2 : 1.$$

6. Si dimostri che, anche interpretando geometricamente le terne di valori $x_1 : x_2 : x_3$ ed $y_1 : y_2 : y_3$ nel modo più generale sopra indicato, le formole (B) rappresenteranno sempre una corrispondenza projettiva fra i due piani.

7. Designando in questa rappresentazione più generale con α, β, γ gli angoli del triangolo fondamentale risp. opposti ai lati $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, si dimostri che l'equazione della retta all'infinito del piano è data da:

$$\frac{\sin\alpha}{h_1} x_1 + \frac{\sin\beta}{h_2} x_2 + \frac{\sin\gamma}{h_3} x_3 = 0,$$

semprechè la distanza d_i si consideri come positiva quando il punto P ed il triangolo fondamentale giacciono dalla stessa parte del lato $x_i = 0$.

8. In conformità di quanto si è già osservato nella Nota 1ª, la sostituzione lineare:

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \\ &\dots\dots\dots\dots \\ y_n &= a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nn} x_n \end{aligned}$$

si può interpretare geometricamente come una trasformazione projettiva dello spazio $x_1 : x_2 : \dots : x_n$ nello spazio $y_1 : y_2 : \dots : y_n$. Supponendo i due spazi *sovrapposti* e i loro punti rappresentati collo stesso sistema di coordinate, è chiaro che le coordinate $x_1 : x_2 : \dots : x_n$ dei *punti uniti* (corrispon-

denti a sè stessi) dovranno soddisfare alle condizioni:

$$\begin{aligned} \rho x_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \rho x_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \end{aligned}$$

per un certo valore opportuno di ρ; ossia alle equazioni:

$$\begin{aligned} (a_{11}-\rho)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\rho)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn}-\rho)x_n &= 0 \end{aligned} \qquad (a)$$

le quali non possono coesistere (art. 431) se non quando sia:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\rho & a_{12} & \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\rho & \ldots a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots a_{nn}-\rho \end{vmatrix} = 0, \qquad (b)$$

E questa un'equazione di grado n rispetto a ρ, la quale non potrebbe essere soddisfatta identicamente, poichè, se fossero nulli tutti i suoi coefficienti, dovrebbe in particolare essere nullo il termine indipendente da ρ, cioè il determinante della sostituzione lineare proposta. Dunque *esistono sempre, anche nei casi particolari,* n *e soltanto* n *valori di* ρ *che soddisfano al problema.*

Per ogni siffatto valore di ρ il sistema (a) darà (art. 435) un unico sistema di valori di $x_1 : x_2 : \ldots : x_n$ semprechè la caratteristica (art. 438) della matrice (b) non riesca inferiore ad $n-1$; cioè: *la trasformazione projettiva dello spazio* $x_1 : x_2 : \ldots : x_n$ *in sè stesso ammette in generale* n *punti uniti.*

9. Può accadere però, nei casi particolari, che per uno stesso valore di ρ si abbiano *infiniti* punti uniti $x_1 : x_2 : \ldots : x_n$. Consideriamo, ad esempio, la trasformazione projettiva piana, cioè la sostituzione:

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ y_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3. \end{aligned} \qquad (c)$$

Qualora sia possibile determinare un valore di ρ per il quale non solamente sia:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\rho & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\rho & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\rho \end{vmatrix} = 0, \qquad (d)$$

ma siano altresì nulli tutti i determinanti di second'ordine contenuti nel determinante (d), e soltanto allora, corrisponderanno a questo valore di ρ infiniti valori di $x_1 : x_2 : \ldots : x_n$; poichè allora (art. 444) due delle tre equazioni:

$$\begin{aligned} (a_{11}-\rho)x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\rho)x_2 + a_{23}x_3 &= 0 \\ a_{31}x_1 + a_{33}x_2 + (a_{33}-\rho)x_3 &= 0 \end{aligned} \qquad (e)$$

saranno conseguenza di una di esse p. es. della prima; cosicchè, affinchè $x_1 : x_2 : x_3$ sia un punto unito, basterà che si abbia:

$$(a_{11} - \rho)x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0. \qquad (f)$$

In questo caso, che costituisce la così detta *omologia*, sono dunque punti uniti tutti gli infiniti punti della linea retta (f), che prende il nome di *asse di omologia*.

Il valore di ρ che corrisponde a questi infiniti punti sarà radice doppia dell'equazione (d), poichè, per l'ipotesi fatta circa i determinanti di second'ordine contenuti in (d), è chiaro che per questo valore ρ si annullerà anche la prima derivata dell'equazione (d), cioè:

$$\begin{vmatrix} a_{22}-\rho & a_{23} \\ a_{32} & a_{33}-\rho \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}-\rho & a_{13} \\ a_{31} & a_{33}-\rho \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}-\rho & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\rho \end{vmatrix} = 0.$$

Se questa radice è soltanto doppia e non tripla, esisterà poi un altro valore di ρ, diverso dal precedente, che soddisfa la (d). Per questo secondo valore di ρ, non potendo più essere nulli tutti i minori di second'ordine del determinante (d), giacchè altrimenti esso coinciderebbe col precedente, il sistema di equazioni (e) darà una sola soluzione $x_1 : x_2 : x_3$, cioè un altro solo punto unito (*centro di omologia*).

10. Lasceremo come esercizio al lettore di trovare le condizioni necessarie e sufficienti cui debbono soddisfare i coefficienti a_{ij} affinchè la sostituzione (c) rappresenti un'*omologia*, eliminando l'incognita ρ fra le equazioni:

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22}-\rho & a_{23} \end{vmatrix} = 0 , \quad \begin{vmatrix} a_{11}-\rho & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0 , \ldots$$

e di determinare, mediante la risoluzione di un'equazione di 1° grado, le coordinate del centro di omologia.

Resterebbe il caso, ancor più particolare, in cui la matrice (d) avesse per caratteristica 0.

In tal caso però, dovendosi avere:

$$a_{ij} = 0 \quad \text{per} \quad i \gtreqless j \ , \ a_{11} = a_{22} = a_{33} = \rho ,$$

la sostituzione (c) si ridurrebbe ad:

$$y_1 = \rho x_1 \quad , \quad y_2 = \rho x_2 \quad , \quad y_3 = \rho x_3 ,$$

cioè tutti i punti del piano sarebbero punti uniti.

11. Si applichi lo stesso metodo ora adottato allo studio dei casi particolari che si possono presentare per i punti uniti della trasformazione projettiva dello spazio $x_1 : x_2 : x_3 : x_4$ in sè stesso.

12. Si dimostri che se, in una forma algebrica data, i coefficienti delle più alte potenze delle variabili non sono tutti diversi da zero, si può sempre trasformare linearmente la forma data in un'altra che abbia quei coefficienti tutti diversi da zero.

§ 2.° — Sistemi controgredienti — Trasformazione lineare di una forma lineare.

1119. Sia data la sostituzione lineare:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2 + \ldots + a_{1n}x'_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = a_{n1}x'_1 + a_{n2}x'_2 + \ldots + a_{nn}x'_n \end{array}\right\} \qquad \text{(I)}$$

Indicando al solito con A_{ij} l'aggiunto di a_{ij} nel determinante $\Delta = \sum \pm a_{11}a_{22} \ldots a_{nn}$, e ponendo per brevità:

$$\alpha_{ij} = \frac{A_{ij}}{\Delta}, \qquad (1)$$

le formole (I) risolute (art. 426) rispetto alle $x'_1, \ldots, x'_n$ prendono la forma equivalente:

$$\left.\begin{array}{l} x'_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{21}x_2 + \ldots + \alpha_{n1}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x'_n = \alpha_{1n}x_1 + \alpha_{2n}x_2 + \ldots + \alpha_{nn}x_n \end{array}\right\}. \qquad \text{(I)}'$$

Se nelle relazioni equivalenti (I) ed (I)' si scambia dappertutto a_{ij} con α_{ji} ed x'_i con x_i per tutti i valori di i ed j, si ottengono le sostituzioni:

$$\left.\begin{array}{l} x'_1 = a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{n1}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x'_n = a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \end{array}\right\} \qquad \text{(II)}'$$

ed

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \alpha_{11}x'_1 + \alpha_{12}x'_2 + \ldots + \alpha_{1n}x'_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = \alpha_{n1}x'_1 + \alpha_{n2}x'_2 + \ldots + \alpha_{nn}x'_n \end{array}\right\} \qquad \text{(II)}$$

le quali, come è chiaro, saranno del pari fra loro equivalenti.

1120. Ciò posto, la sostituzione lineare (II), i cui coefficienti si deducono da quelli di (I) mediante le (1), si dice *controgrediente* alla (I). E se, dati due sistemi di valori delle n variabili, uno di essi si trasformi mediante la (I) e l'altro si trasformi invece mediante la (II), si dirà che essi sono due ***sistemi*** *(o serie di variabili) controgredienti.*

Poichè in luogo della sostituzione (II) si può anche prendere la equivalente (II)', si vede che *la sostituzione controgrediente ad* (I) *si può anche ottenere facendo ruotare nella* (I) *la matrice dei coefficienti di* 180° *intorno alla diagonale principale e scambiando al tempo stesso le* **x** *colle* **x'**.

1121. Se questa stessa regola si applica alla (II), è chiaro che,

come sostituzione controgrediente alla (II) si trova la (I)'. Ma quest'ultima è equivalente alla (I). Quindi *come la* (II) *è controgrediente della* (I), *così la* (I) *è la controgrediente della* (II).

1122. Teorema. — *Se due sistemi controgredienti* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ *ed* $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ *si trasformano rispettivamente in* $\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2, \dots, \mathbf{x}'_n$ *ed* $\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \dots, \mathbf{u}'_n$, *si ha la relazione*:

$$\mathbf{x}_1\mathbf{u}_1+\mathbf{x}_2\mathbf{u}_2+\dots+\mathbf{x}_n\mathbf{u}_n=\mathbf{x}'_1\mathbf{u}'_1+\mathbf{x}'_2\mathbf{u}'_2+\dots+\mathbf{x}'_n\mathbf{u}'_n. \qquad (2)$$

Si hanno infatti, per il supposto, le relazioni;

$$x_1=a_{11}x'_1+a_{12}x'_2+\dots+a_{1n}x'_n\ ,\ u_1=\alpha_{11}u'_1+\alpha_{12}u'_2+\dots+\alpha_{1n}u'_n$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$x_n=a_{n1}x'_1+a_{n2}x'_2+\dots+a_{nn}x'_n\ ,\ u_n=\alpha_{n1}u'_1+\alpha_{n2}u'_2+\dots+\alpha_{nn}u'_n$$

dalle quali si deduce:

$$x_1u_1+x_2u_2+\dots+x_nu_n=$$

$$\sum_{i=1}^{i=n}(a_{1i}\alpha_{1i}+a_{2i}\alpha_{2i}+\dots+a_{ni}\alpha_{ni})x'_iu'_i+\sum_{i\gtrless j}(a_{1i}\alpha_{1j}+\dots+a_{ni}\alpha_{nj})x'_iu'_j\,,$$

cioè appunto la (2), poichè:

$$a_{1i}\alpha_{1i}+a_{2i}\alpha_{2i}+\dots+a_{ni}\alpha_{ni}=1\quad,\quad a_{1i}\alpha_{1j}+a_{2i}\alpha_{2j}+\dots+a_{ni}\alpha_{nj}=0.$$

1123. Se in una forma lineare $u_1x_1+u_2x_2+\dots+u_nx_n$ si fa la sostituzione (I), si trova, ordinando il risultato rispetto alle nuove variabili $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$:

$$u_1x_1+u_2x_2+\dots+u_nx_n=u'_1x'_1+u'_2x'_2+\dots+u'_nx'_n\,,$$

dove:

$$u'_1=a_{11}u_1+a_{21}u_2+\dots+a_{n1}u_n$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$u'_n=a_{1n}u_1+a_{2n}u_2+\dots+a_{nn}u_n\,,$$

cosicchè il legame fra i primitivi coefficienti $u_1, \dots, u_n$ e i coefficienti *trasformati* $\mathbf{u}'_1, \dots, \mathbf{u}'_n$ può essere espresso dalla sostituzione (II)', quando in luogo delle x si pongano le u e in luogo delle x' le u'.

Dunque: *se una forma lineare si trasforma mediante una sostituzione lineare delle variabili, i coefficienti della forma trasformata si deducono da quelli della primitiva mediante la sostituzione lineare controgrediente a quella eseguita sulle variabili primitive.*

Note ed Esercizi.

1. Fra le sostituzioni lineari hanno una speciale importanza quelle che godono della proprietà di essere controgredienti a sè stesse. Queste sostituzioni lineari coincidono colle così dette sostituzioni *ortogonali*, di cui avremo ad occuparci fra poco (§ 4°).

2. Si ponga mente a non confondere la sostituzione controgrediente alla (I), che è espressa dalle (II), colla sostituzione *inversa* della (I) che è espressa invece dalle:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}x'_1 + a_{21}x'_2 + \dots + a_{n1}x'_n \\ &\dots\dots\dots \\ x_n &= a_{1n}x'_1 + a_{2n}x'_2 + \dots + a_{nn}x'_n \end{aligned} \qquad \text{(III)}$$

e dalle formole equivalenti:

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ &\dots\dots\dots \\ x'_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{aligned} \qquad \text{(III)}'$$

e si dice *inversa* della (I), perchè, se dopo aver eseguita la (I) si esegua la (III), tutte le variabili ripigliano il loro primitivo valore.

3. Essendo S una sostituzione lineare qualunque, si dimostri che *l'inversa della controgrediente di* S *coincide colla controgrediente dell'inversa di* S.

§ 3.° -- Trasformazione lineare di una forma quadratica. Legge d' inerzia.

1124. Una forma quadratica $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, cioè una funzione intera ed omogenea del secondo grado, delle n variabili $x_1, \dots, x_n$, si rappresenta spesso con:

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \dots,$$

cosicchè si può anche scrivere più brevemente:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^{j=n}\sum_{i=1}^{i=n} a_{ij}x_ix_j,$$

convenendosi di ritenere $a_{ij} = a_{ji}$.

1125. È importante, per ciò che segue, di notare che *se i coefficienti* $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$, *dei quadrati delle variabili*, *sono tutti od in parte nulli, si può sempre, mediante un'opportuna sostituzione lineare, trasformare la forma quadratica in un' altra, per la quale essi siano invece tutti diversi da zero.*

Infatti, se nella forma quadratica $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ si esegua la sostituzione lineare:

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 x'_1 + \beta_1 x'_2 + \dots + \lambda_1 x'_n \\ &\dots\dots\dots \\ x_n &= \alpha_n x'_1 + \beta_n x'_2 + \dots + \lambda_n x'_n, \end{aligned}$$

si trovano risp., come coefficienti di $x'^2_1, x'^2_2, \dots, x'^2_n$, le quantità:

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), f(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n), \dots, f(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

Se ora, per ogni sistema di valori delle $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, almeno una di queste quantità riuscisse uguale a zero, è chiaro che almeno una di esse, p. es. la $f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, dovrebbe annullarsi identicamente (cfr. Cap. VI, § 1.º) per gl'infiniti sistemi di valori delle $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. La forma quadratica (1) dovrebbe quindi essere *identicamente nulla*, cioè essere nulli tutti i suoi coefficienti a_{ii}, a_{ij}.

1126. Teorema. — *Ogni forma quadratica con* n *variabili è identicamente uguale alla somma dei quadrati di* k *forme lineari* ($k \gtreqless n$), *fra loro linearmente indipendenti, composte colle stesse variabili.*

Sia infatti $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ la data funzione omogenea e di secondo grado delle n variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Cambiando, ove occorra, le $x_1, \ldots, x_n$ in altre nuove variabili $y_1, y_2, \ldots, y_n$ mediante un'opportuna sostituzione lineare, potremo ritenere (art. 1125) che il coefficiente di y_1^2 sia diverso da zero, cosicchè la V, ordinata secondo le potenze di y_1, sarà della forma:

$$V = Py_1^2 + 2Qy_1 + R$$

dove P è una costante diversa da zero, Q una funzione lineare omogenea ed R una funzione omogenea del secondo grado delle rimanenti variabili $y_2, y_3, \ldots, y_n$. Si potrà quindi scrivere identicamente:

$$V = \left(\sqrt{P}y_1 + \frac{Q}{\sqrt{P}}\right)^2 + \left(R - \frac{Q^2}{P}\right),$$

cioè:

$$V = [\varphi(y_1, y_2, \ldots, y_n)]^2 + W(y_2, y_3, \ldots, y_n),$$

dove φ è una semplice forma lineare e W è una forma quadratica che contiene soltanto le $y_2, y_3, \ldots, y_n$.

Qualora i coefficienti di $y_2^2, y_3^2, \ldots, y_n^2$ nella W riescano tutti eguali a zero, si eseguirà un' ulteriore sostituzione lineare delle $y_1, y_2, \ldots, y_n$ in altre variabili $z_1, z_2, \ldots, z_n$, ponendo $y_1 = z_1$ e trasformando le $y_2, y_3, \ldots, y_n$ nelle $z_2, z_3, \ldots, z_n$ in modo che, fatta la sostituzione in W, il coefficiente di z_2^2 riesca diverso da zero. Si otterrà così per V un'espressione della forma:

$$V = [\psi(z_1, z_2, \ldots, z_n)]^2 + V_1(z_2, z_3, \ldots, z_n)$$

dove ψ è una forma lineare col coefficiente di z_1 diverso da zero, e V_1 una forma quadratica in cui è diverso da zero il coefficiente di z_2^2; cosicchè si potrà poi scrivere, come si è fatto sopra per V,

$$V_1(z_2, z_3, \ldots, z_n) = [\chi(z_2, z_3, \ldots, z_n)]^2 + V_2(z_3, z_4, \ldots, z_n).$$

Si ha così:

$$V = [\psi(z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n)]^2 + [\chi(z_2, z_3, \ldots, z_n)]^2 + V_2(z_3, \ldots, z_n)$$

e anche qui si potrà ritenere che il coefficiente di z_3^2 in V_2 sia diverso da zero; poichè in caso contrario basterà porre $z_1 = z'_1$, $z_2 = z'_2$, e completare la sostituzione mediante un' opportuna sostituzione lineare delle $z_3, \ldots, z_n$ nelle $z'_3, \ldots, z'_n$.

Così procedendo si giungerà evidentemente ad un' espressione della forma:

$$\begin{aligned}V(x_1, x_2, \dots, x_n) &= (a_1X_1+a_2X_2+a_3X_3+ \dots +a_nX_n)^2\\ &+(b_2X_2+b_3X_3+ \dots +b_nX_n)^2+(c_3X_3+ \dots +c_nX_n)^2\\ &+ \dots\\ &+(d_kX_k+d_{k+1}X_{k+1}+ \dots +d_nX_n)^2\end{aligned}$$

in cui i k coefficienti $a_1, b_2, c_3, \dots, d_k$, ($k \lesseqgtr n$) sono tutti diversi da zero e in cui le variabili $X_1, \dots, X_n$ sono legate alle $x_1, \dots, x_n$ da una sostituzione lineare che è la risultante (cfr. art. 473) di tutte le successive sostituzioni eseguite nel processo di calcolo da noi indicato.

Rimettendo in luogo delle $X_1, \dots, X_n$ le loro espressioni nelle $x_1, \dots, x_n$, verrà:

$$\begin{aligned}a_1X_1 + a_2X_2 + \dots\dots + a_nX_n &= \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n)\\ b_2X_2 + \dots\dots + b_nX_n &= \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n)\\ \dots\dots\dots\\ d_kX_k + \dots + d_nX_n &= \varphi_k(x_1, x_2, \dots, x_n),\end{aligned}$$

essendo le $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ delle forme lineari fra loro indipendenti (art. 448); poichè la caratteristica della matrice:

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & \dots\dots\dots & a_n \\ 0 & b_2 & \dots\dots\dots & b_n \\ \dots & \dots & \dots\dots\dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \quad d_k \quad \dots & d_n \end{matrix}$$

è evidentemente uguale a k (cfr. art. 443 e 448).

Abbiamo così raggiunta l' espressione:

$$V(x_1, \dots, x_n) = [\varphi_1(x_1, \dots, x_n)]^2 + [\varphi_2(x_1, \dots, x_n)]^2 + \dots + [\varphi_k(x_1, \dots, x_n)]^2$$

che è precisamente della forma enunciata nel teorema.

1127. Se poniamo, come all' art. 1124,

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^{j=n} \sum_{i=1}^{i=n} a_{ij} x_i x_j, \tag{1}$$

si avrà, per ogni forma quadratica V, una matrice quadrata di coefficienti:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{matrix}, \quad a_{ij} = a_{ji}, \tag{2}$$

che si chiamerà la *matrice della forma* V.

La caratteristica della matrice (2) coincide col numero k ($k \leqq n$) del teorema testè dimostrato (vedi la dimostrazione nelle Note). Qui ci occuperemo soltanto del suo determinante:

$$\Delta = \sum \pm a_{11} a_{22} \dots a_{nn} \tag{3}$$

che si chiama il *discriminante* della forma V.

1128. Se la forma quadratica (1) sia stata rappresentata come la somma di n quadrati:

$$V = (c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n)^2 + \dots + (c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + \dots + c_{nn}x_n)^2, \tag{4}$$

si avrà pel coefficiente a_{ij} l'espressione:

$$a_{ij} = c_{1i}c_{1j} + c_{2i}c_{2j} + \dots + c_{ni}c_{nj}, \tag{5}$$

d'onde segue immediatamente (art. 466):

$$\Delta = \sum \pm a_{11} a_{22} \dots a_{nn} = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix}^2 . \tag{3)'$$

1129. *Affinchè una forma quadratica con* n *variabili si possa esprimere come somma di* k *quadrati di forme lineari, essendo* k < n, *è necessario e sufficiente che sia nullo il suo discriminante.*

Infatti, se la forma quadratica V si può esprimere come una somma di quadrati, il cui numero sia inferiore ad n, si potrà nell'espressione (4) ritenere $c_{n1} = c_{n2} = \dots = c_{nn} = 0$; e allora la (3)' ci dà evidentemente $\Delta = 0$.

Supponiamo reciprocamente che sia $\Delta = 0$. La (3)' ci dice che sarà anche:

$$\sum \pm c_{11} c_{22} \dots c_{nn} = 0,$$

diguisachè le n forme lineari:

$$c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n , \dots , c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + \dots + c_{nn}x_n$$

saranno (art. 443) fra loro dipendenti. Non è dunque possibile, se $\Delta = 0$, di esprimere V come somma di n quadrati di forme lineari indipendenti; epperò l'espressione corrispondente al teorema dell'art. 1126 si comporrà necessariamente di un numero di quadrati inferiore ad n.

1130. A complemento di quanto si è dimostrato all'art. 1126 si consideri il caso in cui la forma quadratica $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ abbia i suoi coefficienti tutti reali. Uno qualunque dei quadrati, nella cui somma si è decomposta, avrà la forma:

$$\left(\sqrt{P_i}\, z_i + \frac{Q_i}{\sqrt{P_i}} \right)^2 \tag{6}$$

essendo Q_i una funzione lineare a coefficienti reali delle z_{i+1}, $z_{i+2}, \dots, z_n$, e P_i una costante reale diversa da zero.

Se P_i è un numero positivo, sarà dunque (6) il quadrato di una funzione lineare a coefficienti reali. Se invece P_i è negativo, si potrà scrivere:

$$\sqrt{P_i}z_i + \frac{Q_i}{\sqrt{P_i}} = \sqrt{-1}\left\{ \sqrt{-P_i}z_i - \frac{Q_i}{\sqrt{-P_i}} \right\},$$

onde (6) sarà in tal caso il quadrato di una funzione lineare a coefficienti reali preso col segno negativo.

Si potrà dunque porre, quando V *ha i coefficienti reali*:

$$V(x_1, \dots, x_n) = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_i^2 - Y_1^2 - Y_2^2 - \dots - Y_h^2, \qquad (7)$$

essendo le X *e le* Y *funzioni lineari, fra loro indipendenti e a coefficienti reali, delle* $x_1, \dots, x_n$, *ed avendosi in ogni caso* $i+h \lesseqgtr n$.

1131. La rappresentazione di una data funzione V sotto la forma (7) si potrà fare in molti modi diversi, come già apparisce dalla stessa dimostrazione dell' art. 1126. Però, *comunque si varii la decomposizione in quadrati, i due numeri* i *ed* h *restano sempre gli stessi.* Questo importante teorema, conosciuto sotto il nome di *legge d' inerzia delle forme quadratiche*, è stato da *Jacobi* dimostrato nel seguente modo.

Siano:

$$V = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_i^2 - Y_1^2 - Y_2^2 - \dots - Y_h^2$$

e

$$V = U_1^2 + U_2^2 + \dots + U_j^2 - H_1^2 - H_2^2 - \dots - H_k^2$$

due diverse rappresentazioni della stessa forma quadratica V. Si avrà identicamente:

$$X_1^2 + \dots + X_i^2 + H_1^2 + \dots + H_k^2 = U_1^2 + \dots + U_j^2 + Y_1^2 + \dots + Y_h^2. \qquad (8)$$

Di quì segue che tutti i sistemi di valori reali delle variabili $x_1, x_2, \dots, x_n$ che soddisfano alle $i+k$ equazioni lineari:

$$X_1 = 0, \dots, X_i = 0, H_1 = 0, \dots, H_k = 0, \qquad (9)$$

soddisferanno anche alle equazioni:

$$U_1 = 0, \dots, U_j = 0, Y_1 = 0, \dots, Y_h = 0 \qquad (10)$$

e reciprocamente; poichè dalle (9) segue in virtù dell'identità (8)

$$U_1^2 + \dots + U_j^2 + Y_1^2 + \dots + Y_h^2 = 0$$

ed una somma di quadrati di quantità reali, e quindi di parti tutte positive, non potrebbe essere nulla senza che lo fossero tutte le singole parti.

Ciò posto, supponiamo, se è possibile, che si avesse p. es. $j > i$. Poichè il sistema (9) ha per conseguenza necessaria il sistema (10), esso avrà altresì per conseguenza necessaria il sistema:

$$U_1 = 0, \dots, U_j = 0, H_1 = 0, \dots, H_k = 0 \qquad (11)$$

di cui le prime j equazioni fanno parte del sistema (10) e le altre appartengono allo stesso sistema (9). Il sistema (11), che si compone di $j+k$ equazioni fra loro indipendenti (art. 448), è dunque conseguenza necessaria delle $i+k$ equazioni (9). Dev' essere dunque (art. 452): $j+k \overline{\gtrless} i+k$, cioè $j \overline{\gtrless} i$, contrariamente all'ipotesi fatta.

Assolutamente allo stesso modo si dimostrerebbe che $k \overline{\gtrless} h$ ed $h \overline{\gtrless} k$, d'onde $h = k$.

Note ed Esercizi.

1. Esprimere sotto forma di una somma di quadrati le funzioni di tre variabili:

$$xy + yz + zx \ , \ xy + 2yz + 3zx \ ,$$

2. Dimostrare, mediante l'art. 1129, che affinchè la conica rappresentata dall' equazione:

$$a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3=0$$

si spezzi in due rette, è necessario e sufficiente che si annulli il discriminante del primo membro.

3. *Essendo* (art. 1126), *per* $k \overline{\gtrless} n$:

$$V(x_1 , \dots , x_n) = \sum_{j=1}^{i=n} \sum_{i=1}^{i=n} a_{ij}x_ix_j = [\varphi_1]^2 + [\varphi_2]^2 + \dots + [\varphi_k]^2 , \qquad (1)$$

dove le

$$\varphi_i = \alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}x_2 + \dots + \alpha_{in}x_n$$

sono k *forme lineari indipendenti, il numero* k *è uguale alla caratteristica della matrice di* V.

Invero, se si deriva la (1) successivamente rispetto a ciascuna delle $x_1 , \dots , x_n$, e si divide per 2, si ottengono le identità:

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+ \dots +a_{1n}x_n=\alpha_{11}\varphi_1+\alpha_{21}\varphi_2+ \dots +\alpha_{k1}\varphi_k$$

$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+ \dots +a_{2n}x_n=\alpha_{12}\varphi_1+\alpha_{22}\varphi_2+ \dots +\alpha_{k2}\varphi_k$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+ \dots +a_{nn}x_n=\alpha_{1n}\varphi_n+\alpha_{2n}\varphi_2+\dots+\alpha_{kn}\varphi_k$$

dalle quali appare che le n forme lineari:

$$V_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \qquad , i=1, 2, \dots , n$$

si esprimono come combinazioni lineari di sole k variabili indipendenti, cioè delle $\varphi_1 , \varphi_2 , \dots , \varphi_k$; cosicchè la caratteristica del loro sistema, cioè appunto la caratteristica di V, deve coincidere colla caratteristica della matrice:

$$\begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{k1} \\ \dots & & & \dots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \dots & \alpha_{kn} \end{matrix}$$

che è appunto uguale a k per la presupposta indipendenza delle $\varphi_1 , \varphi_2 , \dots , \varphi_k$.

4. Se la caratteristica di una forma quadratica $V(x_1 , \dots , x_n)$ è uguale a k e $k < n$, si può dire che la forma V dipende *essenzialmente* da sole k

variabili. Segue infatti dal teorema della nota precedente che k è il minimo numero di variabili da cui si può far dipendere V mediante un'opportuna sostituzione lineare delle $x_1, \dots, x_n$.

5. È assai interessante l'interpretazione geometrica del valore della caratteristica di $V(x_1, x_2, x_3, x_4)$ in rapporto alla superficie del second'ordine definita dall'equazione:

$$V(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0 \tag{2}$$

in cui $x_1 : x_2 : x_3 : x_4$ rappresentano le ordinarie coordinate omogenee di un punto dello spazio.

a) *Affinchè la superficie* (2) *degeneri in due piani coincidenti, è necessario e sufficiente che sia* $k = 1$.

Infatti, dire che la superficie (2) degenera in due piani coincidenti, equivale a dire che la V è un quadrato esatto, e reciprocamente.

b) *Affinchè la superficie* (2) *si riduca a due piani fra loro distinti, è necessario e sufficiente che sia* $k = 2$.

Infatti, se la superficie (2) si riduce a due piani *distinti*, si avrà identicamente $V = u.v$, essendo u e v due forme lineari indipendenti. Si potrà dunque porre identicamente:

$$4V = [\varphi_1]^2 - [\varphi_2]^2 \tag{6}$$

prendendo $\varphi_1 = u + v$ e $\varphi_2 = u - v$. E le φ_1, φ_2 saranno indipendenti; poichè, se fosse identicamente, per un certo valore del coefficiente costante λ:

$$u + v = \lambda(u - v),$$

se ne dedurrebbe:

$$(1 - \lambda)u + (1 + \lambda)v = 0,$$

cosicchè le u e v non sarebbero indipendenti, contro il supposto. Si ha dunque $k = 2$.

Reciprocamente, se $k = 2$, sussisterà un'espressione della forma (6) con φ_1 e φ_2 indipendenti; onde si avrà:

$$4V = (\varphi_1 + \varphi_2)(\varphi_1 - \varphi_2),$$

cioè lo spezzamento della superficie in due piani distinti.

c) *Affinchè la superficie* (2) *degeneri in un cono senza ridursi al sistema di due piani, è necessario e sufficiente che sia* $k = 3$.

Invero, per $k = 3$, l'equazione (2) prende la forma:

$$[\varphi_1]^2 + [\varphi_2]^2 + [\varphi_3]^2 = 0 \tag{3}$$

dalla quale appare facilmente che, se P è il punto comune ai tre piani $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, $\varphi_3 = 0$ e Q un punto qualunque della (3), ogni altro punto della retta OQ starà del pari sulla (3). La (3) rappresenta dunque un luogo di rette uscenti dal punto P, cioè un cono.

Reciprocamente, se la (2) rappresenta un cono, non è possibile che sia $k = 4$, cioè non è possibile dare alla (2) la forma:

$$[\varphi_1]^2 + [\varphi_2]^2 + [\varphi_3]^2 + [\varphi_4]^2 = 0 \tag{4}$$

essendo le φ fra loro indipendenti. Infatti, se A_1, A_2, A_3, A_4 siano i valori che assumono risp. le φ quando si sostituiscano in esse le coordinate del vertice del cono, un punto qualunque del cono non solamente dovrà soddisfare alla (4), ma anche all'equazione:

$$[A_1 + \varphi_1]^2 + [A_2 + \varphi_2]^2 + [A_3 + \varphi_3]^2 + [A_4 + \varphi_4]^2 = 0, \tag{5}$$

poichè, sommando ordinatamente le sue coordinate con quelle del vertice, si dovranno avere le coordinate di un altro punto del cono. Dovrà quindi

soddisfare altresì all'equazione di 1° grado:

$$A_1\varphi_1 + A_2\varphi_2 + A_3\varphi_3 + A_4\varphi_4 = 0$$

il che è in contraddizione coll'ipotesi che il cono non degeneri in piani, a meno che sia

$$A_1 = 0 \;,\; A_2 = 0 \;,\; A_3 = 0 \;,\; A_4 = 0.$$

Ma anche ciò è impossibile (art. 481), essendo diverso da zero il determinante delle φ, che si sono supposte indipendenti.

§ 4.° — Sostituzioni ortogonali.

1132. Una sostituzione lineare:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}x_n \end{aligned} \tag{1}$$

si dice *ortogonale* quando in virtù di essa si ha fra le variabili primitive e le trasformate la relazione:

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2. \tag{2}$$

Le condizioni necessarie e sufficienti affinchè la (1) sia ortogonale, si ottengono dunque sostituendo in (2), in luogo delle x, le loro espressioni (1), ed uguagliando quindi (art. 484) i coefficienti delle stesse potenze y_i^2 e degli stessi prodotti y_iy_j nei due membri delle (2). Si trovano così i due sistemi di condizioni:

$$a_{1i}a_{1k}+a_{2i}a_{2k}+ \ldots +a_{ni}a_{nk}=0, \qquad \text{per } i \gtrless k, \tag{3}$$

$$a_{1i}a_{1i}+a_{2i}a_{2i}+ \ldots +a_{ni}a_{ni}=1, \qquad \text{per } i=1,\, 2, \ldots, n. \tag{3)'}$$

1133. Da queste relazioni segue facilmente che *il quadrato del modulo di una sostituzione ortogonale è uguale all'unità.*

Eseguendo infatti questo quadrato colla regola del prodotto *per verticali*, si ottiene:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = 1. \tag{4}$$

1134. Moltiplicando le (1) risp. per a_{1i}, a_{2i}, ..., a_{ni}, e sommando quindi membro a membro, si ottiene in virtù delle (3) e (3)':

$$a_{1i}x_1 + a_{2i}x_2 + \ldots + a_{ni}x_n = y_i, \tag{5}$$

cioè: *la sostituzione ortogonale* (1) *risoluta rispetto alle* y_i *è*:

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{n1}x_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n. \end{aligned} \tag{6}$$

1135. Sostituendo queste espressioni delle y_i nelle (2) e identificando rispetto alle x_i, come poco fa, si ottengono le seguenti relazioni:

$$a_{i1}a_{k1} + a_{i2}a_{k2} + \ldots + a_{in}a_{kn} = 0, \quad \text{per } i \gtrless k \tag{7}$$

$$a_{i1}a_{i1} + a_{i2}a_{i2} + \ldots + a_{in}a_{in} = 1. \tag{7'}$$

Si vede dunque che: *il sistema di equazioni* (3) *e* (3)', *fra i numeri* a_{ij}, *ha per conseguenza necessaria il sistema* (7), (7)' *e reciprocamente.*

1136. Indicando con ε il valore ($=\pm 1$) del determinante $\sum \pm a_{11}a_{22}..a_{nn}$ e con A_{ij} l'aggiunto di a_{ij} in questo stesso determinante, la risoluzione ordinaria della (1) rispetto alle y_i darebbe:

$$\varepsilon \cdot y_i = A_{1i}x_1 + A_{2i}x_2 + \ldots + A_{ni}x_n.$$

Confrontando colle (5) si trova dunque che $\varepsilon \cdot a_{ki} = A_{ki}$, cioè che: *nella matrice di una sostituzione ortogonale ogni elemento è uguale al suo aggiunto, se il modulo della sostituzione ha il valore* 1, *ed è invece uguale ma di segno opposto, se il modulo ha il valore* —1.

1137. Notiamo per ultimo che: *se* $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ *sono due sistemi qualunque di valori delle* x, *ed* $y_1, y_2, \ldots, y_n$; $y'_1, y'_2, \ldots, y'_n$ *i sistemi di valori delle* y *che ad essi rispettivamente corrispondono in virtù della sostituzione ortogonale, si ha la relazione*:

$$x_1x'_1 + x_2x'_2 + \ldots + x_nx'_n = y_1y'_1 + y_2y'_2 + \ldots + y_ny'_n, \tag{2'}$$

di cui la (2) è evidentemente un caso particolare ($x'_i = x_i$).

La relazione (2)' si ottiene moltiplicando membro a membro ciascuna delle (1) per la corrispondente equazione fra le x' ed y', sommando quindi le n equazioni ottenute membro a membro e tenendo conto delle (3) e (3)'.

Note ed Esercizi.

1. Dedurre dall'art. 1136 che ogni determinante minore contenuto nella matrice di una sostituzione ortogonale di modulo ε, è uguale al suo complemento algebrico (art. 462) moltiplicato per ε. (Cfr. pg. 206, Nota 5ª).

2. La sostituzione ortogonale dà luogo ad un'importante interpretazione geometrica. Prendendo, per fissare le idee, $n=3$, sia la sostituzione ortogonale:

$$\begin{aligned} x &= a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' \\ y &= a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z' \\ z &= a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z' \end{aligned} \tag{A}$$

e si interpretino le x, y, z come le ordinarie coordinate cartesiane ortogonali di un punto qualunque dello spazio, le x', y', z' come le coordinate di un nuovo punto, corrispondente al primo, riferite allo *stesso* sistema di assi.

È facile riconoscere che: *la trasformazione ortogonale* (A) *applicata ad una figura qualunque* S *dello spazio non altera le distanze relative dei suoi*

punti. Invero, se (x, y, z), (ξ, η, ζ) sono due punti della figura S ed (x', y', z'), (ξ', η', ζ') i due punti ad essi corrispondenti nella nuova figura S', dalle formole (2) e (2)' segue appunto:

$$(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2=(x'-\xi')^2+(y'-\eta')^2+(z'-\zeta')^2.$$

È importante distinguere il caso in cui il determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \varepsilon = \pm 1$$

ha il valore $+1$ dal caso in cui ha il valore -1. Infatti, *per* $\varepsilon = 1$, *le due figure corrispondenti* S *ed* S' *sono eguali e congruenti, cioè si possono sovrapporre l'una all'altra mediante un movimento nello spazio; invece, per* $\varepsilon = -1$, *una delle due figure si può, mediante un movimento nello spazio, portare a coincidenza coll'imagine dell'altra figura riflessa in uno specchio piano.*

Sia infatti S' la figura S riflessa in uno specchio piano perpendicolare all'asse delle x e passante per l'origine, cosicchè per ogni punto (x, y, z) di S e pel corrispondente (x'', y'', z'') di S'' si ha:

$$x = -x'' \ , \ y = y'' \ , \ z = z''$$

che è evidentemente una sostituzione ortogonale di modulo eguale a -1. La figura S' dovrà essere congruente ad S ovvero ad S''.

Nel primo caso la sostituzione (A) equivarrà ad un movimento di S nello spazio, cioè, come è noto dalla cinematica, si potrà considerare come la risultante di tre rotazioni intorno ai tre assi coordinati, ognuna delle quali, come è agevole riconoscere, equivale ad una sostituzione ortogonale di modulo 1; onde sarà eguale ad 1 anche il modulo della (A), che dev'essere eguale (art. 478) al prodotto dei moduli delle sostituzioni componenti.

Se invece S' è congruente ad S'', la sostituzione (A) equivarrà ad una riflessione di S in S'' seguita da un movimento per cui la S'' prende poi la posizione S' (cioè, per quanto si è ora detto, da una sostituzione ortogonale di modulo 1). Sarà dunque la risultante di una sostituzione di modulo -1 e di una sostituzione di modulo 1, onde il suo modulo sarà appunto -1; c. d. d.

3. Detti X, Y, Z i tre assi coordinati presi nella direzione positiva, ed X', Y', Z' le tre direzioni corrispondenti, che essi assumerebbero in virtù del movimento (con o senza riflessione) rappresentato dalla sostituzione ortogonale (A), dimostrare l'identità delle due matrici:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \quad , \quad \begin{matrix} \cos(X'X) & \cos(X'Y) & \cos(X'Z) \\ \cos(Y'X) & \cos(Y'Y) & \cos(Y'Z) \\ \cos(Z'X) & \cos(Z'Y) & \cos(Z'Z). \end{matrix}$$

4. Ciò premesso, riconoscere che *la sostituzione ortogonale* (A) *si può anche interpretare geometricamente nel senso che, se* **x**, **y**, **z** *sono le coordinate di un punto qualunque dello spazio riferito alla terna di assi* X, Y, Z, *le* **x'**, **y'**, **z'** *sono le coordinate di quello stesso punto riferito alla nuova terna di assi* X', Y', Z'.

§ 5.º — Trasformazione ortogonale di una forma quadratica.

1138. Data una forma quadratica con n variabili:

$$f(x_1, \dots, x_n) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots = \sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j, \tag{1}$$

si può sempre, in infiniti modi, determinare una sostituzione lineare:

$$\begin{aligned} x_1 &= g_{11}X_1 + g_{12}X_2 + \dots + g_{1n}X_n \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n &= g_{n1}X_1 + g_{n2}X_2 + \dots + g_{nn}X_n \end{aligned} \tag{2}$$

che faccia prendere ad f la forma:

$$f(x_1, \dots, x_n) = F(X_1, \dots, X_n) = \rho_1 X_1^2 + \rho_2 X_2^2 + \dots + \rho_n X_n^2, \tag{3}$$

essendo $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ dei coefficienti costanti da scegliersi opportunamente.

Invero sostituendo le (2) in f e indicando con F_h la derivata parziale di $F(X_1, \dots, X_n)$ rispetto ad X_h, si trova subito, ricordando le regole per la derivazione di una somma o di un prodotto:

$$F_h(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i,j} a_{ij}(g_{ih}x_j + g_{jh}x_i) = 2\sum_{i,j} a_{ij}g_{ih}x_j, \tag{4}$$

cosicchè, se è verificata l'identità (3), si dovrà avere:

$$\rho_h X_h = \sum_{i,j} a_{ij}g_{ih}x_j, \qquad h = 1, 2, \dots, n, \tag{5}$$

come si vede derivando rispetto ad X_h l'ultima espressione (3).

Reciprocamente, se sono soddisfatte le identità (5), la f avrà precisamente la forma (3). Dalle (5), moltiplicate risp. per $X_1, \dots, X_n$ e sommate membro a membro, si deduce infatti, tenendo presenti le (4):

$$\rho_1 X_1^2 + \dots + \rho_n X_n^2 = \frac{1}{2}\left\{F_1 X_1 + \dots + F_n X_n\right\},$$

cioè appunto, per il teorema di Eulero (art. 512):

$$\rho_1 X_1^2 + \dots + \rho_n X_n^2 = F.$$

1139. Detto G_{ij} l'aggiunto di g_{ij} nel determinante:

$$G = \sum \pm g_{11}g_{22}\dots g_{nn},$$

le (5) si possono scrivere:

$$\rho_h(G_{1h}x_1 + G_{2h}x_2 + \dots + G_{nh}x_n) = G \cdot \sum_{i,j} a_{ij}g_{ih}x_j, \tag{5'}$$

come si vede sostituendo in luogo di X_h la sua espressione ricavata dalle (2); e identificando i coefficienti di una stessa x nei due membri:

$$\left.\begin{aligned} \rho_h G_{1h} &= G(a_{11}g_{1h} + a_{21}g_{2h} + \dots + a_{n1}g_{nh}) \\ \rho_h G_{2h} &= G(a_{12}g_{1h} + a_{22}g_{2h} + \dots + a_{n2}g_{nh}) \\ &\dots\dots\dots\dots \\ \rho_h G_{nh} &= G(a_{1n}g_{1h} + a_{2n}g_{2h} + \dots + a_{nn}g_{nh}) \end{aligned}\right\}, \qquad h=1,\ 2, \dots, n. \qquad (5)''$$

1140. Se si vuole che la sostituzione (2) sia ortogonale, i coefficienti g_{ij} dovranno altresì soddisfare (art. 1136) alle condizioni:

$$g_{ij} = \varepsilon \cdot G_{ij} \qquad , i\, , j=1, 2, \dots , n, \qquad (6)$$

essendo ε uguale a G; e in questo caso le (5)'' prendono la forma più semplice:

$$\begin{aligned} \rho_h g_{1h} &= a_{11}g_{1h} + a_{21}g_{2h} + \dots + a_{n1}g_{nh} \\ \rho_h g_{2h} &= a_{12}g_{1h} + a_{22}g_{2h} + \dots + a_{n2}g_{nh} \\ &\dots\dots\dots\dots \\ \rho_h g_{nh} &= a_{1n}g_{1h} + a_{2n}g_{2h} + \dots + a_{nn}g_{nh}. \end{aligned} \qquad (7)$$

Ora, affinchè questo sistema sia risolubile con valori finiti e non tutti nulli delle $g_{1h}, g_{2h}, \dots, g_{nh}$, è necessario e sufficiente (articolo 432) che il numero ρ_h soddisfi all'equazione:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\rho_h & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22}-\rho_h & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn}-\rho_h \end{vmatrix} = 0. \qquad (8)$$

È questa un'equazione del grado n rispetto a ρ_h, le cui n radici, in generale fra loro distinte, saranno precisamente gli n valori da assumersi per gli n coefficienti $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$.

Per ogni coefficiente ρ_h, così determinato come radice dell'equazione (8), si calcoleranno poi i corrispondenti coefficienti g_{1h}, $g_{2h}, \dots, g_{nh}$ mediante le (7) e mediante la relazione:

$$g_{1h}^2 + g_{2h}^2 + \dots + g_{nh}^2 = 1 \qquad (9)$$

necessaria per l'ortogonalità della sostituzione (2).

1141. Se l'equazione (8) ha tutte le sue radici distinte, il numero ρ_h non soddisferà (art. 913) all'equazione che si otterrebbe derivando la (8) rispetto a ρ_h; epperò almeno uno dei determinanti minori di ordine $n-1$ contenuti nel determinante (8) sarà diverso da zero, cioè la caratteristica del determinante (8) sarà $n-1$. Di qui segue (art. 435) che le equazioni lineari (7) daranno un unico sistema di valori pei rapporti $g_{1h} : g_{2h} : \dots : g_{nh}$; cosicchè, tenendo poi conto della (9), si avranno per questi coefficienti due soli sistemi di valori, cioè:

$$g_{1h}, g_{2h}, \dots, g_{nh} \qquad \text{e} \qquad -g_{1h}, -g_{2h}, \dots, -g_{nh}.$$

1142. *Se tutti i coefficienti* a_{ii} *ed* $a_{ij} = a_{ji}$ *sono reali, l'equazione* (8), *o meglio l'equazione in* z :

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\alpha_1 z & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\alpha_2 z & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\alpha_n z \end{vmatrix} = 0 \qquad (10)$$

in cui le $\alpha_1 , \alpha_2 , \dots , \alpha_n$ *sono numeri reali tutti positivi o tutti negativi, ha le sue radici tutte reali.*

Supponiamo infatti che z sia una radice di (10). Si potranno determinare (art. 432) dei numeri reali o complessi, non tutti nulli, $x_1 , x_2 , \dots , x_n$ tali da avere :

$$\begin{aligned} &(a_{11} - \alpha_1 z)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ &a_{21}x_1 + (a_{22} - \alpha_2 z)x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn} - \alpha_n z)x_n = 0. \end{aligned} \qquad (11)$$

Se indichiamo con $x'_1 , x'_2 , \dots , x'_n$ risp. i numeri complessi conjugati ad $x_1 , x_2 , \dots , x_n$, segue dalle (11) moltiplicate risp. per $x'_1 , x'_2 , \dots , x'_n$ e sommate :

$$\left(\sum_{i,j} a_{ij}x'_i x_j\right) - z(\alpha_1 x_1 x'_1 + \dots + \alpha_n x_n x'_n) = 0. \qquad (12)$$

Poichè ora $x_i x'_i = (\mathrm{mod}\, x_i)^2$, ed i numeri $x_1 , x_2 , \dots$ non sono tutti nulli, ed oltre a ciò le $\alpha_1 , \alpha_2 , \dots$ hanno tutte ugual segno, è chiaro che la quantità $\alpha_1 x_1 x'_1 + \dots + \alpha_n x_n x'_n$ è sempre reale e diversa da zero. D'altra parte la somma :

$$\sum_{i,j} a_{ij}x'_i x_j$$

è del pari reale, poichè ogni termine $a_{ij}x_i x'_j$ si può sommare col termine $a_{ji}x'_j x_i$, che gli è conjugato, essendo $a_{ij} = a_{ji}$. L'equazione (12) ci darà dunque evidentemente per z un valore reale, c. d. d.

1143. Di qui segue che, se la forma quadratica (1) ha i coefficienti reali, anche la sostituzione ortogonale (2), mediante la quale essa prende la forma (3), avrà i suoi coefficienti reali, come chiaramente appare dal procedimento indicato all'art. 1140 per la determinazione delle $g_{1h} , g_{2h} , \dots , g_{nh}$.

Note ed Esercizi.

1. Al problema algebrico trattato in questo § corrisponde in geometria il problema di determinare le *direzioni assiali* delle coniche e delle quadriche. Ci occuperemo qui di quest'ultime.

L'equazione di una superficie del 2° ordine, in ordinarie coordinate cartesiane ortogonali, è della forma:

$$\left\{\sum_{j=1}^{j=3}\sum_{i=1}^{i=3}a_{ij}x_ix_j\right\} + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + c = 0. \tag{1}$$

I termini di 2° grado costituiscono la forma quadratica:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{j=1}^{j=3}\sum_{i=1}^{i=3}a_{ij}x_ix_j$$

alla quale, mediante un'opportuna sostituzione ortogonale:

$$\begin{aligned} x_1 &= g_{11}X_1 + g_{12}X_2 + g_{13}X_3 \\ x_2 &= g_{21}X_1 + g_{22}X_2 + g_{23}X_3 \\ x_3 &= g_{31}X_1 + g_{32}X_2 + g_{33}X_3, \end{aligned} \tag{2}$$

si potrà far prendere la forma:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \rho_1X_1^2 + \rho_2X_2^2 + \rho_3X_3^2. \tag{3}$$

Eseguendo ora questa stessa sostituzione (2), che si può interpretare (cfr. la Nota 4ª del § che precede) come una rotazione degli assi coordinati intorno all'origine, nell'equazione (1), essa equazione prenderà la forma:

$$\rho_1X_1^2 + \rho_2X_2^2 + \rho_3X_3^2 + B_1X_1 + B_2X_2 + B_3X_3 + c = 0. \tag{4}$$

È questa l'equazione della quadrica (1), *quando in luogo delle coordinate* x_1, x_2, x_3 *si prendono come coordinate le* X_1, X_2, X_3 *relative alla terna delle rette condotte per la primitiva origine parallelamente alle direzioni assiali della quadrica.*

2. Se si esegue dopo ciò anche la sostituzione:

$$X_1 = Y_1 - \frac{B_1}{2\rho_1}, \quad X_2 = Y_2 - \frac{B_2}{2\rho_2}, \quad X_3 = Y_3 - \frac{B_3}{2\rho_3} \tag{5}$$

che si può interpretare come uno spostamento del sistema degli assi coordinati parallelamente a sè stesso (essendo Y_1, Y_2, Y_3 le nuove coordinate), la (4) prenderà finalmente la forma:

$$\rho_1Y_1^2 + \rho_2Y_2^2 + \rho_3Y_3^2 + C = 0, \tag{6}$$

dove:

$$C = c - \frac{1}{4}\left\{\frac{B_1^2}{\rho_1} + \frac{B_2^2}{\rho_2} + \frac{B_3^2}{\rho_3}\right\}. \tag{7}$$

La trasformazione (5) cade in difetto soltanto quando una delle $\rho_1, \rho_2,$

ρ_3 abbia il valore 0; cioè (art. 1140), quando:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

È questo il caso in cui la quadrica (1) non ha centro. Se invece il determinante $\sum \pm a_{11}a_{22}a_{33}$ è diverso da zero, l'equazione (6) ci rappresenterà la quadrica riferita al suo centro come origine e ai suoi assi come assi coordinati.

3. Se i coefficienti dell'equazione (1) sono reali, i tre numeri ρ_1, ρ_2, ρ_3 saranno pure reali (art. 1142). Se uno di essi, p. es. ρ_1, sia zero, la quadrica (1) sarà senza centro (*paraboloide ellittico od iperbolico a seconda dei segni di* ρ_2 *e* ρ_3). Se invece le ρ_1, ρ_2, ρ_3 sono tutte diverse da zero, si avranno a seconda dei loro segni le diverse specie di quadriche dotate di centro (*ellissoide, iperboloide ad una falda, iperboloide a due falde*).

4. Si trovino le condizioni affinchè la quadrica si riduca ad un *cilindro* (ellittico od iperbolico), considerando il cilindro come caso particolare delle superficie senza centro e come caso particolare del cono (cfr. la Nota 5ª del § 3.º).

5. Aggiungiamo alcuni sviluppi riguardanti la determinazione dei coefficienti g_{ij} della sostituzione ortogonale (2). (Cfr. *Hesse: Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes*. XIX Vorl.).

Posto:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\rho & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\rho & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\rho \end{vmatrix} = \Delta(\rho), \tag{8}$$

cosicchè ρ_1, ρ_2, ρ_3 sono le tre radici di $\Delta(\rho)=0$, e detto $\Delta_{ij}(\rho)$ l'aggiunto dell'elemento di posto (i, j) nel determinante $\Delta(\rho)$, si avrà (art. 1141) simultaneamente (cfr. art. 434):

$$\begin{aligned} g_{1h} : g_{2h} : g_{3h} &= \Delta_{11}(\rho_h) : \Delta_{12}(\rho_h) : \Delta_{13}(\rho_h) \\ g_{1h} : g_{2h} : g_{3h} &= \Delta_{21}(\rho_h) : \Delta_{22}(\rho_h) : \Delta_{23}(\rho_h) \\ g_{1h} : g_{2h} : g_{3h} &= \Delta_{31}(\rho_h) : \Delta_{32}(\rho_h) : \Delta_{33}(\rho_h), \end{aligned} \tag{9}$$

Da queste uguaglianze, moltiplicandone i primi membri risp. per g_{1h}, g_h, g_{3h} e paragonandoli quindi coi secondi, si deduce:

$$\begin{aligned} \mu_h \cdot g_{1h}^2 &= \Delta_{11} \quad , \quad \mu_h \cdot g_{2h}g_{3h} = \Delta_{23} = \Delta_{32} \\ \mu_h \cdot g_{2h}^2 &= \Delta_{22} \quad , \quad \mu_h \cdot g_{3h}g_{1h} = \Delta_{31} = \Delta_{13} \\ \mu_h \cdot g_{3h}^2 &= \Delta_{33} \quad , \quad \mu_h \cdot g_{1h}g_{2h} = \Delta_{12} = \Delta_{21}, \end{aligned} \tag{10}$$

dove il coefficiente di proporzionalità si determinerà mediante la relazione:

$$g_{1h}^2+g_{2h}^2+g_{3h}^2=1, \text{ che dà: } \mu_h=\Delta_{11}(\rho_h)+\Delta_{22}(\rho_h)+\Delta_{33}(\rho_h), \tag{11}$$

e dal secondo gruppo delle (10) segue anche:

$$\mu g_{1h}^2 = \frac{\Delta_{31}\Delta_{12}}{\Delta_{23}}, \; \mu g_{2h}^2 = \frac{\Delta_{12}\Delta_{23}}{\Delta_{31}}, \; \mu g_{3h}^2 = \frac{\Delta_{23}\Delta_{31}}{\Delta_{12}}. \tag{12}$$

Se in luogo delle a_{ij} si introducono le sei costanti:

$$\beta_1^2 = \frac{a_{12}a_{13}}{a_{23}} \quad , \quad \beta_2^2 = \frac{a_{23}a_{21}}{a_{13}} \quad , \quad \beta_3^2 = \frac{a_{31}a_{32}}{a_{12}} ,$$

$$\alpha_1 = \beta_1^2 - a_{11} \quad , \quad \alpha_2 = \beta_2^2 - a_{22} \quad , \quad \alpha_3 = \beta_3^2 - a_{33} \, ,$$

le (12) prendono la forma:

$$\begin{aligned} \mu g_{1h}^2 &= \beta_1^2 \frac{(\alpha_2 + \rho_h)(\alpha_3 + \rho_h)}{\alpha_1 + \rho_h} \\ \mu g_{2h}^2 &= \beta_2^2 \frac{(\alpha_1 + \rho_h)(\alpha_3 + \rho_h)}{\alpha_2 + \rho_h} , \quad \text{poichè:} \quad \begin{aligned} \Delta_{12} &= a_{21}(\alpha_3 + \rho) \\ \Delta_{23} &= a_{23}(\alpha_1 + \rho) , \\ \Delta_{31} &= a_{13}(\alpha_2 + \rho) \end{aligned} \\ \mu g_{3h}^2 &= \beta_3^2 \frac{(\alpha_1 + \rho_h)(\alpha_2 + \rho_h)}{\alpha_3 + \rho_h} \end{aligned} \qquad (13)$$

nel mentre che la (8) si può scrivere:

$$\frac{\Delta(\rho)}{(\alpha_1 + \rho)(\alpha_2 + \rho)(\alpha_3 + \rho)} = \frac{\beta_1^2}{\alpha_1 + \rho} + \frac{\beta_2^2}{\alpha_2 + \rho} + \frac{\beta_3^2}{\alpha_3 + \rho} - 1 = 0. \qquad (14)$$

§ 6.° — Sopra alcune classi di equazioni a radici tutte reali.

1144. Se i numeri reali a_{ij}, α_{ij} soddisfano alle condizioni $a_{ij} = a_{ji}$, $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ per tutti i valori degli indici i, j variabili da 1 ad n; se inoltre la forma quadratica:

$$\sum_{i,j} \alpha_{ij} x_i x_j \equiv \psi(x_1 , x_2 , \ldots , x_n) \qquad (1)$$

ha sempre lo stesso segno per tutti i valori reali delle $x_1, \ldots, x_n$, *l'equazione di grado* n *in* z:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - z\alpha_{11} & a_{12} - z\alpha_{12} & \ldots & a_{1n} - z\alpha_{1n} \\ a_{21} - z\alpha_{21} & a_{22} - z\alpha_{22} & \ldots & a_{2n} - z\alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} - z\alpha_{n1} & a_{n2} - z\alpha_{n2} & \ldots & a_{nn} - z\alpha_{nn} \end{vmatrix} = 0 \qquad (2)$$

ha le sue radici tutte reali.

Segue infatti dalle (2) che si potranno determinare dei numeri non tutti nulli $x_1 , x_2 , \ldots , x_n$ pei quali siano soddisfatte le n equazioni lineari omogenee:

$$(a_{i1} - z\alpha_{i1})x_1 + (a_{i2} - z\alpha_{i2})x_2 + \ldots + (a_{in} - z\alpha_{in})x_n = 0 \quad , \quad i = 1 , \ldots , n, \qquad (3)$$

cosicchè, moltiplicando poi queste equazioni risp. pei numeri x'_1, $x'_2 , \ldots , x'_n$ conjugati di $x_1 , x_2 , \ldots , x_n$, si avrà:

$$\sum_{i,j} a_{ij} x'_i x_j - z \sum_{i,j} \alpha_{ij} x'_i x_j = 0, \qquad (4)$$

dove le due sommatorie hanno valore reale, poichè un termine qualunque $a_{ij}x'_i x_j$ della prima si trova sommato col termine $a_{ij}x'_j x_i$ che gli è conjugato, essendo $a_{ij} = a_{ji}$, e similmente per la seconda. L'equazione (4) ci darà dunque per z, cioè per una radice qualunque dell'equazione (2) un valore reale, come si è asserito, semprechè si dimostri che la seconda sommatoria:

$$\sum a_{ij}x'_i x_j \tag{5}$$

non può riuscire uguale a zero.

Invero per

$$x_1=c_1+c'_1\sqrt{-1}\ ,\ x_2=c_2+c'_2\sqrt{-1}\ ,\ \dots\ ,\ x_n=c_n+c'_n\sqrt{-1}\ , \tag{6}$$

si trova immediatamente:

$$\sum a_{ij}x'_i x_j = \sum a_{ij}(c_i c_j + c'_i c'_j) = \psi(c_1\ ,\ c_2\ ,\ \dots\ ,\ c_n) + \psi(c'_1\ ,\ c'_2\ ,\ \dots\ ,\ c'_n)\ ,$$

onde, essendo ψ per supposto di segno costante, dovrebbe aversi perchè fosse nulla la (5):

$$\psi(c_1\ ,\ c_2\ ,\ \dots\ ,\ c_n) = 0\ \ ,\ \ \psi(c'_1\ ,\ c'_2\ ,\ \dots\ ,\ c'_n) = 0. \tag{7}$$

Ciò posto, se $u_1\ ,\ u_2\ ,\ \dots\ ,\ u_n$ sono delle variabili reali arbitrarie e poniamo per brevità:

$$a_{i1}c_1 + a_{i2}c_2 + \dots + a_{in}c_n = \psi_i\ , \tag{8}$$

si ha, tenendo presente la prima delle (7):

$$(u_1+\lambda c_1\ ,\ u_2+\lambda c_2\ ,\ \dots\ ,\ u_n+\lambda c_n) = \psi(u_1\ ,\ \dots\ ,\ u_n) + \lambda \sum u_i \psi_i\ ,$$

cosicchè, dovendo il segno del secondo membro essere indipendente dal segno di λ che può essere un numero reale positivo o negativo arbitrariamente grande, sarà necessariamente:

$$u_1\psi_1 + u_2\psi_2 + \dots + u_n\psi_n = 0$$

e quindi anche, essendo le $u_1\ ,\ \dots\ ,\ u_n$ arbitrarie:

$$\psi_1 = 0\ \ ,\ \ \psi_2 = 0\ ,\ \dots\ ,\ \psi_n = 0.$$

Da queste uguaglianze e dalle analoghe che si potrebbero scrivere per le c', segue per le (6) ed (8):

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = 0.$$

Epperò le uguaglianze (3) sussisterebbero indipendentemente dal valore di z, onde l'equazione (2) dovrebbe essere soddisfatta identicamente, ipotesi che va evidentemente esclusa *a priori*.

Le equazioni, a radici tutte reali, già incontrate agli articoli 1140 e 1142 altro non sono, come è facile riconoscere immediatamente, che casi particolari della (2).

1145. *Sieno* $\alpha+\beta i\ ,\ \gamma+\delta i\ ,\ \dots\ ,\ \lambda+\mu i$ *delle quantità complesse nelle*

quali i coefficienti di i *hanno tutti lo stesso segno. Se si ponga:*

$$\Pi(x-\alpha-\beta i)\equiv(x-\alpha-\beta i)(x-\gamma-\delta i)\ldots(x-\lambda-\mu i)=F(x)+i\Phi(x)\,, \quad (1)$$

l'equazione: $pF(x)+q\Phi(x)=0$, *in cui* p *e* q *sono numeri reali arbitrari, ha tutte le sue radici reali* (*).

Invero quest'equazione può mettersi sotto la forma:

$$(p-iq)\cdot\Pi(x-\alpha-\beta i)+(p+iq)\cdot\Pi(x-\alpha+\beta i)=0\,,$$

d'onde si deduce:

$$\text{mod}\Pi(x-\alpha-\beta i)=\text{mod}\Pi(x-\alpha+\beta i). \quad (2)$$

Ciò posto, supponiamo che $x=X+Yi$ sia una radice di (1) e che Y sia diverso da zero. Se il segno di Y coincide con quello delle $\beta, \delta, \ldots, \mu$, poichè:

$$\text{mod}^2(x-\alpha-\beta i)=(X-\alpha)^2+(Y-\beta)^2$$

$$\text{mod}^2(x-\alpha+\beta i)=(X-\alpha)^2+(Y+\beta)^2\,,$$

si avrà evidentemente:

$$\text{mod}(x-\alpha-\beta i)<\text{mod}(x-\alpha+\beta i)\,,\ldots$$

e quindi:

$$\Pi\text{mod}(x-\alpha-\beta i)<\Pi\,\text{mod}(x-\alpha+\beta i).$$

Se invece Y ha il segno opposto a quello delle $\beta, \delta, \ldots, \mu$, si concluderebbe similmente che:

$$\Pi\,\text{mod}(x-\alpha-\beta i)>\Pi\,\text{mod}(x-\alpha+\beta i).$$

In entrambi i casi il risultato sarebbe in contraddizione colla (2).

1146. Altre classi importanti di equazioni a radici tutte reali sono quelle che servono di base alla teoria delle *coordinate ellittiche* e a quella delle *funzioni sferiche*. Ma di queste abbiamo già avuto occasione di trattare nel § 2° (Note 4-6) e nel § 3° Note 5-6).

Note ed Esercizi.

1. **Se una forma quadratica a coefficienti reali:**

$$f(x_1\,,\ldots,x_n)=\sum a_{ij}x_ix_j \quad (1)$$

ha sempre valore positivo, o sempre valore negativo, per tutti i sistemi di valori reali delle $x_1, \ldots, x_n$, si dice che essa è una forma quadratica *definita*.

Ci proponiamo di ricercare le condizioni alle quali debbono soddisfare i coefficienti a_{ij}, affinchè la forma (1) sia definita, essendo ciò di molta importanza in diverse questioni di analisi (in ispecie nel calcolo infinitesimale, per la ricerca dei *massimi* e *minimi* delle funzioni). Escluderemo la

(*) Questo teorema è di Hermite. La dimostrazione qui data è di Laguerre (l. c. Nota 5ª).

ipotesi che il discriminante di f sia nullo, poichè se ciò accade, la f si può considerare (art. 1129) come una funzione a coefficienti reali di sole k variabili indipendenti (essendo $k < n$) che possono assumere altrettanti valori reali arbitrari per valori reali opportunamente scelti delle $x_1, \dots, x_n$; cosicchè in questo caso la f si può considerare come una forma quadratica definita con sole k variabili.

Ciò premesso, se $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ sono le n radici, tutte reali, dell'equazione:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\rho & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\rho & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\rho \end{vmatrix} = 0, \tag{2}$$

si può porre identicamente (art. 1140):

$$f(x_1, \dots, x_n) = \rho_1 X_1^2 + \rho_2 X_2^2 + \dots + \rho_n X_n^2, \tag{3}$$

dove le $X_1, \dots, X_n$ sono delle funzioni lineari omogenee fra loro indipendenti, a coefficienti reali, delle $x_1, \dots, x_n$. Affinchè la f sia definita, è dunque necessario e sufficiente che le $\rho_1, \dots, \rho_n$ (che sono tutte diverse da zero, poichè il termine noto di (2) è diverso da zero) abbiano tutte lo stesso segno costante della funzione. Supposto infatti p. es. che il segno costante di f sia il positivo, ammettiamo, se è possibile, che una delle ρ, p. es. la ρ_1, fosse negativa. Per quanto si è già osservato, si potranno allora dare alle $x_1, \dots, x_n$ dei valori reali tali da aversi:

$$X_1 = 1 \;,\; X_2 = 0 \;,\; X_3 = 0 \;, \dots ,\; X_n = 0 \,,$$

cosicchè la (3) ci darebbe evidentemente per f un valore negativo in contraddizione col supposto.

Sia:

$$\rho^n + A_1\rho^{n-1} + A_2\rho^{n-2} + \dots + A_n = 0 \tag{2$'$}$$

l'equazione (2) ordinata secondo le potenze di ρ. Affinchè le sue radici $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ siano tutte positive, è necessario, per la regola dei segni di Cartesio, che la successione dei coefficienti:

$$A_1 \,,\, A_2 \,, \dots ,\, A_n$$

presenti n variazioni; cioè che essa non presenti elementi nulli e che i segni dei suoi elementi siano alternativamente positivi e negativi. Reciprocamente, se ciò accada, la trasformata a radici di segno contrario della (2)$'$ non presenterà alcuna variazione, cosicchè la (2)$'$ non avrà radici negative e per conseguenza le sue radici, che sono reali, saranno tutte positive. In modo analogo si troveranno le condizioni affinchè la f sia a segno costante negativo.

Si conclude pertanto che *affinchè la forma quadratica* (1) *abbia segno costante negativo* (*ovvero positivo*), *è necessario e sufficiente che i coefficienti della* (2)$'$ *siano tutti dello stesso segno* (*ovvero di segno alternante*).

2. Indicando per brevità con:

$$\Omega(z) = \begin{vmatrix} a_{11} - z\alpha_{11} & a_{12} - z\alpha_{12} & \dots & a_{1n} - z\alpha_{1n} \\ a_{21} - z\alpha_{21} & a_{22} - z\alpha_{22} & \dots & a_{2n} - z\alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} - z\alpha_{n1} & a_{n2} - z\alpha_{n2} & \dots & a_{nn} - z\alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

il primo membro dell'equazione (2) dell'art. 1144, e con $\Omega_{ij}(z)$ l'aggiunto dell'elemento di posto $(i\,, j)$ nel determinante $\Omega(z)$, si ha il seguente im-

portante teorema: *se z_1 è radice multipla di ordine λ dell'equazione $\Omega(z)=0$, essa è radice multipla, almeno di ordine $\lambda-1$, di ciascuna delle equazioni $\Omega_{ij}(z)=0$.*

Ritenendo, come all'art. 1144, che la funzione $\Omega(z)$ non sia nulla identicamente, consideriamo la funzione razionale di z (cfr. pg. 205, Nota 2ª):

$$\chi(z)=\begin{vmatrix} 0 & y_1 & \dots & y_n \\ x_1 & a_{11}-z\alpha_{11} & \dots & a_{1n}-z\alpha_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_n & a_{n1}-z\alpha_{n1} & \dots & a_{nn}-z\alpha_{nn} \end{vmatrix} : \Omega(z) = \frac{\sum_{i,j}\Omega_{ij}(z)\cdot x_i y_j}{\Omega(z)}, \qquad (4)$$

dove le $y_1, y_2, \dots, y_n$ sono delle costanti fissate a piacere e le $x_1, x_2, \dots, x_n$ delle variabili che restano arbitrarie.

Sia ora:

$$\chi(z) = \frac{c_1x_1 + \dots + c_nx_n}{(z-z_1)^e} + \frac{c'_1x_1 + \dots + c'_nx_n}{(z-z_1)^{e-1}} + \dots + \qquad (5)$$

lo sviluppo di $\chi(z)$ in frazioni parziali (cfr. art. 1002) per la parte che riguarda la radice z_1. Le costanti c, c', ... dipenderanno soltanto dalle y e dai coefficienti tutti reali a_{ij}, α_{ij} delle due forme quadratiche:

$$\varphi = \sum a_{ij}x_ix_j \quad , \quad \psi = \sum \alpha_{ij}x_ix_j.$$

Poniamo inoltre per brevità:

$$\varphi_i(u) = a_{i1}u_1 + a_{i2}u_2 + \dots + a_{in}u_n \qquad , \; i=1, 2, \dots, n$$

$$\psi_i(u) = \alpha_{i1}u_1 + \alpha_{i2}u_2 + \dots + \alpha_{in}u_n \qquad , \; i=1, 2, \dots, n$$

e

$$\varphi(x, u) = \varphi_1(x)u_1 + \dots + \varphi_n(x)u_n \; , \; \psi(x, z) = \psi_1(x)u_1 + \dots + \psi_n(x)u_n.$$

Se nel determinante (4) sostituiamo:

$$x_i = \varphi_i(u) - z\psi_i(u), \qquad i=1, 2, \dots, n,$$

esso prende, come facilmente si riconosce, il valore:

$$(y_1u_1 + y_2u_2 + \dots + y_nu_n)\Omega(z),$$

cosicchè, eseguendo la stessa sostituzione in (5), si otterrà, posto $z-z_1=h$:

$$[y_1u_1+y_2u_2+ \dots +y_nu_n]h^e = \varphi(u, c) - (z_1+h)\psi(u, c)$$
$$+[\varphi(u, c') - (z_1+h)\psi(u, c')]h + [\varphi(u, c'') - (z_1+h)\psi(u, c'')]h^2 + \dots$$

Ciò posto, se e fosse maggiore di 1, dovrebbero annullarsi, nel secondo membro di questa uguaglianza, almeno i coefficienti di h^0 e di h, cioè dovrebbe aversi:

$$\left.\begin{aligned} &\varphi(u, c) - z_1\psi(u, c) = 0 \\ &\varphi(u, c') - z_1\psi(u, c') - \psi(u, c) = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

onde, sottraendo membro a membro, dopo aver posto nella prima identità $u_i = c'_i$ e nella seconda $u_i = c_i$, si dedurrebbe:

$$\psi(c, c) = \sum \alpha_{ij}c_ic_j = 0.$$

Di qui segue, essendo la ψ di segno costante, che dovrebbe aversi identicamente (cfr. art. 1144) rispetto alle $u_1, \ldots, u_n$:

$$\psi(u\ ,\ c) = 0$$

e quindi anche per la prima delle (6):

$$\varphi(u\ ,\ c) = 0.$$

Si avrebbe dunque per ogni valore di z e delle $u_1, \ldots, u_n$:

$$\varphi(u\ ,\ c) - z\psi)u\ ,\ c) = 0,$$

cioè si avrebbero, per ogni valore di z, le n uguaglianze:

$$\varphi_i(c) - z\psi_i(c) = 0, \qquad\qquad i=1, 2, \ldots, n.$$

Essendo questo un sistema di n equazioni lineari omogenee fra le c_1, $c_2, \ldots, c_n$, che non sono tutte nulle, dovrebbe dunque essere nullo identicamente il determinante $\Omega(z)$, contro il supposto.

Resta così dimostrato che $e \gtreqless 1$. Pertanto, essendo il denominatore $\Omega(z)$ dell'espressione (4) divisibile per $(z-z_1)^\lambda$, il numeratore, cioè l'espressione:

$$\sum_{i,j} \Omega_{ij}(z) x_i y_j\,,$$

dovrà essere divisibile almeno per $(z-z_1)^{\lambda-1}$. E poichè ciò deve accadere qualunque siano i valori delle quantità arbitrarie x_i, y_j, sarà necessariamente ognuna delle funzioni intere $\Omega_{ij}(z)$ divisibile per $(z-z_1)^{\lambda-1}$, c. d. d.

3. Per la formola di Moivre si ha:

$$\left(\cos\frac{\alpha}{n} + i\sin\frac{\alpha}{n}\right)^n = \cos\alpha + i\sin\alpha$$

$$\left(\cos\frac{\alpha}{n} - i\sin\frac{\alpha}{n}\right)^n = \cos\alpha - i\sin\alpha.$$

Dividendo queste uguaglianze membro a membro e ponendo:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{n} = x\,,$$

se ne deduce:

$$\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^n = \frac{1+i\operatorname{tg}\alpha}{1-i\operatorname{tg}\alpha}.$$

Dimostrare (cfr. Laguerre l. c. Nota V) che quest'ultima equazione in x ha tutte le sue radici distinte e reali. A tale oggetto si noti che da quest'equazione segue che:

$$\operatorname{mod}(1+ix) = \operatorname{mod}(1-ix).$$

§ 7.° — Operazioni di polare — Forme polari.

1147. Se da una funzione intera $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ delle n variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$ si deduce la funzione:

$$y_1[D_{x_1}f] + y_2[D_{x_2}f] + \ldots + y_n[D_{x_n}f]\,, \tag{1}$$

ove con $D_{x_i}f$ s'intende (cfr. art. 510) la derivata parziale di f rispetto ad x_i, si dice che si è eseguita sulla f un' operazione *di polare*; giacchè la nuova funzione (1), che oltre alle $x_1, \dots, x_n$ conterrà (però soltanto al primo grado) le $y_1, \dots, y_n$, si dice *prima polare* di f rispetto alla serie $y_1, y_2, \dots y_n$ (nuove variabili da considerarsi come affatto indipendenti dalle $x_1, \dots, x_n$).

1148. Noi diremo anche che la nuova funzione (1) si è ottenuta dalla f, applicando ad f il *simbolo operativo*:

$$y_1 D_{x_1} + y_2 D_{x_2} + \dots + y_n D_{x_n}$$

che indicheremo brevemente con D_{xy} (cfr. art. 516); e scriveremo quindi:

$$y_1[D_{x_1}f] + \dots + y_n[D_{x_n}f] = (y_1 D_{x_1} + \dots + y_n D_{x_n})f = D_{xy}f.$$

Chiameremo D_{xy} una *operazione di polare elementare*. Per evitare equivoci converrà però soggiungere se si tratta di un campo unitario, binario, ternario, ecc. A seconda di questi casi il significato di D_{xy} sarà dato da:

$$D_{xy} = y_1 D_{x_1}\,,\ \text{ovvero da}\ D_{xy} = y_1 D_{x_1} + y_2 D_{x_2}\,,$$

ovvero da

$$D_{xy} = y_1 D_{x_1} + y_2 D_{x_2} + y_3 D_{x_3}\,,$$

ecc.

1149. Se il simbolo operativo D_{xy} si applichi due volte di seguito ad f, si otterrà la così detta *seconda polare* di f, rappresentabile con $D_{xy}[D_{xy}f]$ o più brevemente con $D_{xy}^2 f$. Similmente $D_{xy}^3 f$ ci rappresenterà la *terza polare* di f, che si ricaverà da f applicando tre volte consecutivamente ad f l'operazione D_{xy}; e così di seguito.

È chiaro che la prima polare della prima polare di f coincide colla seconda polare di f, e così la prima polare della seconda polare colla terza polare di f, ecc.

1150. Esempio. — Data la funzione:

$$f = ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 + \alpha x_2 x_3 + \beta x_3 x_1 + \gamma x_1 x_2\,,$$

si trova come prima polare:

$$D_{xy}f = (2ax_1 + \beta x_3 + \gamma x_2)y_1 + (2bx_2 + \gamma x_1 + \alpha x_3)y_2 + (2cx_3 + \alpha x_2 + \beta x_1)y_3$$

e come seconda polare:

$$D_{xy}^2 f = 2\{ay_1^2 + by_2^2 + cy_3^2 + \alpha y_2 y_3 + \beta y_3 y_1 + \gamma y_1 y_2\}.$$

1151. *La polare* k^{ma} *della somma di più funzioni è uguale alla somma delle polari* k^{me} *delle singole funzioni.*

Basterà dimostrare ciò per il caso di $k=1$; cioè che

$$D_{xy}(f_1+f_2+\ldots+f_m)=D_{xy}f_1+D_{xy}f_2+\ldots+D_{xy}f_m.$$

Ora ciò è una conseguenza immediata della definizione dell'operazione D_{xy} e del teorema analogo relativo alla derivata di una somma (art. 689).

1152. *La prima polare del prodotto di* m *funzioni è uguale alla somma degli* m *prodotti che si ottengono moltiplicando la prima polare di ciascuna funzione per le funzioni rimanenti.*

Si ha infatti:

$$D_{xy}[f\varphi\psi]=\sum_i y_i D_{x_i}[f\varphi\psi]$$

e quindi anche (art. 692):

$$D_{xy}[f\varphi\psi]=\sum_i y_i\Big([D_{x_i}f]\varphi\psi+f[D_{x_i}\varphi]\psi+f\varphi[D_{x_i}\psi]\Big)$$

o anche:

$$D_{xy}[f\varphi\psi]=\Big(\sum_i y_i[D_{x_i}f]\Big)\varphi\psi+\ldots,$$

cioè appunto:

$$D_{xy}[f\varphi\psi]=[D_{xy}f]\varphi\psi+f[D_{xy}\varphi]\psi+f\varphi[D_{xy}\psi].$$

1153. Data la funzione intera $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ delle n variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$, se eseguiamo sulle variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$ la trasformazione lineare:

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 x'_1+\alpha_2 x'_2+\ldots+\alpha_n x'_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \gamma_1 x'_1+\gamma_2 x'_2+\ldots+\gamma_n x'_n \end{aligned} \tag{2}$$

e sostituiamo queste espressioni delle $x_1, \ldots, x_n$ in $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, è chiaro che la f si cangierà in una funzione intera, dello stesso grado, delle $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$. Scriveremo pertanto:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)=F(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n). \tag{3}$$

Sia ora $y_1, y_2, \ldots, y_n$ un'altra serie di variabili, che si trasformi (art. 1118) *cogredientemente* alle $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nella nuova serie $y'_1, y'_2, \ldots, y'_n$; cosicchè si avrà:

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha_1 y'_1+\alpha_2 y'_2+\ldots+\alpha_n y'_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= \gamma_1 y'_1+\gamma_2 y'_2+\ldots+\gamma_n y'_n. \end{aligned} \tag{4}$$

Aggiungendo alle (2) le corrispondenti equazioni (4) moltiplicate

per un parametro arbitrario λ, si ottiene:

$$x_1+\lambda y_1=\alpha_1(x'_1+\lambda y'_1)+\alpha_2(x'_2+\lambda y'_2)+\dots+\alpha_n(x'_n+\lambda y'_n)$$

. . . .

$$x_n+\lambda y_n=\gamma_1(x'_1+\lambda y'_1)+\gamma_2(x'_2+\lambda y'_2)+\dots+\gamma_n(x'_n+\lambda y'_n),$$

onde si vede che i valori $x'_1+\lambda y'_1$, $x'_2+\lambda y'_2$, ... sono legati ai valori $x_1+\lambda y_1$, $x_2+\lambda y_2$, ... precisamente da quelle stesse relazioni (2) che legano i valori x'_1, x'_2, ai valori x_1, x_2, ... e sono sufficienti a rendere soddisfatta l'eguaglianza (3). Si avrà dunque, simultaneamente alla (2):

$$f(x_1+\lambda y_1, x_2+\lambda y_2,\dots, x_n+\lambda y_n)=F(x'_1+\lambda y'_1, x'_2+\lambda y'_2,\dots, x'_n+\lambda y'_n). \quad (5)$$

1154. Sviluppando i due membri della (5) mediante il teorema di Taylor (art. 516) viene:

$$f(x_1,\dots, x_n)+\frac{\lambda}{\lfloor 1}\Big[D_{xy}f(x_1,\dots, x_n)\Big]+\frac{\lambda^2}{\lfloor 2}\Big[D_{xy}{}^2f(x_1,\dots, x_n)\Big]+\dots=$$

$$F(x'_1,\dots, x'_n)+\frac{\lambda}{\lfloor 1}\Big[D_{x'y'}F(x'_1,\dots,x'_n)\Big]+\frac{\lambda^2}{\lfloor 2}\Big[D_{x'y'}{}^2F(x'_1,\dots,x'_n)\Big]+\dots.$$

È questa una relazione che dev'essere soddisfatta qualunque sia il valore del parametro arbitrario λ; cosicchè se ne deduce (articolo 483), uguagliando nei due membri i coefficienti di una stessa potenza k^{ma} di λ:

$$D_{xy}{}^kf(x_1, x_2, \dots, x_n)=D_{x'y'}{}^kF(x'_1, x'_2, \dots, x'_n). \quad (6)$$

Con quest'uguaglianza è dimostrato il così detto *carattere invariantivo* delle forme polari rispetto ad una trasformazione lineare (2) della forma fondamentale. È evidente infatti che il secondo membro di (6) è una funzione intera dei coefficienti A_1, A_2, ... di F e delle x'_1, x'_2, ..., y'_1, y'_2, ... composta con queste quantità assolutamente allo stesso modo nel quale il primo membro è composto coi corrispondenti coefficienti a_1, a_2, ... di f e colle x_1, x_2, ..., y_1, y_2, ...

In altri termini, se

$$D_{xy}{}^kf(x_1, x_2,\dots, x_n)=\varphi(a_1, a_2,\dots; x_1, x_2,\dots, x_n; y_1, y_2,\dots, y_n),$$

si ha anche:

$$D_{x'y'}{}^kF(x'_1, x'_2,\dots, x'_n)=\varphi(A_1, A_2,\dots; x'_1, x'_2,\dots, x'_n; y'_1, y'_2,\dots, y'_n),$$

cosicchè la (6) prende la forma:

$$\varphi(a_1, a_2,\dots; x_1,\dots, x_n; y_1,\dots, y_n)=\varphi(A_1, A_2,\dots; x'_1,\dots, x'_n; y'_1,\dots, y'_n)$$

che mette del tutto in evidenza il carattere invariantivo della funzione φ rispetto alla trasformazione lineare del campo ternario e della forma fondamentale f.

Note ed Esercizi.

1. Sia, per fissare le idee, f una forma quadratica $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ delle quattro variabili x_1, x_2, x_3, x_4; e interpretiamo queste quattro variabili come le quattro coordinate omogenee $x_1 : x_2 : x_3 : x_4$ di un punto P_x dello spazio ordinario.

Se $\varphi(x_1, \dots, x_4; y_1, \dots, y_4)$ è la prima polare di f rispetto alla nuova serie di variabili $y_1 : y_2 : y_3 : y_4$, l'equazione:

$$\varphi(x_1, \dots, x_4; y_1, \dots, y_4) = 0 \tag{1}$$

stabilisce fra i due punti P_x e P_y un legame che si esprime dicendo che essi sono punti *conjugati* rispetto alla superficie del 2° ordine:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0.$$

Siano Q_1 e Q_2 i due punti nei quali la retta L congiungente P_x e P_y incontra la superficie $f = 0$. Se:

$$x_i + \lambda_1 y_i, \; x_i + \lambda_2 y_i, \; (i = 1, 2, 3, 4)$$

sono risp. le coordinate di Q_1 e Q_2, si avrà, per $\lambda = \lambda_1, \lambda_2$:

$$f(x_1 + \lambda y_1, x_2 + \lambda y_2, x_3 + \lambda y_3, x_4 + \lambda y_4) = 0,$$

cioè, sviluppando secondo il teorema di Taylor (cfr. art. 518) e tenendo conto dell'annullarsi della prima polare:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) + \lambda^2 f(y_1, y_2, y_3, y_4) = 0.$$

I due numeri λ_1 e λ_2 sono dunque uguali ma di segno contrario, cioè: *due punti conjugati* P_x *e* P_y *sono separati armonicamente dai due punti* Q_1, Q_2 *nei quali la loro congiungente incontra la superficie del 2° ordine.*

Se si considera come dato il punto P_y, l'equazione (1), che è di primo grado anche nelle x_1, x_2, x_3, x_4, ci darà come luogo dei punti P_x conjugati a P_y un piano, che si chiama il *piano polare* di P_y (*polo*) rispetto alla superficie del 2° ordine.

2. *Se, mediante una trasformazione projettiva qualunque, la quadrica* f *e la coppia di punti* A *e* B, *conjugati rispetto ad essa, si cambiano risp. nella quadrica* F *e nei due punti* A' *e* B', *anche* A' *e* B' *saranno fra loro conjugati rispetto ad* F.

Si riconosca ciò come conseguenza immediata del carattere invariantivo delle forme polari.

3. Dimostrare che, date due quadriche, esiste un tetraedro tale che ogni vertice ha per piano polare rispetto ad entrambe la faccia ad esso opposta.

4. Data una funzione intera $f(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n; z_1, \dots, z_n)$ di una o più serie di variabili, se ne possono dedurre le così dette *polari miste* operando su f un numero qualunque di volte e secondo un ordine qualunque colle operazioni fondamentali:

$$D_{xy}, D_{yx}, D_{xz}, D_{zx}, D_{yz}, \dots .$$

Si dimostri che tutte queste nuove forme hanno carattere invariantivo rispetto ad una trasformazione lineare delle serie cogredienti $x_1, \dots, x_n$; $y_1, \dots, y_n$; ... e alla corrispondente trasformazione dei coefficienti della f.

5. È importante di notare che i simboli operativi D_{pq} non sono tutti fra loro permutabili. Bensì, se φ è una funzione intera qualunque delle serie indipendenti $p_1, \dots, p_n$; $q_1, \dots, q_n$; $s_1, \dots, s_n$; $t_1, \dots, t_n$; ..., si hanno le se-

guenti identità fondamentali:

$$D_{sq}D_{pt}\varphi = D_{pt}D_{sq}\varphi \quad , \quad D_{tq}D_{pt}\varphi - D_{pt}D_{tq}\varphi = D_{pq}\varphi$$
$$D_{sq}D_{st}\varphi = D_{st}D_{sq}\varphi \quad , \quad D_{pq}D_{pp}\varphi - D_{pp}D_{pq}\varphi = D_{pq}\varphi$$
$$D_{sq}D_{pq}\varphi = D_{pq}D_{sq}\varphi \quad , \quad D_{qq}D_{pq}\varphi - D_{pq}D_{qq}\varphi = D_{pq}\varphi$$
$$D_{qp}D_{pq}\varphi - D_{pq}D_{qp}\varphi = D_{pp} - D_{qq}\varphi$$

delle quali lasciamo al lettore la dimostrazione.

§ 8.° — Forma aggiunta e forma reciproca di una forma quadratica.

1155. Sia $f(x_1, \dots, x_n)$ una forma n^{ria} qualunque, cioè una funzione intera ed omogenea, di grado qualsivoglia m, delle n variabili $x_1, x_2, \dots, x_n$. Eseguendo su queste una sostituzione lineare qualunque:

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda_{11}x'_1 + \lambda_{12}x'_2 + \dots + \lambda_{1n}x'_n \\ &\dots\dots\dots\dots \\ x_n &= \lambda_{n1}x'_1 + \lambda_{n2}x'_2 + \dots + \lambda_{nn}x'_n , \end{aligned} \tag{1}$$

si avrà:

$$f(x_1, \dots, x_n) = F(x'_1, \dots, x'_n) , \tag{2}$$

dove F è una funzione intera ed omogenea, dello stesso grado m, delle variabili trasformate $x'_1, \dots, x'_n$.

Se poniamo per brevità:

$$D_{x_1}f = u_1, \dots, D_{x_n}f = u_n \; ; \; D_{x'_1}F = u'_1, \dots, D_{x'_n}F = u'_n \tag{3}$$

ed $y_1, \dots, y_n$ siano n nuove variabili che si trasformino cogredientemente alla (1) in $y'_1, \dots, y'_n$, si ha (art. 1154):

$$u_1y_1 + u_2y_2 + \dots + u_ny_n = u'_1y'_1 + u'_2y'_2 + \dots + u'_ny'_n . \tag{4}$$

Sostituendo ora nel primo membro di quest'eguaglianza in luogo delle $y_1, \dots, y_n$ le loro espressioni nelle $y'_1, \dots, y'_n$, che sono affatto analoghe alle (1), ed uguagliando quindi i coefficienti di ciascuna variabile y'_i nei due membri dell'identità così ottenuta, si trova:

$$\begin{aligned} u'_1 &= \lambda_{11}u_1 + \lambda_{21}u_2 + \dots + \lambda_{n1}u_n \\ &\dots\dots\dots\dots \\ u'_n &= \lambda_{1n}u_1 + \lambda_{2n}u_2 + \dots + \lambda_{nn}u_n . \end{aligned} \tag{5}$$

Vediamo dunque (art. 1120) che: *le derivate parziali* $D_{x_1}f, \dots, D_{x_n}f$ *sono legate alle derivate parziali trasformate* $D_{x'_1}F, \dots, D_{x'_n}F$ *dalla sostituzione lineare controgrediente a quella che lega le variabili* $x_1, \dots, x_n$ *alle variabili trasformate* $x'_1, \dots, x'_n$.

1156. Sia ora in particolare:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^{j=n} \sum_{i=1}^{i=n} a_{ij} x_i x_j \quad , \quad a_{ij} = a_{ji} , \qquad (6)$$

una forma quadratica n^{ria}.

Se i valori delle $x_1, \dots, x_n$ soddisfano all'equazione:

$$f(x_1, \dots, x_n) = 0 , \qquad (7)$$

i valori delle variabili controgredienti $u_1, \dots, u_n$ definite dalle (3) soddisferanno ad un'altra equazione:

$$\varphi(u_1, \dots, u_n) = 0 \qquad (8)$$

che si otterrà eliminando le $x_1, \dots, x_n$ dalle $n+1$ equazioni:

$$f(x_1, \dots, x_n) = 0 \ , \ u_1 = D_{x_1} f , \dots , u_n = D_{x_n} f. \qquad (9)$$

Poichè (art. 512):

$$f(x) = \frac{1}{2} x_1 D_{x_1} f + \dots + x_n D_{x_n} f) = \frac{1}{2}(u_1 x_1 + \dots + u_n x_n),$$

il sistema delle (9) si può scrivere:

$$\begin{aligned} 0 &= u_1 x_1 + u_2 x_2 + \dots + u_n x_n \\ \frac{1}{2} u_1 &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \frac{1}{2} u_n &= a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nn} x_n , \end{aligned}$$

diguisachè, eliminando le $x_1, \dots, x_n$, si trova:

$$\varphi(u_1, \dots, u_n) \equiv \begin{vmatrix} 0 & u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ u_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ u_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_n & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0. \qquad (10)$$

La forma $\varphi(u_1, \dots, u_n)$ così definita sotto forma di determinante, che è evidentemente una forma quadratica delle variabili u_1, $u_2, \dots, u_n$, si chiama la forma quadratica *aggiunta* della $f(x_1, \dots, x_n)$. Invero, indicando con A_{ik} l'aggiunto di a_{ik} nel determinante $\sum \pm a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$, si può anche scrivere, come facilmente si riconosce (cfr. pg. 205, Nota 2ª) sviluppando il determinante (10) secondo i prodotti di un elemento della prima orizzon-

tale per un elemento della prima verticale:

$$\varphi(u_1, \dots, u_n) = \sum_{j=1}^{j=n} \sum_{i=1}^{i=n} A_{ij} u_i u_j. \tag{11}$$

1157. *Se il discriminante della forma quadratica* $f(x_1, \dots, x_n)$ *è nullo, la forma aggiunta* $\varphi(u_1, \dots, u_n)$ *è un quadrato esatto.*
Infatti, se $\sum \pm a_{11} a_{22} \dots a_{nn} = 0$, si ha (art. 436):

$$A_{11} : A_{12} : \dots : A_{1n} = A_{21} : A_{22} : \dots : A_{2n} = \dots = A_{n1} : A_{n2} : \dots : A_{nn},$$

diguisachè si potranno determinare n numeri $\rho_1, \dots, \rho_n$ tali da aversi:

$$\begin{array}{llll} A_{11} = \rho_1^2 & , A_{12} = \rho_1\rho_2 , & \dots , & A_{1n} = \rho_1\rho_n \\ A_{21} = \rho_2\rho_1 & , A_{22} = \rho_2^2 , & \dots , & A_{2n} = \rho_2\rho_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} = \rho_n\rho_1 & , A_{n2} = \rho_n\rho_2 , & \dots , & A_{nn} = \rho_n^2 . \end{array}$$

Si potrà dunque scrivere:

$$\varphi = \sum_{i,j} A_{ij} u_i u_j = \sum_{i,j} \rho_i \rho_j u_i u_j = (\rho_1 u_1 + \dots + \rho_n u_n)^2,$$

c. d. d.

1158. Si ponga per brevità:

$$d = \sum \pm a_{11} a_{22} \dots a_{nn} \ , \ D = \sum \pm A_{11} A_{22} \dots A_{nn}. \tag{12}$$

Se in luogo della forma quadratica aggiunta, definita dalla (11), si consideri la forma quadratica:

$$\Phi(u_1, \dots, u_n) = \sum_{j=1}^{j=n} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{A_{ij}}{d} u_i u_j = \frac{1}{d} \varphi(u_1, \dots, u_2), \tag{13}$$

si ha la così detta forma *reciproca* della $f(x_1, \dots, x_n)$, il cui uso è preferibile in molte questioni all'uso della forma aggiunta; poichè essa dà luogo all'importante proprietà: *la forma reciproca della reciproca di una forma quadratica* f *è la stessa forma* f.

Infatti, se si indichi con A'_{ij} l'aggiunto di A_{ij} nel determinante $\sum \pm A_{11} A_{22} \dots A_{nn}$, si ha (cfr. art. 429):

$$\frac{A'_{ij}}{d^{n-1}} : \frac{D}{d^n} = \frac{A'_{ij} d}{D} = a_{ij}.$$

Note ed Esercizi.

1. Se $x_1 : x_2 : x_3 : x_4$ sono le coordinate omogenee di un punto qualunque dello spazio, ed $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0$ è l'equazione di un certo piano, i coefficienti $u_1 : u_2 : u_3 : u_4$ si possono assumere come *coordinate omogenee del piano.*

Ciò posto, se $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ è l'equazione di una certa superficie del 2° ordine, l'equazione $\varphi(u_1, u_2, u_3, u_4) = 0$, che si ottiene uguagliando a zero la forma aggiunta della forma f, rappresenta la stessa superficie considerata come inviluppo di piani; cioè esprime la condizione necessaria e sufficiente cui debbono soddisfare le coordinate u_1, u_2, u_3, u_4 di un piano, affinchè esso sia tangente alla superficie $f = 0$.

Il lettore riconoscerà la verità di quest'asserto riflettendo che $\varphi(u_1, u_2, u_3, u_4) = 0$ esprime la coesistenza delle (9), cioè la condizione affinchè il polo (cfr. la Nota 1ª del § precedente) del piano $u_1 : u_2 : u_3 : u_4$ si trovi sulla superficie $f = 0$.

§ 9.° — Definizione di invarianti e covarianti. Esempi.

1159. In luogo di sottoporre alla trasformazione lineare una sola forma algebrica fondamentale con le n variabili $x_1, x_2, \dots, x_n$, giova considerare, per maggiore generalità, un *sistema* di più forme algebriche, ciascuna delle quali possa anche contenere, oltre alla serie di variabili $x_1, x_2, \dots, x_n$, altre serie $y_1, y_2, \dots, y_n$; $z_1, z_2, \dots, z_n$; ... ad essa cogredienti (art. 1118).

Se $f(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_n; \dots)$ sia una di queste forme, essa si potrà anche designare più brevemente con $f(x, y, \dots)$, od anche con $f(\overset{\mu}{x}, \overset{\nu}{y}, \dots)$ qualora importi metterne in evidenza gli *ordini* rispetto alle singole serie di variabili; cioè che essa è una funzione intera ed omogenea del grado μ nelle $x_1, x_2, \dots, x_n$, intera ed omogenea del grado ν nelle $y_1, y_2, \dots, y_n$, ecc.

Ciò posto, sia dato un sistema di forme fondamentali:

$$f(x, y, \dots), \ \varphi(x, y, \dots), \dots \tag{1}$$

a coefficienti fra loro indipendenti ed affatto arbitrari; e siano:

$$f_1(x', y', \dots), \ \varphi_1(x', y', \dots), \dots \tag{2}$$

i valori delle (1) espressi in funzione delle variabili trasformate $x', y', \dots$, che si deducono dalle $x, y, \dots$ mediante la stessa sostituzione lineare:

$$\begin{array}{l} x_1 = \alpha_1 x'_1 + \alpha_2 x'_2 + \dots + \alpha_n x'_n, \quad y_1 = \alpha_1 y'_1 + \dots + \alpha_n y'_n, \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = \lambda_1 x'_1 + \lambda_2 x'_2 + \dots + \lambda_n x'_n, \quad y_n = \lambda_1 y'_1 + \dots + \lambda_n y'_n, \dots \end{array} \tag{3}$$

Se ora $A_i, B_i, \dots$ sono risp. i coefficienti dei termini generali in $f, \varphi, \dots$ ed $A'_i, B'_i, \dots$ i coefficienti dei termini *omologhi* in

$f_1, \varphi_1, \ldots$, si dice che una funzione razionale $R(A, B, \ldots; x, y, \ldots)$ delle $A_i, B_i, \ldots$ e delle $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ è un *covariante* del sistema (1), se esiste una funzione razionale $\chi(\alpha, \beta, \ldots, \lambda)$ *dei soli coefficienti* della sostituzione lineare (3) tale che si abbia identicamente (cioè qualunque siano i valori delle $A, B, \ldots, x, y, \ldots, \alpha, \beta, \ldots, \lambda$)

$$R(A', B', \ldots; x', y', \ldots) = \chi(\alpha, \beta, \ldots, \lambda) \cdot R(A, B, \ldots; x, y, \ldots).$$

1160. Se il covariante R non contiene le $x, y, \ldots$, cioè dipende soltanto dai coefficienti delle (1), si dice anche che esso è un *invariante;* chè se invece dipende dalle sole $x, y, \ldots$, si dice anche che esso è un *covariante identico.*

Finalmente si dice che R è un covariante (o invariante) *assoluto,* quando il fattore χ è una semplice costante uguale all'unità.

1161. Le forme fondamentali $f, \varphi, \ldots$ sono evidentemente dei covarianti assoluti; e tali sono pure (cfr. art. 1154) tutte le loro polari, semplici o miste, come ad esempio:

$$D_{xy}f, \; D_{xy}^2 f, \; D_{yx}D_{xy}f, \; D_{xy}D_{yz}D_{zx}\varphi, \ldots$$

e, per conseguenza, anche i loro prodotti, le somme dei loro prodotti, ecc.

1162. L'esempio più semplice di covariante identico si ha nel determinante $\sum \pm x_1 y_2 \ldots z_n$ composto con n serie cogredienti. Si ha infatti (art. 1118):

$$\sum \pm x'_1 y'_2 \ldots z'_n = \left(\sum \pm \alpha_1 \beta_2 \ldots \lambda_n\right)^{-1} \cdot \sum \pm x_1 y_2 \ldots z_n. \tag{4}$$

1163. Quanto agli invarianti, l'esempio più semplice si ha nel caso di un sistema fondamentale composto di n forme lineari $a_x, b_x, \ldots, e_x$; ove si è posto per brevità a_x in luogo di $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$, ecc. Infatti, se $a'_{x'}, b'_{x'}, \ldots, e_{x'}$ sono le forme lineari trasformate, i coefficienti a' si deducono dai coefficienti a (art. 1123) mediante la sostituzione lineare controgrediente alla (3); e similmente per $b', c', \ldots$. Si ha dunque (art. 1118):

$$\sum \pm a'_1 b'_2 \ldots e'_n = \sum \pm \alpha_1 \beta_2 \ldots \lambda_n \cdot \sum \pm a_1 b_2 \ldots e_n. \tag{5}$$

1164. Un altro esempio semplice ed importante di invariante ci è dato dal discriminante (art. 1127) di una forma quadratica:

$$f = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=n} a_{ij} x_i x_j$$

considerata come forma fondamentale; poichè, se

$$f_1 = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=n} a'_{ij} x'_i x'_j$$

è la sua trasformata, si ha:

$$\sum\pm a'_{11}a'_{22}\dots a'_{nn}=(\sum\pm \alpha_1\beta_2\dots\lambda_n)^2\cdot\sum\pm a_{11}a_{22}\dots a_{nn}. \qquad (6)$$

La verità di ciò si riconosce subito rappresentando, come all'art. 1126, la forma f come somma di n quadrati:

$$f=[a_x]^2+[b_x]^2+\dots+[e_x]^2$$

di n forme lineari a_x, b_x, ..., e_x, poichè allora si ha (art. 1128):

$$\sum\pm a_{11}a_{22}\dots a_{nn}=(\sum\pm a_1b_2\,..\,e_n)^2, \qquad (7)$$

cosicchè, se $a'_{x'}$, $b'_{x'}$, ..., $e'_{x'}$ sono le forme lineari trasformate, si avrà similmente:

$$\sum\pm a'_{11}a'_{22}\dots a'_{nn}=(\sum\pm a'_1b'_2\dots e'_n)^2. \qquad (7)'$$

Ora dalle (7) e (7)' si trae appunto la (6) tenendo presente la relazione (5) già trovata all'art. prec.

Note ed Esercizi.

1. Se la funzione razionale R dell'art. 1159, contiene oltre alle serie x, y, ... anche delle serie di variabili u, v, ... ad esse controgredienti (art. 1120) e se, dette u', v', ... le serie trasformate delle u, v, ..., si ha:

$$R(A', B', \dots; x', y', \dots; u', v', \dots)=\chi\cdot R(A, B, \dots; x, y; \dots; u, v, \dots),$$

si dice che R è un *covariante misto* del sistema (1).

Come caso particolare può accadere che R non contenga le x, y, ..., ma soltanto le u, v, ... Allora si dice che R è un *controvariante* del sistema (1).

2. Riconoscere che la forma $u_1x_1+u_2x_2+\dots+u_nx_n$ è un covariante misto (identico ed assoluto). Cfr. art. 1122.

3. Riconoscere che la forma quadratica fondamentale:

$$\sum_{ij}a_{ij}x_ix_j=\sum_{ij}a'_{ij}x'_ix'_j$$

ha per controvariante la sua forma aggiunta (art. 1156); e, cioè, che si ha precisamente:

$$\sum_{ij}A'_{ij}u_iu_j=\left(\sum\pm\alpha_1\beta_2\dots\lambda_n\right)^2\sum\pm A_{ij}u_iu_j.$$

4. Come uno degli esempi più importanti, ci proponiamo ora di dimostrare che la *risultante* di due forme binarie:

$$f(x_1, x_2)=a_0x_1^n+a_1x_1^{n-1}+\dots+a_nx_2^n,$$
$$\varphi(x_1, x_2)=b_0x_1^m+b_1x_1^{m-1}x_2+\dots+b_mx_2^m,$$

cioè quella funzione intera $R(a_0, a_1, \dots, b_0 . b_1, \dots)$ dei loro coefficienti che è già stata definita (art. 1008) come risultante delle due equazioni:

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots=0\ ,\ \varphi(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\dots=0,$$

è un invariante del sistema delle due forme fondamentali $f(x_1, x_2)$ e $\varphi(x_1, x_2)$.

Se $\alpha_1 : \alpha_2$, $\beta_1 : \beta_2$, ..., $\lambda_1 : \lambda_2$ sono le n radici di $f(x)=0$, si ha (art. 1065):

$$R(a_0, a_1, ..., b_0, b_1, ...) = a_0^m \varphi\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) \varphi\left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right) ... \varphi\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)$$

ovvero anche, facendo sparire le frazioni:

$$[\alpha_2\beta_2 ... \lambda_2]^m \cdot R(a_0, a_1, ..., b_0, b_1, ...) = a_0^m \varphi(\alpha_1, \alpha_2) ... \varphi(\lambda_1, \lambda_2). \quad (A)$$

Si esegua ora sulle x_1, x_2 una sostituzione lineare qualunque:

$$x_1 = \gamma_1 x'_1 + c_1 x'_2, \quad x_2 = \gamma_2 x'_1 + c_2 x'_2 \quad (B)$$

in virtù della quale si ottenga:

$$f(x_1, x_2) = F(x'_1, x'_2), \quad \varphi(x_1, x_2) = \Phi(x'_1, x'_2) \quad (C)$$

e siano a'_0, a'_1, ..., b'_0, b'_1, ... risp. i coefficienti delle nuove forme F e Φ. Se la sostituzione (B) cambia le coppie α_1, α_2; β_1, β_2; ... risp. in α'_1, α'_2; β'_1, β'_2; ..., l'equazione $F(x'_1, x'_2)=0$ avrà evidentemente per radici i rapporti $\alpha'_1 : \alpha'_2$, $\beta'_1 : \beta'_2$, ...; onde si avrà, analogamente alla (A):

$$[\alpha'_2\beta'_2 ... \lambda'_2]^m \cdot R(a'_0, a'_1, ..., b'_0, b'_1, ...) = a'^m_0 \cdot \Phi(\alpha'_1, \alpha'_2)\Phi(\beta'_1, \beta'_2) ...$$

e quindi anche per le (C):

$$[\alpha'_2\beta'_2 ... \lambda'_2]^m \cdot R(a'_0, a'_1, ..., b'_0 b'_1 ...) = a'^m_0 \cdot \varphi(\alpha_1, \alpha_2)\varphi(\beta_1, \beta_2) ...,$$

cosicchè paragonando con A si trova:

$$a_0^m \cdot [\alpha'_2 ... \lambda'_2]^m \cdot R(a'_0, a'_1, ..., b'_0, ...) =$$
$$= a'^m_0 \cdot [\alpha_2 ... \lambda_2]^m \cdot R(a_0, a_1, ..., b_0, ...). \quad (D)$$

Ora dalle (B), posto per brevità: $\gamma_1 c_2 - \gamma_2 c_1 = \Delta$, si trae:

$$\Delta\alpha'_2 = (\alpha_2\gamma_1 - \alpha_1\gamma_2), \quad \Delta\beta'_2 = (\beta_2\gamma_1 - \beta_1\gamma_2), \cdots,$$

onde:

$$a_0 \Delta^n \alpha'_2 \beta'_2 ... \lambda'_2 = a_0(\alpha_2\gamma_1 - \alpha_1\gamma_2)(\beta_2\gamma_1 - \beta_1\gamma_2) ... = \alpha_2\beta_2 ... \lambda_2 f(\gamma_1, \gamma_2)$$
$$= \alpha_2\beta_2 ... \lambda_2 \cdot a'_0.$$

Pertanto si ha dalla (D):

$$R(a'_0, a'_1, ..., b'_0, b'_1, ...) = \Delta^{mn} \cdot R(a_0, a_1, ..., b_0, b_1, ...),$$

c. d d.

5. Un altro esempio importante ci è fornito dal *discriminante* di una forma binaria: $f(x_1, x_2) = a_0 x_1^n + a_1 x_1^{n-1} x_2 + ... + a_n x_2^n$, cioè da quella funzione intera $D(a_0, a_1, ..., a_n)$ dei suoi coefficienti, che abbiamo gia incontrato (art. 936) come discriminante dell'equazione $f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + ... + a_m = 0$. Lasciamo al lettore di riconoscere che esso è un invariante della forma fondamentale $f(x_1, x_2)$. A quest'oggetto gioverà partire dall'espressione:

$$D(a_0, a_1, ..., a_n) = a_0^{2n-2} \cdot \prod_{j>i} (\alpha_j - \alpha_i)^2$$

in cui $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ sono le n radici di $f(x) = 0$.

§ 10.° — Esprimibilità dei covarianti razionali come quoti di covarianti interi.

1165. Indicando, come all'art. 1159, con A_i, B_i, ... i coefficienti delle forme algebriche primitive f, φ, ... e con A'_i, B'_i, ... i corrispondenti coefficienti delle forme trasformate f_1, φ_1, ... componenti il sistema fondamentale:

$$f(x, y, ...)=f_1(x', y', ...), \varphi(x, y, ...)=\varphi_1(x', y', ...), ..., \qquad (1)$$

sia $R(A, B, ...; x, y, ...)$ un covariante razionale di questo sistema.

Si sa dalla teoria della divisibilità delle funzioni intere di più variabili che ogni funzione razionale di più variabili si può sempre esprimere, ed in un unico modo, come il quoto di due funzioni intere, prime fra loro, delle stesse variabili. Possiamo dunque scrivere:

$$R(A, B, ...; x, y, ...) = \frac{F(A, B, ...; x, y, ...)}{\Phi(A, B, ...; x, y, ...)}, \qquad (2)$$

dove F e Φ sono funzioni razionali intere *prime* fra loro di tutte le variabili A, B, ..., x, y, ...

Per il supposto si ha:

$$\frac{F(A', B', ...; x', y', ...)}{\Phi(A', B', ...; x', y', ...)} = \chi(\alpha, \beta, ..., \lambda) \cdot \frac{F(A, B, ...; x, y, ...)}{\Phi(A, B, ...; x, y, ...)}, \qquad (3)$$

dove χ è una funzione razionale delle sole variabili α_i, β_i, ..., λ (coefficienti della sostituzione lineare).

Ora dalle (1) emerge chiaramente che le A'_i sono funzioni lineari intere delle A_i con coefficienti che sono funzioni intere delle α_i, β_i, ..., λ_i; e lo stesso dicasi delle B'_i rispetto alle B_i, ecc. Pertanto, se in luogo delle A', B', ..., x', y', ... si pongano rispettivamente le loro espressioni nelle A, B, ..., x, y, ..., si potrà scrivere:

$$\begin{aligned} F(A', B', ...; x', y', ...) &= \frac{F_1(A, B, ...; x, y, ...; \alpha, \beta, ..., \lambda)}{D^h} \\ \Phi(A', B', ...; x', y', ...) &= \frac{\Phi_1(A, B, ...; x, y, ...; \alpha, \beta, ..., \lambda)}{D^k}, \end{aligned} \qquad (4)$$

dove F_1, Φ_1 sono funzioni intere e $D=\sum \pm \alpha_1 \beta_2 ... \lambda_n$; di più F_1 e Φ_1 sono nelle $A, B, ..., x, y, ...$ risp. degli stessi gradi delle F e Φ.

Sostituendo le espressioni (4) in (3) si avrà dunque:

$$\frac{F_1(A, B, ...; x, y, ...; \alpha, \beta, ...)}{\Phi_1(A, B, ...; x, y, ...; \alpha, \beta, ...)} = \frac{\chi_1(\alpha, \beta, ...) \cdot F(A, B, ...; x, y, ...)}{\chi_2(\alpha, \beta, ...) \cdot \Phi(A, B, ...; x, y, ...)},$$

dove χ_1, χ_2 sono certe due funzioni intere, prime fra loro, delle sole variabili α_i, β_i, ..., λ_i.

Poichè ora la frazione nel secondo membro è già ridotta alla sua più semplice espressione, e poichè i numeratori e i denominatori nei due membri sono risp. degli stessi gradi nelle A_i, B_i,.... x_i, y_i, ..., dovrà esistere una funzione intera $\chi_0(\alpha, \beta, \ldots, \lambda)$ delle sole α_i, β_i, ..., λ_i, tale da aversi identicamente:

$$F_1(A, B, \ldots; x, y, \ldots; \alpha, \beta, \ldots) = \chi_0 \cdot \chi_1 \cdot F(A, B, \ldots; x, y, \ldots)$$

$$\Phi_1(A, B, \ldots; x, y, \ldots; \alpha, \beta, \ldots) = \chi_0 \cdot \chi_2 \cdot \Phi(A, B, \ldots; x, y, \ldots),$$

diguisachè, confrontando colle (4), si conclude:

$$F(A', B', \ldots; x', y', \ldots) = \chi_0\chi_1 D^{-h} \cdot F(A, B, \ldots; x, y, \ldots)$$

$$\Phi(A', B', \ldots; x', y', \ldots) = \chi_0\chi_2 D^{-k} \cdot \Phi(A, B, \ldots; x, y, \ldots),$$

cioè che ciascuna delle due funzioni intere F e Φ è per sè stessa un covariante.

Resta con ciò dimostrato che *se un covariante razionale non è intero, esso è il quoto di due covarianti interi.*

§ 11.° — Proprietà fondamentale dei covarianti.

1166. Dopo quanto si è stabilito nel § prec., possiamo d'ora innanzi limitarci allo studio dei soli covarianti interi.

Mantenendo le stesse notazioni del § prec., sia $\Phi(A, B, \ldots; x, y, \ldots)$ un covariante intero qualunque del sistema di forme fondamentali f, φ, ...; cosicchè si abbia:

$$\Phi(A', B', \ldots; x', y', \ldots) = \chi(\alpha, \beta, \ldots, \lambda) \cdot \Phi(A, B, \ldots; x, y, \ldots). \quad (1)$$

Ci proponiamo di dimostrare che *la funzione razionale* $\chi(\alpha, \beta, \ldots, \lambda)$ *è una potenza intera, positiva o negativa, del modulo* $D = \sum \pm \alpha_1\beta_2 \ldots \lambda_n$ *della sostituzione lineare*:

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{x}_1 = \alpha_1 \mathrm{x}'_1 + \alpha_2 \mathrm{x}'_2 + \ldots + \alpha_n \mathrm{x}'_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathrm{x}_n = \lambda_1 \mathrm{x}'_1 + \lambda_2 \mathrm{x}'_2 + \ldots + \lambda_n \mathrm{x}'_n \end{array}\right., \quad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{y}_1 = \alpha_1 \mathrm{y}'_1 + \alpha_2 \mathrm{y}'_2 + \ldots + \alpha_n \mathrm{y}'_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathrm{y}_n = \lambda_1 \mathrm{y}'_1 + \lambda_2 \mathrm{y}'_2 + \ldots + \lambda_n \mathrm{y}'_n \end{array}\right., \ldots \quad (2)$$

che lega le x, y, ... *risp. alle* x', y', ...

1167. Cominciamo dal notare che, esprimendo le A', B', ..., x', y', ... in funzione delle A, B, ..., x, y, ..., si può porre, come nel § prec.:

$$\Phi(A', B', \ldots; x', y', \ldots) = \frac{\Phi_1(A, B, \ldots; x, y, \ldots; \alpha, \beta, \ldots)}{D^k}$$

ed esprimendo invece le A, B, ..., x, y, ... in funzione delle A', B', ..., x', y', ...:

$$\Phi(A, B, \ldots; x, y, \ldots) = \frac{\Phi_2(A', B', \ldots; x', y', \ldots; \alpha, \beta, \ldots)}{D^h}$$

dove Φ_1, Φ_2 esprimono funzioni intere ed h, k numeri interi e positivi.

Queste due formole combinate colla (1) ci danno risp.:

$$D^k \cdot \chi(\alpha, \beta, \ldots, \lambda) = \frac{\Phi_1(A, B, \ldots; x, y, \ldots; \alpha, \beta, \ldots)}{\Phi(A, B, \ldots; x, y, \ldots)}$$

e

$$\frac{D^h}{\chi(\alpha, \beta, \ldots, \lambda)} = \frac{\Phi_2(A', B', \ldots; x', y', \ldots; \alpha, \beta, \ldots)}{\Phi(A', B', \ldots; x', y', \ldots)}.$$

Poichè ora la prima di queste uguaglianze è una identità rispetto alle variabili A_i, B_i, ..., x_i, y_i, ..., α, β, ... che possono prendere valori arbitrari fra loro del tutto indipendenti, e così la seconda è un'identità fra le A', B', ..., x', y', ..., α, β, ... che sono del pari fra loro indipendenti, potremo nella prima uguaglianza sostituire per A_i, B_i, ..., x_i, y_i, ... dei numeri scelti a piacere che non annullino la funzione $\Phi(A, B, \ldots, x, y, \ldots)$, e similmente nella seconda potremo sostituire per le A'_i, B'_i, ..., x'_i, y'_i, ... dei numeri qualisivogliano che non annullino $\Phi(A', B', \ldots; x', y', \ldots)$. Dopo ciò in queste uguaglianze resteranno indeterminate, e ancora completamente arbitrarie, le sole α_i, β_i, ..., λ_i, le quali però figurano, nei secondi membri, soltanto nei numeratori, cioè in modo intero. Le due sopraddette uguaglianze assumeranno dunque la forma speciale seguente:

$$D^k \chi \cdot (\alpha, \beta, \ldots, \lambda) = \psi_1(\alpha, \beta, \ldots, \lambda) \qquad (3)$$

$$\frac{D^h}{\chi(\alpha, \beta, \ldots, \lambda)} = \psi_2(\alpha, \beta, \ldots, \lambda), \qquad (4)$$

essendo ψ_1, ψ_2 funzioni intere delle sole α, β, ..., λ.

Ora queste due uguaglianze moltiplicate membro a membro ci danno l'identità:

$$\psi_1(\alpha, \beta, \ldots, \lambda) \cdot \psi_2(\alpha, \beta, \ldots, \lambda) = D^{k+h}$$

dalla quale, poichè le funzioni intere ψ_1 e ψ_2 non possono decomporsi in un prodotto di funzioni prime che in un unico modo, appare chiaramente che ognuna di esse deve essere una potenza intera e positiva di D.

Sostituendo nella (3) per ψ_1 tale potenza di D, si avrà dunque

$$\chi(\alpha, \beta, \ldots, \lambda) = D^\tau,$$

essendo τ un intero positivo o negativo, c. d. d.

1168. Il numero τ per il quale è soddisfatta l'eguaglianza:

$$\Phi(A', B', \ldots, x', y', \ldots) = D^\tau \cdot \Phi(A, B, \ldots, x, y, \ldots)$$

si chiama (per ragioni che appariranno nel seguente §) il *peso* del covariante Φ.

§ 12.° — Relazione fra ordini, gradi e peso di un covariante. Isobarismo dei suoi termini.

1169. Mantenendo ancora le stesse notazioni dei §§ precedenti, sia Φ un covariante di peso τ delle forme fondamentali:

$$f(x, y, \ldots), \varphi(x, y, \ldots), \ldots, \tag{1}$$

cosicchè:

$$\Phi(A', B', \ldots; x', y', \ldots) = D^{\tau} \cdot \Phi(A, B, \ldots; x, y, \ldots). \tag{2}$$

Se il covariante Φ non fosse omogeneo nei coefficienti della forma f, o negli elementi della serie x, esso sarà evidentemente la somma di parti omogenee, ciascuna delle quali, al pari dell'intera funzione Φ, dovrà per sè stessa soddisfare alla (2), ossia godere essa stessa della proprietà invariantiva. Pertanto ci limiteremo d'ora innanzi a considerare covarianti omogenei nei coefficienti di ogni singola forma fondamentale e del pari omogenei negli elementi di ogni singola serie di variabili.

Ciò posto, se indichiamo con g_1 il grado di Φ nei coefficienti A della forma f, con g_2 il suo grado nei coefficienti B di φ, ecc., i numeri $g_1, g_2, \ldots$ si diranno i *gradi* del covariante Φ (risp. corrispondenti alle forme fondamentali $f, \varphi, \ldots$). Se indichiamo poi risp. con $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ il grado di Φ nella serie x, nella serie y, ecc., i numeri $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ si chiameranno gli *ordini* di Φ (per le rispettive serie $x, y, \ldots$).

1170. Sia m_1 il grado complessivo della forma fondamentale f in tutte le $x, y, \ldots$; sia m_2 il grado analogo per la φ, ecc.

Se sostituiamo in Φ in luogo delle $A', B', \ldots$ le loro espressioni nelle $A, B, \ldots$, si avrà:

$$\Phi(A', B', \ldots; x', y', \ldots) = \Phi_1(A, B, \ldots; x', y', \ldots; \alpha, \beta, \ldots, \lambda), \tag{3}$$

dove Φ_1 è una funzione razionale intera che rispetto alle $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ sarà omogenea e di grado $m_1g_1+m_2g_2+\ldots$, poichè Φ è del grado g_1 nelle A' ed ogni A' si esprime con una funzione intera delle A e delle $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ che rispetto a queste ultime è omogenea e del grado stesso m_1 della forma fondamentale f, e similmente per le B', ecc. Se invece sostituiamo in $\Phi(A, B, \ldots; x, y, \ldots)$ in luogo delle $x, y, \ldots$ le loro espressioni nelle $x', y', \ldots$, che sono lineari ed omogenee nelle $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, si avrà:

$$\Phi(A, B, \ldots; x, y, \ldots) = \Phi_2(A, B, \ldots; x', y', \ldots; \alpha, \beta, \ldots, \lambda) \tag{4}$$

dove Φ_2 è una funzione intera che rispetto alle $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ sarà omogenea e di grado $\gamma_1+\gamma_2+\ldots$. Dalle (2), (3), (4) segue ora:

$$\Phi_1(A, B, \ldots; x', y', \ldots; \alpha, \beta, \ldots, \lambda) = D^{\tau} \cdot \Phi_2(A, B, \ldots; x', y', \ldots; \alpha, \beta, \ldots, \lambda),$$

e dev' essere questa un' identità rispetto alle variabili completa-

mente indipendenti A , B , ... ; x' , y' , ... ; α , β , ... , λ. Eguagliando i gradi dei due membri nelle α , β , ... , λ, si trova così dover essere:

$$m_1 g_1 + m_2 g_2 + \ldots = n\tau + \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots.$$

Pertanto: *il peso di un covariante* n^{rio} *si esprime, in funzione dei suoi gradi ed ordini e degli ordini delle forme fondamentali, mediante la formola*:

$$\tau = \frac{\sum m_i g_i - \sum \gamma_i}{n}.$$

1171. Se nella forma fondamentale (che per semplicità supporremo contenere la sola serie x):

$$f(x_1 , x_2 , \ldots , x_n) = \sum A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$$

consideriamo un coefficiente qualunque $A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}$, gli indici α_1 , α_2 , ... , α_n , ai quali corrisponde, li chiameremo i *pesi* di tale coefficiente; e precisamente chiameremo *primo peso* l'indice α_1 , *secondo peso* l'indice α_2 , e così via:

Ciò posto, si eseguisca nella f la sostituzione lineare semplicissima:

$$x_1 = x'_1 , \ldots , x_{h-1} = x'_{h-1} , x_h = \varepsilon x'_h , x_{h+1} = x'_{h+1} , \ldots , x_n = x'_n.$$

Si avrà:

$$f(x_1 , x_2 , \ldots , x_n) = \sum \varepsilon^{\alpha_h} . A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} (x'_1)^{\alpha_1} (x'_2)^{\alpha_2} \ldots (x'_n)^{\alpha_n} ,$$

onde:

$$A'_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} = \varepsilon^{\alpha_h} . A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}$$

e similmente per le altre forme fondamentali $\varphi(x_1 , \ldots , x_n)$, ,...

Pertanto, esprimendo nella (2) le A', B' , ... colle A , B , ... e le x' , y' , ... colle x , y , ... ed osservando che ora D=ε, si trova la identità:

$$\Phi\left(\varepsilon^p A , \varepsilon^q B , \ldots ; \begin{matrix} x_1 , & y_1 , \ldots \\ \cdots & \cdots \\ \frac{x_h}{\varepsilon} , & \frac{y_h}{\varepsilon} , \ldots \\ \cdots & \cdots \\ x_n , & y_n , \ldots \end{matrix} \right) = \varepsilon^\tau . \Phi\left(A , B , \ldots ; \begin{matrix} x_1 , y_1 , \ldots \\ \cdots \\ x_h , y_h , \ldots \\ \cdots \\ x_n , y_n , \ldots \end{matrix} \right)$$

dove p indica l' h^{mo} peso del coefficiente A, similmente q l' h^{mo} peso di B, ecc. Identificando ogni termine del primo membro col corrispondente del secondo, si vede di quì che, se P_h è la somma degli h^{mi} pesi di tutti i coefficienti A , B , ... che entrano come fattori (semplici o ripetuti) in un qualsiasi termine del covariante Φ

e Π_h è il grado di questo stesso termine rispetto alle variabili x_h, y_h,..., la differenza $P_h - \Pi_h$ è uguale a τ, peso del covariante Φ.

La differenza $P_h - \Pi_h$ *(che si definisce come peso* h^{mo} *del termine considerato* (*)) *ha dunque lo stesso valore in ogni termine del covariante* Φ. *Essa è inoltre indipendente da* h, *e si ha:*

$$P_1 - \Pi_1 = P_2 - \Pi_2 = \dots = P_n - \Pi_n = \tau,$$

essendo τ *il peso del covariante* Φ.

Questo teorema si esprime spesso dicendo che la funzione Φ è *isobarica* (cioè di *egual peso* in tutti i suoi termini) rispetto a ciascuno degli n indici $1, 2, \dots, n$.

Note ed Esercizi.

1. A maggiore schiarimento applichiamo quanto si è detto ad una forma binaria qualunque di ordine m:

$$f(x_1, x_2) = \sum_{\alpha_1+\alpha_2=m} A_{\alpha_1\alpha_2} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}.$$

Nella rappresentazione ordinaria della forma binaria si distinguono i diversi coefficienti col solo secondo indice, ponendosi p. es.:

$$A_{m,0}=p_0 \quad , \quad A_{m-1,1}=p_1 \quad , \quad A_{m-2,2}=p_2 \, , \dots , A_{0,m}=p_m \, ,$$

cosicchè si scrive:

$$f(x_1, x_2)=p_0x_1^m+p_1x_1^{m-1}x_2+p_2x_1^{m-2}x_2^2+ \dots +p_mx_2^m. \qquad (\alpha)$$

Conseguentemente a ciò non si parla che di *un solo peso* (quello da noi chiamato sopra secondo peso) attribuendo ad ogni coefficiente un peso eguale al suo indice, cosicché un prodotto qualunque di coefficienti p come:

$$p_0^{\alpha_0} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_m^{\alpha_m}$$

avrà per peso:

$$0\alpha_0 + 1\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + m\alpha_m.$$

2. Pertanto, se:

$$\Phi = \sum c \cdot p_0^{\alpha_0} p_1^{\alpha_1} \dots p_m^{\alpha_m} \qquad (\beta)$$

(essendo le c dei coefficienti numerici) è un invariante, di grado g e di peso τ, della forma fondamentale (α), oltre ad aversi per tutti i termini

(*) Così, ad esempio, il termine $A_{123}A_{213}^3B_{310}x_1x_2x_3y_1y_2^2$ avrà:

per primo peso:	$1 + 3.2 + 3 - 1 - 1 \;\; = 8$
per secondo peso:	$2 + 3.1 + 1 - 1 - 2.1 = 3$
pel terzo peso:	$3 + 3.3 + 0 - 1 - 0 \;\; = 11$,

onde esso non potrebbe essere termine di alcun covariante ternario.

della Σ:

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m = g\,, \tag{γ}$$

dovrà aversi altresì:

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \dots + m\alpha_m = \tau, \tag{δ}$$

essendo ora τ (art. 1170) dato dalla formola:

$$\tau = \frac{mg}{2}. \tag{ε}$$

Dalla (δ) emerge che il peso di un invariante qualunque è sempre un numero intero e positivo; onde segue poi dalla (ε) che *una forma binaria di ordine dispari non può mai avere invarianti di grado dispari.*

8. Per una forma fondamentale quadratica $f = p_0x_1^2 + 8p_1x_1^2x_2 + 3p_2x_2^2$ esiste, come si è visto, l'invariante (di grado 2 e peso 2):

$$p_1^2 - p_0p_2\,,$$

ma non esistono covarianti con una sola serie di variabili.

4. Per la forma fondamentale cubica: $f = p_0x_1^3 + 2p_1x_1x_2 + 8p_2x_2^3 + p_3x_2^3$, si ha un solo invariante, di grado 4 e peso 4, cioè il discriminante (cfr. art. 940):

$$\Delta = 4(p_0p_2 - p_1^2)(p_1p_3 - p_2^2) - (p_0p_3 - p_1p_2)^2.$$

Si hanno inoltre i due covarianti:

$$H = (p_0p_2 - p_1^2)x_1^2 + (p_0p_3 - p_1p_2)x_1x_2 + (p_1p_3 - p_2^2)$$

che è l'Hessiano di f (cfr. § 14), e

$$Q = (p_0^2p_3 - 3p_0p_1p_2 + 2p_1^3)x_1^3 + 3(p_0p_1p_3 - 2p_0p_2^2 + p_1^2p_2)x_1^2x_2$$
$$-3(p_0p_2p_3 - 2p_1^2p_3 + p_1p_2^2)x_1x_2^2 - (p_0p_3^2 - 3p_1p_2p_3 + 2p_2^3)x_2^3$$

che è l'Iacobiano di f e di H (cfr. § 18).

Si potrebbe poi dimostrare che ogni altro covariante, contenente la sola serie di variabili x_1, x_2, si può esprimere come funzione razionale intera delle quattro forme f, H, Q, Δ.

5. Verificare che fra le quattro forme f, H, Q, Δ ha luogo la relazione:

$$Q^2 + 4H^3 + \Delta f^2 = 0.$$

6. Per la forma fondamentale del 4° ordine:

$$f = p_0x_1^4 + 4p_1x_1^3x_2 + 6p_2x_1^2x_2^2 + 4p_3x_1x_2^3 + p_4x_2^4,$$

oltre ai due invarianti (cfr. pag. 611):

$$i = p_0p_4 - 4p_1p_3 + 3p_2^2$$

ed

$$j = p_0p_2p_4 + 2p_1p_2p_3 - p_2^3 - p_0p_3^2 - p_1^2p_4\,,$$

si hanno i due covarianti:

$$H = (p_0p_2 - p_1^2)x_1^4 + 2(p_0p_3 - p_1p_2)x_1^3x_2 + (p_0p_4 + 2p_1p_3 - 3p_2^2)x_1^2x_2^2$$
$$+2(p_1p_4 - p_2p_3)x_1x_2^3 + (p_2p_4 - p_3^2)x_2^4$$

che è l'Hessiano di f (cfr. § 14), e

$$\begin{aligned}T=&(p_0^2p_3-3p_0p_1p_2+2p_1^3)x_1^6\\&+(p_0^2p_4+2p_0p_1p_3-9p_0p_2^2+6p_1^2p_2)x_1^5x_2\\&+5(p_0p_1p_4-3p_0p_2p_3+2p_1^2p_3)x_1^4x_2^2+10(p_1^2p_4-p_0p_3^2)x_1^3x_2^3\\&+5(-p_0p_3p_4+3p_1p_2p_4-2p_1p_3^2)x_1^2x_2^4\\&+(9p_4p_2^2-p_4^2p_0-2p_1p_3p_4-6p_3^2p_2)x_1x_2^5\\&+(3p_2p_3p_4-p_1p_4^2-2p_3^3)x_2^6\end{aligned}$$

che è l'Iacobiano di f e di H (cfr. § 18).

Anche qui si potrebbe dimostrare (*) che ogni altro covariante di f, contenente la sola serie di variabili x_1, x_2, si può esprimere come funzione razionale intera delle cinque forme f, H, T, I, J.

7. Riconoscere che le cinque forme f, H, T, i, j sono legate dalla relazione:

$$T^2+4H^3-iHf^2+jf^3=0.$$

§ 13.° — Covariante jacobiano del sistema di n forme n^{ie}.

1172. Siano $f_1, f_2, \ldots, f_n$ n forme n^{rie} fondamentali qualsivogliano contenenti la serie di variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Il determinante formato colle derivate prime delle f rispetto alle singole variabili:

$$\begin{vmatrix}(f_1)_{x_1} & (f_1)_{x_2} & \cdots & (f_1)_{x_n}\\(f_2)_{x_1} & (f_2)_{x_2} & \cdots & (f_2)_{x_n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\(f_n)_{x_1} & (f_n)_{x_2} & \cdots & (f_n)_{x_n}\end{vmatrix}$$

che indicheremo brevemente con J e si chiama il *Jacobiano* delle $f_1, f_2, \ldots, f_n$, è un covariante del sistema delle forme fondamentali $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

Per dimostrare ciò ci serviremo del principio evidente che *se il prodotto di due forme e una di esse godono della proprietà invariantiva, deve godere di tale proprietà anche l'altra forma.* Se dunque $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$; $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$; ... : $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ sono n nuove serie di variabili cogredienti (art. 1118) alle $x_1, x_2, \ldots, x_n$, basterà, per dimostrare quanto si è asserito, far vedere che il prodotto (**):

$$J\cdot(\xi\eta\ldots\omega)$$

è un covariante; poichè $(\xi\eta\ldots\omega)$ è già, come sappiamo (art. 1162), un covariante.

Infatti, eseguendo il prodotto dei due determinanti J e $(\xi\eta\ldots\omega)$ colla regola ordinaria di moltiplicazione, si trova subito (cfr. ar-

(*) Per questa dimostrazione, come per l'analoga precedente, si vegga l'opera del *Clebsch: Theorie der binären algebraischen Formen.* (Leipzig 1872).

(**) D'ora innanzi scriveremo per brevità $(\xi\eta\ldots\omega)$ in luogo di $\sum\pm\xi_1\eta_2\ldots\omega_n$.

ticolo 1145):

$$(\xi\eta \dots \omega)\cdot J = \begin{vmatrix} D_{x\xi}\cdot f_1 & D_{x\eta}\cdot f_1 & \dots & D_{x\omega}\cdot f_1 \\ D_{x\xi}\cdot f_2 & D_{x\eta}\cdot f_2 & \dots & D_{x\omega}\cdot f_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ D_{x\xi}\cdot f_n & D_{x\eta}\cdot f_n & \dots & D_{x\omega}\cdot f_n \end{vmatrix}.$$

Resta così dimostrato quanto si voleva: poichè il secondo membro è un aggregato razionale intero di forme del tipo $D_{x\xi}f_i$, $D_{x\eta}f_i$,..., e ciascuna di queste è già per sè stessa, come si è già notato (art. 1161), un covariante assoluto.

1173. Per determinare il peso τ del covariante J, basta applicare la formola dell' art. 1170. Oppure si può osservare che, essendo $(\xi\eta \dots \omega)\cdot J$ un covariante assoluto, ed essendo (art. 1162) il fattore $(\xi\eta \dots \omega)$ un covariante di peso -1, il secondo fattore dev'essere evidentemente del peso $\tau = 1$.

Note ed Esercizi.

1. Se si hanno tre forme ternarie f_1, f_2, f_3, le tre equazioni:

$$f_1(x_1, x_2, x_3)=0, \quad f_2(x_1, x_2, x_3)=0, \quad f_3(x_1, x_2, x_3)=0 \qquad (\alpha)$$

rappresentano tre curve piane in coordinate omogenee $x_1 : x_2 : x_3$, e l'equazione $J=0$ rappresenta il luogo di quei punti del piano le cui rette polari rispetto alle tre curve (α) passano per uno stesso punto.

2. Se le forme f_1, f_2, f_3 sono quadratiche, le curve (α) sono tre coniche e la curva $J=0$ è una curva del terz'ordine. Si dimostri che *se di un punto qualunque di* J *si prendano le polari rispetto alle tre coniche, esse s'incontrano in un altro punto della stessa* J.

3. Dimostrare che, se le tre coniche hanno un triangolo conjugato in comune, la Jacobiana si spezza in tre rette coincidenti coi lati di questo triangolo.

4. Dimostrare che, se le tre coniche hanno due punti in comune, la Jacobiana si spezza in una conica e nella congiungente i due punti.

5. Se dunque si considerino i cerchi del piano come coniche passanti per due punti fissi (i punti ciclici all'infinito); (cfr. pag. 575, Nota 7ª) e si ricordi che *la Jacobiana di tre curve passa* (cfr. pag. 582, Nota 8ª) *per ogni punto comune alle tre curve,* si riconosce subito che *la Jacobiana di tre cerchi si compone della retta all'infinito e di un cerchio.* Si costruisca l'equazione e si studino le proprietà di quest'ultimo cerchio.

6. Riconoscere che, se le tre coniche appartengono ad uno stesso fascio, la forma Jacobiana è nulla *identicamente.* È vera la proposizione reciproca?

§ 14.° — Covariante Hessiano di una forma n^{ria}.

1174. Essendo ora data l' unica forma n^{ria} fondamentale $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, si consideri il determinante:

$$H = \begin{vmatrix} f_{11}'' & f_{12}'' & \dots & f_{1n}'' \\ f_{21}'' & f_{22}'' & \dots & f_{2n}'' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{n1}'' & f_{n2}'' & \dots & f_{nn}'' \end{vmatrix}$$

(formato colle derivate seconde $f_{ij}=D_{x_i}D_{x_j}f$) che si chiama l'*Hessiano* di f. Vogliamo dimostrare che H è un covariante di f.

Se poniamo per un momento:

$$D_{x_1}f=f_1\ ,\ D_{x_2}f=f_2\ ,\ \dots\ ,\ D_{x_n}f=f_n\ ,$$

si può scrivere:

$$H=\begin{vmatrix} D_{x_1}f_1 & D_{x_2}f_1 & \dots & D_{x_n}f_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ D_{x_1}f_n & D_{x_2}f_n & \dots & D_{x_n}f_n \end{vmatrix}$$

onde, se $\xi\ ,\ \eta\ ,\ \dots\ ,\ \omega$ sono anche qui n nuove serie di variabili affatto indipendenti fra loro e dalla serie x, si ha:

$$(\xi\eta\dots\omega)\cdot H=\begin{vmatrix} D_{x\xi}f_1 & D_{x\xi}f_2 & \dots & D_{x\xi}f_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ D_{x\omega}f_1 & D_{x\omega}f_2 & \dots & D_{x\omega}f_n \end{vmatrix}$$

e moltiplicando ancora per $(\xi\eta\dots\omega)$:

$$(\xi\eta\dots\omega)^2\cdot H=\begin{vmatrix} D_{x\xi}D_{x\xi}f & D_{x\xi}D_{x\eta}f & \dots & D_{x\xi}D_{x\omega}f \\ D_{x\eta}D_{x\xi}f & D_{x\eta}D_{x\eta}f & \dots & D_{x\eta}D_{x\omega}f \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ D_{x\omega}D_{x\xi}f & D_{x\omega}D_{x\eta}f & \dots & D_{x\omega}D_{x\omega}f \end{vmatrix}.$$

Il prodotto $(\xi\eta\dots\omega)^2\cdot H$ è dunque un covariante assoluto, poichè ogni elemento dell'ultimo determinante (polare mista di f) è un covariante assoluto (cfr. art. 1161). Poichè $(\xi\eta\dots\omega)^2$ è un covariante di peso -2, si conclude così che H è un covariante di f e che il suo peso è uguale a 2.

Note ed Esercizi.

1. Dimostrare che la curva Hessiana ($H=0$) della curva piana $f(x_1, x_2, x_3)=0$ passa pei punti multipli di quest'ultima, cioè per ogni punto $x_1:x_2:x_3$ del piano che soddisfi simultaneamente le equazioni:

$$f_1=0\ ,\ f_2=0\ ,\ f_3=0.$$

2. Se $f(x_1, x_2, x_3)=0$ è una curva di ordine m, la curva di ordine $m-1$

$$y_1f_1+y_2f_2+y_3f_3=0$$

si dice la *prima polare* del punto $y_1:y_2:y_3$ rispetto alla curva $f=0$. Si dimostri che *la Hessiana è il luogo dei punti multipli delle prime polari.*

3. Più generalmente si definisce come *polare* k^{ma} (o *di ordine* $m-k$) del punto $y_1:y_2:y_3$ rispetto alla curva, di ordine m, $f(x_1, x_2, x_3)=0$, la curva:

$$D^k_{xy}f=0.$$

Si dimostri che *la Hessiana di una curva è il luogo di quei punti le cui coniche polari rispetto alla curva si spezzano in due rette.*

4. *Affinchè una forma binaria* $f(x_1, x_2)$, *di ordine* m, *sia la potenza* m^{ma} *di una forma lineare, è necessario e sufficiente che si annulli identicamente la sua Hessiana.*

§ 15.° — Sistema completo degl'invarianti simultanei di due forme quadratiche n^{rie}.

1175. Siano:

$$f=\sum a_{ik}x_ix_k \quad , \quad \varphi=\sum b_{ik}x_ix_k \tag{1}$$

due forme quadratiche n^{rie} composte colla serie di variabili x_1, $x_2, \ldots, x_n$.

Mediante un'opportuna sostituzione lineare delle $x_1, \ldots, x_n$ con n nuove variabili $\xi_1, \ldots, \xi_n$, si potrà ridurre (art. 1126) la f alla somma dei quadrati delle nuove variabili, cosicchè si avrà:

$$f=\xi_1^2+\xi_2^2+\ldots+\xi_n^2 \quad , \quad \varphi=\sum b'_{ik}\xi_i\xi_k.$$

Fatto ciò, mediante un' opportuna sostituzione ortogonale delle $\xi_1, \ldots, \xi_n$ in altre n nuove variabili $X_1, \ldots, X_n$, si potrà ridurre (art. 1138) la seconda forma φ alla somma $\beta_1X_1^2+\ldots+\beta_nX_n^2$, nel mentre che, per l' ortogonalità della sostituzione, si avrà anche:

$$f=\xi_1^2+\xi_2^2+\ldots+\xi_n^2=X_1^2+X_2^2+\ldots+X_n^2.$$

Pertanto: *esiste una sostituzione lineare delle* $x_1, \ldots, x_n$ *nelle* $X_1, \ldots, X_n$ *per la quale le due forme quadratiche* f, φ *assumono la forma:*

$$f=X_1^2+X_2^2+\ldots+X_n^2 \quad , \quad \varphi=\beta_1X_1^2+\beta_2X_2^2+\ldots+\beta_nX_n^2.$$

1176. Supponiamo, per maggiore simmetria, che mediante la sostituzione lineare:

$$\begin{aligned} x_1 &= \gamma_{11}X_1+\gamma_{12}X_2+\ldots+\gamma_{1n}X_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \gamma_{n1}X_1+\gamma_{n2}X_2+\ldots+\gamma_{nn}X_n \end{aligned} \tag{2}$$

le due forme quadratiche (1) prendano la forma:

$$f=A_1X_1^2+A_2X_2^2+\ldots+A_nX_n^2 \quad , \quad \varphi=B_1X_1^2+B_2X_2^2+\ldots+B_nX_n^2, \tag{1)'$$

cosicchè resteranno evidentemente disponibili altre n condizioni da imporsi arbitrariamente alle γ_{ij}.

Sostituendo in (1) le espressioni (2) e identificando quindi le (1) colle (1)', si ottengono per le γ_{ij} le seguenti equazioni:

$$\sum_{i,j}a_{ij}\gamma_{i\mu}\gamma_{j\nu}=0 \quad , \quad \sum_{i,j}b_{ij}\gamma_{i\mu}\gamma_{j\nu}=0 \quad , \quad \mu \gtreqless \nu, \tag{3}$$

$$\sum_{i,j}a_{ij}\gamma_{i\mu}\gamma_{j\mu}=A_\mu \, , \quad \sum_{i,j}b_{ij}\gamma_{i\mu}\gamma_{j\mu}=B_\mu. \tag{4}$$

Se poniamo per brevità:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$$
$$b_{i1}x_1 + b_{i2}x_2 + \dots + b_{in}x_n = \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

le (3) si possono scrivere:

$$\left.\begin{aligned} &\gamma_{1\mu}f_1(\gamma_{1\nu}, \gamma_{2\nu}, \dots) + \gamma_{2\mu}f_2(\gamma_{1\nu}, \gamma_{2\nu}, \dots) + \dots = 0 \\ &\gamma_{1\mu}\varphi_1(\gamma_{1\nu}, \gamma_{2\nu}, \dots) + \gamma_{2\mu}\varphi_2(\gamma_{1\nu}, \gamma_{2\nu}, \dots) + \dots = 0, \end{aligned}\right\} \quad (3)'$$

d'onde appare che, fissato a piacere il valore di ν, dev'essere:

$$\frac{f_1(\gamma_{1\nu}, \gamma_{2\nu}, \dots)}{\varphi_1(\gamma_{1\nu}, \gamma_{2\nu}, \dots)} = \frac{f_2(\gamma_{1\nu}, \gamma_{2\nu}, \dots)}{\varphi_2(\gamma_{1\nu}, \gamma_{2\nu}, \dots)} = \dots = \lambda. \quad (5)$$

Si ha dunque il sistema delle n equazioni:

$$\begin{aligned} &(a_{11} - \lambda b_{11})\gamma_{1\nu} + (a_{12} - \lambda b_{12})\gamma_{2\nu} + \dots = 0 \\ &(a_{21} - \lambda b_{21})\gamma_{1\nu} + (a_{22} - \lambda b_{22})\gamma_{2\nu} + \dots = 0 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &(a_{n1} - \lambda b_{n1})\gamma_{1\nu} + (a_{n2} - \lambda b_{n2})\gamma_{2\nu} + \dots = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

dal quale segue:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda b_{11} & a_{12} - \lambda b_{12} & \dots & a_{1n} - \lambda b_{1n} \\ a_{21} - \lambda b_{21} & a_{22} - \lambda b_{22} & \dots & a_{2n} - \lambda b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} - \lambda b_{n1} & a_{n2} - \lambda b_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda b_{nn} \end{vmatrix} = 0. \quad (7)$$

Se $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sono le n radici di quest'ultima equazione (corrispondenti risp. ai valori $1, 2, \dots, n$ dell'indice ν), le equazioni (6) moltiplicate risp. per $\gamma_{1\nu}, \gamma_{2\nu}, \dots, \gamma_{n\nu}$, sommate quindi membro a membro e paragonate colle (3) e (4) ci danno:

$$A_1 - \lambda_1 B_1 = 0, \ A_2 - \lambda_2 B_2 = 0, \dots, A_n - \lambda_n B_n = 0. \quad (8)$$

1177. Sia:

$$E_0 - E_1\lambda + E_2\lambda^2 - \dots \pm E_n\lambda^n = 0 \quad (7)'$$

l'equazione (7) ordinata secondo le potenze crescenti di λ. Poichè il primo membro di (7) altro non è che il covariante Hessiano della forma $f + \lambda\varphi$ (la quale si cangia in $f_1 + \lambda\varphi_1$ per una trasformazione lineare che cambi f in f_1 e φ in φ_1), si riconosce agevolmente che *i coefficienti* $E_0, E_1, \dots, E_n$ *sono altrettanti invarianti simultanei delle due forme fondamentali* f *e* φ.

In particolare:

$$E_0 = \sum \pm a_{11}a_{22} \dots a_{nn}, \quad E_n = \sum \pm b_{11}b_{22} \dots b_{nn} \quad (9)$$

altro non sono che i loro rispettivi discriminanti.

1178. Supporremo ora, come è sempre lecito (art. 1175), che sia

$B_1=B_2=...=B_n=1$, cosicchè le (8) ci danno $A_1=\lambda_1$, $A_2=\lambda_2$,..., $A_n=\lambda_n$ e per conseguenza la trasformazione (2) fa prendere ad f e φ la forma:

$$f=\lambda_1 X_1^2+\lambda_2 X_2^2+ \dots +\lambda_n X_n^2 \ , \ \varphi=X_1^2+X_2^2+ \dots +X_n^2. \qquad (10)$$

Se $\Delta = \sum \pm \gamma_{11}\gamma_{22} \dots \gamma_{nn}$ è il modulo della trasformazione lineare (2) così determinata ed E'_n è lo stesso invariante E_n costruito per la trasformata di φ, si dovrà avere, essendo E_n (art. 1164) di peso 2:

$$E'_n = \Delta^2 \cdot E_n \ , \quad \text{d'onde} \quad \Delta^2 E_n = 1 \ , \qquad (11)$$

poichè per la forma (10) di φ si ha evidentemente $E'_n = 1$.

1179. Ciò premesso, sia ora $J(a_{i1}, a_{i2}, \dots ; b_{i1}, b_{i2}, \dots)$ un invariante simultaneo qualunque, di peso τ, delle due forme fondamentali f e φ. Per la proprietà fondamentale degl'invarianti si avrà, tenut. presente la (11):

$$J\begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n} ; b_{11}, b_{12}, \dots, b_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n} ; b_{21}, b_{22}, \dots, b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn} ; b_{n1}, b_{n2}, \dots, b_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= E_n^{\frac{\tau}{2}} \cdot J \begin{pmatrix} \lambda_1 , 0 , \dots, 0 ; 1 , 0 , \dots, 0 \\ 0 , \lambda_2 , \dots, 0 ; 0 , 1 , \dots, 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 , 0 , \dots, \lambda_n ; 0 , 0 , \dots, 1 \end{pmatrix}.$$

Il secondo membro di quest'eguaglianza è una funzione intera, evidentemente simmetrica, delle n radici della (7)'. Essa ci dice dunque che ogni invariante simultaneo J (ovvero il suo quadrato, se il peso di J sia dispari) si può esprimere sotto la forma:

$$J = \frac{F(E_0 , E_1 , \dots , E_{n-1} , E_n)}{E_n^k} \qquad (12)$$

essendo k un esponente intero ed F simbolo di una funzione intera a coefficienti numerici.

1180. Noi possiamo però dimostrare che la $F(E_0 , E_1 , \dots , E_n)$ dev'essere identicamente divisibile per E_n^k. Infatti si può sempre scrivere:

$$F(E_0 , E_1 , \dots , E_n)=E_n \cdot F_1(E_0 , E_1 , \dots , E_n)+F_2(E_0 , \dots , E_{n-1}) ,$$

separando quei termini di F che contengono il fattore E_n da quelli che non lo contengono; onde si avrà fra le a_{ij} e b_{hk} l'identità:

$$F_2(E_0 , \dots , E_{n-1}) = E_n^k J - E_n \cdot F_1(E_0 , E_1 , \dots , E_n).$$

Dalla condizione $E_n=0$ imposta alle a_{ij} , b_{hk} seguirebbe dunque necessariamente $F_2(E_0 , \dots , E_{n-1})=0$. Ora ciò è assurdo, poichè gli $n+1$ invarianti simultanei $E_0 , E_1 , \dots , E_n$ sono fra loro indipen-

denti (come mostreremo fra poco), cioè possono assumere, disponendo opportunamente delle a_{ij}, b_{hk}, altrettanti valori fissati a piacere indipendenti fra loro.

Sarà dunque identicamente (cioè qualunque siano le $z_0, z_1, .., z_{n-1}$):

$$F_2(z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}) = 0,$$

cosicchè la (12) prende la forma più semplice:

$$J = \frac{F_1(E_0, E_1, \ldots, E_n)}{E_n^{n-1}}.$$

Procedendo ora allo stesso modo, si finirà per concludere che *il covariante simultaneo* J *si può sempre esprimere come una funzione razionale intera, a coefficienti numerici, degli* n+1 *invarianti* $E_0, E_1, \ldots, E_n$.

1181. Imaginiamo di prendere come caso particolare:

$$a_{ii} = \alpha_i, \quad b_{ii} = \beta_i, \quad \text{e per} \quad i \gtrless j : a_{ij} = b_{ij} = 0,$$

essendo $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n$ dei numeri arbitrarii.

Sostituendo questi valori nel determinante (7), si vede che in questo caso si avrà identicamente rispetto a λ:

$$\begin{aligned} &E_0 - E_1\lambda + E_2\lambda^2 + \ldots \pm E_n\lambda^n \\ &= (\alpha_1 - \lambda\beta_1)(\alpha_2 - \lambda\beta_2) \ldots (\alpha_n - \lambda\beta_n) \\ &= \mu(\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \ldots (\lambda_n - \lambda) \end{aligned}$$

dove:

$$\mu = \beta_1\beta_2 \ldots \beta_n, \quad \lambda_1 = \frac{\alpha_1}{\beta_1}, \ldots, \lambda_n = \frac{\alpha_n}{\beta_n}.$$

Scegliendo opportunamente le α e β, si potrà dunque fare in modo che i numeri $\mu, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$, e quindi anche i numeri E_0, $E_1, \ldots, E_n$, assumano dei valori fissati ad arbitrio, come restava a dimostrare.

FINE.